называется расстоянием от точки $x$ до множества $A$. Доказать, что для замкнутого множества $A$ соотношения

$$\rho(x, A) = 0, \qquad x \in A,$$

эквивалентны; если же $A$ не замкнуто, то они не эквивалентны.

9. Доказать, что для любого множества $A$ совокупность точек $x$, для которых $\rho(x, A) < \varepsilon$, открыта. С другой стороны, показать на примере, что совокупность точек $y$, для которых $\rho(y, A) \leqslant \varepsilon$, не обязана быть замкнутой, даже если $A$ замкнуто.

Указание. Рассмотреть в пространстве $C(a, b)$ множество $A = \left\{x : \sin nx + \varepsilon + \frac{1}{n}\right\}$ и точку $\varphi_0(x) \equiv 0$.

10. Доказать, что всякое замкнутое множество $F$ на прямой есть пересечение счетного множества открытых множеств. То же для метрического пространства со счетной базой.

Указание. Положить $U_n = \left\{ x : \rho(x, F) < \frac{1}{n} \right\}$.

11. Даны два непересекающихся замкнутых множества $F_1$ и $F_2$. Построить непересекающиеся открытые множества $U_1$ и $U_2$ так, чтобы $U_1 \supset F_1$, $U_2 \supset F_2$ и $U_1$ и $U_2$ не пересекались.

Указание. Положить $U_1 = \bigcup\limits_{x \in F_1} \left\{ y : \rho(x, y) < \frac{1}{2}\rho(x, F_2) \right\}$, аналогично $U_2$.

12. Доказать, что всякое открытое множество есть объединение счетного множества замкнутых множеств (на прямой или в пространстве со счетной базой).

13. Доказать, что проекция плоского замкнутого ограниченного множества на прямую есть замкнутое множество.

Существенно ли предположение ограниченности?

Указание. В качестве примера рассмотреть проекцию равнобочной гиперболы на асимптоту.

14. Метрическое пространство $M$ называется *сепарабельным*, если в нем имеется счетное множество $A$, плотное в $M$ (так что замыкание $A$ совпадает со всем $M$). Показать, что наличие счетной базы равносильно сепарабельности.

15. Доказать, что пространства $C(a, b)$ и $D_m(a, b)$ сепарабельны.

Указание. В качестве счетного всюду плотного множества можно взять совокупность многочленов с рациональными коэффициентами.

## § 4. Полные пространства

1. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ точек метрического пространства $M$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N$ такой, что для $\nu > N$ и $\mu > N$ выполняется неравенство

$$\rho(x_\nu, x_\mu) \leqslant \varepsilon.$$

Кратко мы будем писать в таких случаях:

$$\lim_{\nu, \mu \to \infty} \rho(x_\nu, x_\mu) = 0.$$

Например, любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Действительно, по неравенству треугольника

$$\rho(x_\nu, x_\mu) \leqslant \rho(x_\nu, x) + \rho(x, x_\mu),$$

и если $x_\nu \to x$, то правая часть для достаточно больших $\nu$ и $\mu$ становится меньше любого наперед заданного $\varepsilon$.

Если $M$ есть вещественная прямая с обычной метрикой, то понятие фундаментальной последовательности точек совпадает с классическим понятием фундаментальной числовой последовательности. В теории вещественных чисел имеется критерий Коши, в силу которого всякая фундаментальная числовая последовательность является сходящейся.

В общем метрическом пространстве критерий Коши оказывается уже несправедливым.

Рассмотрим открытый интервал (0, 1); он представляет собой метрическое пространство с обычной метрикой числовой оси. Последовательность $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, очевидно, является фундаментальной в этом метрическом пространстве; но она не является в нем сходящейся. Следовательно, в метрическом пространстве (0,1) критерий Коши несправедлив.

**2.** Таким образом, в общем метрическом пространстве нельзя считать выполненным критерий Коши. Если в некоторых конкретных метрических пространствах критерий Коши все же выполняется, то это происходит в силу специальных свойств этих пространств. Класс таких пространств мы выделим следующим определением:

Метрическое пространство $M$ называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность есть последовательность сходящаяся.

***Примеры.*** *1.* Проверим, что $n$-мерное пространство $R_n$ с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum (\xi_j - \eta_j)^2}$$

является полным. Пусть $x_\nu = (\xi_1^{(\nu)}, \ldots, \xi_n^{(\nu)})$ — фундаментальная последовательность. Поскольку

$$|\xi_j^{(\nu)} - \xi_j^{(\mu)}|^2 \leqslant \sum_j |\xi_j^{(\nu)} - \xi_j^{(\mu)}|^2 = \rho^2(x_\nu, x_\mu),$$

то числовая последовательность $\xi_j^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ при каждом фиксированном $j = 1, 2, \ldots, n$ является фундаментальной числовой последовательностью и как таковая имеет некоторый предел $\xi_j$. Числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ определяют вектор $x \in R_n$. Поскольку

$$|x - x_\mu|^2 = \sum_i [\xi_i - \xi_i^{(\mu)}]^2 \to 0 \text{ при } \mu \to \infty,$$

вектор $x$ есть предел взятой фундаментальной последовательности. Итак, каждая фундаментальная последовательность пространства $R_n$ имеет в этом пространстве предел, что нам и требуется.

2. Пространство $C(a, b)$ — полное. В самом деле, если последовательность функций $y_n(x) \in C(a, b)$ фундаментальна, то при $\nu \to \infty$, $\mu \to \infty$

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |y_\nu(x) - y_\mu(x)| \to 0. \tag{1}$$

Фиксируем $x$; числа $y_n(x)$ в силу соотношения (1) образуют фундаментальную числовую последовательность, которая в силу классического критерия Коши обязана быть сходящейся последовательностью. Пусть $y(x)$ есть предел $y_\nu(x)$ при $\nu \to \infty$. Переходя в неравенстве

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |y_\nu(x) - y_\mu(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (\nu, \mu > N = N(\varepsilon))$$

к пределу при $\nu \to \infty$, получаем:

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |y(x) - y_\mu(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (\mu > N = N(\varepsilon)). \tag{2}$$

Следовательно, функция $y(x)$ есть предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций $y_n(x)$ и поэтому в силу известной теоремы анализа непрерывна. Из (2) следует далее, что $\rho(y, y_\mu) \to 0$. Таким образом, в пространстве $C(a, b)$ всякая фундаментальная последовательность является сходящейся; следовательно, $C(a, b)$ — полное пространство.

3. Замкнутое подмножество $A$ полного метрического пространства $M$, рассматриваемое как самостоятельное метрическое пространство (с метрикой, заимствованной из $M$), является полным пространством. Действительно, всякая фундаментальная последовательность $y_\nu \in A$ сходится в $M$ (поскольку $M$ полное), и ее предел принадлежит множеству $A$ в силу предположенной замкнутости этого множества. И обратно, если известно, что подмножество $A \subset M$ само есть полное метрическое пространство, то $A$ замкнуто в $M$. В самом деле, если бы $A$ не было замкнуто в $M$, то мы нашли бы в $A$ последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к некоторой точке $y \in M - A$. Но последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна (метрика в $A$ заимствована из $M$), поэтому в силу полноты $A$ у нее должен существовать предел в $A$. Мы получили бы последовательность, имеющую два различных предела, — один в $A$, другой вне $A$, что невозможно.

4. Пространство $C_p(a, b)$ неполно ни при каком $p$. Для доказательства рассмотрим последовательность непрерывных функций $y_\nu(x)$, заключенных между 0 и 1 и при $\nu \to \infty$ равномерно стремящихся на каждом интервале $(a, c-\varepsilon)$ к 0, а на каждом интервале $(c+\varepsilon, b)$ — к 1 ($c$ — фиксированная точка

между $a$ и $b$). Эта последовательность удовлетворяет критерию Коши. В самом деле,

$$\int_a^b |y_\nu(x) - y_\mu(x)|^p\,dx = \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^{b} \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

для достаточно больших $\nu$ и $\mu$. Но *в то же время последовательность* $y_\nu(x)$ *не сходится в среднем ни к какой непрерывной функции.*

Для доказательства последнего утверждения заметим следующее. *Если последовательность функций* $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *сходится в среднем на промежутке* $\Delta = \{a \leqslant x \leqslant b\}$ *к непрерывной функции* $f(x)$, *а в некотором промежутке* $\delta = \{c \leqslant x \leqslant d\}$, *внутреннем к промежутку* $\Delta$, *равномерно сходится к функции* $\varphi(x)$, *то в промежутке* $\delta$ *имеет место тождество* $\varphi(x) \equiv f(x)$. Действительно, в пространстве $C_p(c, d)$ мы имеем соотношения

$$\rho^p(f_\nu, f) = \int_c^d |f_\nu(x) - f(x)|^p\,dx \leqslant \int_a^b |f_\nu(x) - f(x)|^p\,dx \to 0,$$

$$\rho^p(f_\nu, \varphi) = \int_c^d |f_\nu(x) - \varphi(x)|^p\,dx \leqslant \max_{x \in \delta} |f_\nu(x) - \varphi(x)|^p (d - c) \to 0.$$

В силу единственности предела (§ 2) мы имеем $f(x) \equiv \varphi(x)$, что и утверждалось.

Если мы предположим, что построенная выше последовательность $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_\nu(x), \ldots$ сходится в среднем к некоторой непрерывной функции $f(x)$, то по доказанному мы должны были бы иметь равенство $f(x) = 0$ при $a \leqslant x < c$, $f(x) = 1$ при $c < x \leqslant b$. Но очевидно, что в таком случае, каково бы ни было значение $f(c)$, функция $f(x)$ не будет непрерывной функцией на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Задачи. 1. Ввести на прямой $\{-\infty < x < \infty\}$ метрику по формуле

$$\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|.$$

Проверить выполнение всех аксиом метрического пространства. Будет ли это пространство полным?

*Отв.* Пространство неполно; последовательность $x_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots$ фундаментальна, но предела не имеет.

2. Доказать, что пространство $D_m(a, b)$ полно при любом $m$.

3. Является ли полным пространство всех числовых последовательностей

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots),$$

где $\xi_n \to 0$ при $n \to \infty$, с метрикой по формуле

$$\rho(x, y) = \max_n |\xi_n - \eta_n| ?$$

*Отв.* Да.

4. Рассмотреть три пространства функций на прямой:

а) всех ограниченных непрерывных функций;

б) всех непрерывных функций, у которых $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$;

в) всех непрерывных функций, каждая из которых равна нулю вне некоторого интервала.

В этих пространствах вводится метрика по формуле

$$\rho(f, g) = \sup_x |f(x) - g(x)|.$$

Будут ли указанные пространства полными?

*Отв.* В случаях а) и б) полные, в случае в) нет.

**3.** Лемма о замкнутых шарах. Полнота числовой прямой используется в анализе при доказательстве известной леммы о вложенных отрезках: последовательность вложенных друг в друга отрезков имеет общую точку. В полном метрическом пространстве этот факт имеет место с естественной заменой отрезков на замкнутые шары:

Лемма о замкнутых шарах. *В полном метрическом пространстве последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров*

$$U_\nu = \{y : \rho(y, y_\nu) \leqslant r_\nu\}, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

*радиусы которых $r_\nu$ стремятся к нулю при $\nu \to \infty$, имеет общую точку.*

Доказательство. Центр $y_{\nu+\mu}$ шара $U_{\nu+\mu}$ лежит, вместе со всем этим шаром, в шаре $U_\nu$, так что

$$\rho(y_\nu, y_{\nu+\mu}) \leqslant r_\nu,$$

поэтому последовательность центров $y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots$ фундаментальна. Так как пространство $M$ полно, то эта последовательность имеет предел $y_0$. Поскольку шар $U_\nu$ — замкнутое множество в $M$ (§ 3, п. 2, пример 2) и точки $y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots$ принадлежат этому шару, то и $y_0 = \lim_{\mu\to\infty} y_{\nu+\mu}$ принадлежит шару $U_\nu$; число $\nu$ здесь любое, поэтому $x_0$ принадлежит всем шарам $U_\nu$, что и утверждалось.

В главе I, используя теорему о вложенных отрезках, мы доказали, что множество точек отрезка $[0, 1]$ несчетно. Мы можем установить теперь справедливость аналогичного утверждения и для широкого класса полных метрических пространств.

Предварительно введем следующее определение: точка $x_0$ метрического пространства $M$ называется *изолированной*, если некоторый шар $\rho(x, x_0) < \delta$ не содержит ни одной точки пространства $M$, кроме самой точки $x_0$. Так, если $M$ есть некоторое множество точек оси $-\infty < x < \infty$ с обычной метрикой, то $x_0 \in M$ есть изолированная точка, если имеется интервал, содержащий точку $x_0$ и не содержащий более ни одной точки множества $M$.

Теорема 1. *Всякое полное метрическое пространство $M$ без изолированных точек несчетно.*

Доказательство. Допустим, напротив, что множество всех точек пространства $M$ счетно. Тогда все эти точки можно расположить в последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Пусть $y_1$ — точка пространства $M$, отличная от точки $x_1$; обозначим через $U_1$ шар с центром в $y_1$, не содержащий (ни внутри, ни на границе) точки $x_1$. Так как $y_1$ неизолированная точка, то внутри этого шара есть и еще точки пространства $M$. Пусть $y_2$ — внутренняя точка шара $U_1$, отличная от точки $x_2$; обозначим через $U_2$ шар с центром в $y_2$, содержащийся целиком в шаре $U_1$ и не содержащий точки $x_2$. Продолжая этот процесс далее, мы получим последовательность шаров $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$, радиусы которых можно считать стремящимися к нулю, причем шар $U_n$ не содержит точки $x_n$. Общая точка $\xi$ всех шаров $U_n$, существующая по только что доказанной лемме, не может совпасть ни с одной из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ по построению. Поэтому последовательность $x_1, x_2, \ldots$ не может исчерпать всего пространства $M$, как это было предположено; теорема доказана.

Мы видели выше (пример 3), что замкнутое множество в полном метрическом пространстве само является полным метрическим пространством. Таким образом, в полном метрическом пространстве любое замкнутое множество без изолированных точек несчетно.

Замечание. Если отказаться от предположения, что в пространстве $M$ нет изолированных точек, то теорема перестанет быть справедливой. Соответствующим примером может служить любое счетное замкнутое множество (например, последовательность, сходящаяся к пределу) на прямой, рассматриваемое как самостоятельное метрическое пространство.

Рассмотрим теперь замкнутое множество $F$, расположенное на числовой оси. Очевидно, что всякая изолированная точка множества $F$ является общим концом двух смежных интервалов к этому множеству, или, что то же, общим концом двух составляющих интервалов дополнительного открытого множества.

Будем называть замкнутое множество без изолированных точек *совершенным* множеством. Мы видели (§ 3), что каждое замкнутое множество на оси получается удалением некоторой совокупности интервалов без общих точек; теперь мы видим, что совершенное множество получается удалением совокупности интервалов не только без общих точек, но и без общих концов.

Примером совершенного множества служит любой отрезок $[a, b]$. Но легко можно построить совершенное множество, не содержащее целиком ни одного отрезка. Рассмотрим, в частности, построение так называемого *канторова множества*.

Канторово множество на отрезке $[0, 1]$ строится следующим образом. Сначала из этого отрезка удаляется интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ длины $\frac{1}{3}$, образующий среднюю из трех третей всего отрезка. Затем аналогичная операция производится с каждым из двух оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, т. е. из каждого из них удаляется его средняя третья часть, именно интервал $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ из отрезка $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и интервал $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ из отрезка $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Далее аналогичная процедура производится с каждым из четырех оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ и $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$, и процесс продолжается неограниченно. Оставшееся в результате замкнутое множество и называется канторовым множеством. Поскольку удаляемые при его построении интервалы не имели общих концов, канторово множество совершенно. Так как из каждых двух соседних интервалов с вершинами в точках $\frac{p}{3^q}$, $\frac{p+1}{3^q}$, $\frac{p+2}{3^q}$ был удален по крайней мере один, то канторово множество не содержит целиком ни одного отрезка. Тем не менее в силу только что доказанной теоремы канторово множество несчетно.

Более точно, мощность канторова множества есть мощность континуума. Это вытекает из следующей теоремы, относящейся к любому совершенному множеству на отрезке:

Теорема 2 (Г. Кантор). *Каждое совершенное множество на отрезке* $[a, b]$ *имеет мощность континуума.*

Доказательство. Будем предполагать, что точки $a$ и $b$ являются точными границами множества $F$; при этом, поскольку $F$ замкнуто, мы имеем $a \in F$ и $b \in F$.

Если совершенное множество $F$ содержит хотя бы один отрезок $[\alpha, \beta]$, то утверждение теоремы очевидно. Будем рассматривать случай, когда множество $F$ не содержит ни одного отрезка. В этом случае между любыми двумя смежными к $F$ интервалами имеется еще смежный интервал и число смежных интервалов, таким образом, бесконечно. Поскольку в множестве $F$ нет изолированных точек, смежные интервалы к $F$ не имеют не только общих точек, но и общих концов.

Все точки множества $F$ можно разбить на два класса: в первый класс входят точки, являющиеся концами смежных интервалов множества $F$, — эти точки будем называть *точками первого рода*, — во второй класс — все остальные точки, *точки второго рода*. Так как совокупность смежных интервалов к совершенному множеству счетна, то множество точек первого рода также счетно. Все множество $F$ в силу теоремы 1 несчетно; отсюда следует, что точки второго рода всегда существуют (что заранее нисколько не очевидно) и образуют несчетное множество. Мы сейчас используем другое построение, независимое от теоремы 1 и основанное на специальном свойстве прямой линии; из этого построения снова будет видно, что точки второго рода существуют и, более того, составляют множество мощности континуума.

Мы установим сейчас такое взаимно однозначное соответствие между множеством смежных интервалов к $F$ и множеством двоично-рациональных точек на интервале $(0, 1)$, при котором сохранится порядок расположения: если смежный интервал $\Delta'$ лежит левее смежного интервала $\Delta''$, то соответствующие им двоично-рациональные числа связаны неравенством $r' < r''$. Такое соответствие можно установить, например, следующим образом. Сначала поставим в соответствие смежному интервалу $\Delta_1$ наибольшей длины (если таковых несколько, выберем любой) число $\frac{1}{2}$. Выберем среди всех смежных интервалов, лежащих левее $\Delta_1$, наибольший $\Delta_2$ (с той же оговоркой, если таковых несколько) и поставим ему в соответствие точку $\frac{1}{4}$; аналогично выберем среди всех смежных интервалов, лежащих правее $\Delta_1$, наибольший $\Delta_3$ и поставим ему в соответствие число $\frac{3}{4}$. На каждом из оставшихся четырех отрезков (левее $\Delta_2$, между $\Delta_2$ и $\Delta_1$, между $\Delta_1$ и $\Delta_3$, правее $\Delta_3$) выберем наибольший интервал и поставим в соответствие этим четырем интервалам, по порядку, числа $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ и $\frac{7}{8}$. Ясно, что при таком установлении соответствия порядок расположения сохраняется. Продолжая этот процесс неограниченно, мы и придем в конце концов к интересующему нас соответствию между всеми смежными интервалами множества $F$ и всеми двоично-рациональными точками интервала $(0, 1)$ с сохранением порядка расположения.

Далее мы распространим это соответствие, с одной стороны, на точки множества $F$, с другой — на двоично-иррациональные числа интервала $(0, 1)$. Пусть $\xi \in (0, 1)$ — двоично-иррациональное число. Оно разбивает все двоично-рациональные числа интервала $(0, 1)$ на два класса: левый $K_{\text{л}}$ и правый $K_{\text{пр}}$. Соответственно на два класса $D_{\text{л}}$ и $D_{\text{пр}}$ разбивается множество всех смежных интервалов множества $F$. Обозначим через $\eta_{\text{л}}$ точную верхнюю грань точек, входящих в интервалы класса $D_{\text{л}}$, и через $\eta_{\text{пр}}$ — точную нижнюю грань точек, входящих в интервалы класса $D_{\text{пр}}$.

Между каждой рациональной точкой интервала $(0, 1)$ и точкой $\xi$ имеются еще рациональные точки; поэтому между каждым смежным интервалом множества $F$, лежащим левее $\eta_{\text{л}}$, и самой точкой $\eta_{\text{л}}$ имеются еще смежные интервалы; аналогично между каждым смежным интервалом множества $F$, лежащим правее $\eta_{\text{пр}}$, и самой точкой $\eta_{\text{пр}}$ имеются еще смежные интервалы. Поэтому точки $\eta_{\text{л}}$ и $\eta_{\text{пр}}$ сами не являются точками смежных интервалов или концами смежных интервалов; *это точки второго рода.*

Мы утверждаем, что $\eta_{\text{л}} = \eta_{\text{пр}}$; действительно, в противном случае нашелся бы смежный интервал, разделяющий точки $\eta_{\text{л}}$ и $\eta_{\text{пр}}$ и не принадлежащий по этой причине ни к классу $D_{\text{л}}$, ни к классу $D_{\text{пр}}$, что невозможно. Обозначим общее значение $\eta_{\text{л}}$ и $\eta_{\text{пр}}$ через $\eta$ и эту точку $\eta$ поставим в соответствие взятому двоично-иррациональному числу $\xi$. Закон соответствия $\xi \to \eta$, таким образом, установлен. Если $\xi' \neq \xi''$, то между $\xi'$ и $\xi''$ найдется двоично-рациональная точка; соответствующий смежный интервал разделяет соответствующие точки $\eta'$ и $\eta''$, и эти последние, следовательно, различны. Таким образом, соответствие между двоично-иррациональными числами интервала (0, 1) и (некоторыми) точками множества $F$ взаимно однозначно. Мы видим, что множество $F$ содержит подмножество $F^*$, эквивалентное множеству двоично-иррациональных точек интервала (0, 1), и вместе с этим последним множеством имеет, следовательно, мощность континуума. Теорема доказана.

Из приведенного доказательства видно, что множество $F^*$ состоит только из точек второго рода. Мы утверждаем, что *каждая точка $\eta$ второго рода есть образ некоторого двоично-иррационального числа* $\xi$. Действительно, точка $\eta$ определяет разбиение совокупности всех смежных интервалов к множеству $F$ на два класса: левый $D_л$ (интервалы, лежащие левее $\eta$) и правый $D_{пр}$ (интервалы, лежащие правее $\eta$). Вместе с этим и множество двоично-рациональных чисел разбивается на классы $K_л$ и $K_{пр}$. Число $\xi = \sup K_л = \inf K_{пр}$, как легко видеть, двоично-иррационально и имеет своим образом как раз точку $\eta$.

Переход от интервала (0, 1) к множеству $F$ можно представить себе теперь как некую непрерывную деформацию, при которой каждая двоично-рациональная точка растягивается в целый интервал, каждая двоично-иррациональная точка остается точкой и порядок взаимного расположения соответствующих интервалов и точек сохраняется.

В дальнейшем замкнутое множество в метрическом пространстве, не содержащее ни одного шара целиком, мы будем называть *нигде не плотным*. Произвольное множество $A$ в метрическом пространстве $M$ мы будем называть *нигде не плотным*, если нигде не плотно $\bar{A}$ — замыкание множества $A$.

Задачи. 1. Показать, что каждое замкнутое множество (на оси или в пространстве со счетной базой) есть сумма совершенного и не более чем счетного.

Указание. Совершенное слагаемое — множество точек конденсации данного замкнутого множества. См. задачи 5—6 к § 3.

2. Доказать, что полное метрическое пространство не может быть представлено как счетная сумма своих нигде не плотных подмножеств.

Указание. Использовать метод доказательства теоремы 1.

## § 5. Теорема о неподвижной точке

**1.** Предположим, что имеется некоторая функция, определенная на метрическом пространстве $M$ и ставящая в соответствие каждой точке $y$ этого пространства точку $z = A(y)$ этого же пространства. Мы будем говорить в таком случае, что нам задано *отображение $A$ пространства $M$ в себя*.

В анализе часто приходится иметь дело с различными отображениями функциональных пространств. Например, если $f(x, y)$ — заданная непрерывная функция своих аргументов в области $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < \infty$, то с ее помощью можно построить отображение