соответствие между двоично-иррациональными числами интервала (0, 1) и (некоторыми) точками множества F взаимно однозначно. Мы видим, что множество F содержит подмножество F^*, эквивалентное множеству двоично-иррациональных точек интервала (0, 1), и вместе с этим последним множеством имеет, следовательно, мощность континуума. Теорема доказана.

Из приведенного доказательства видно, что множество F^* состоит только из точек второго рода. Мы утверждаем, что *каждая точка* η *второго рода есть образ некоторого двоично-иррационального числа* ξ. Действительно, точка η определяет разбиение совокупности всех смежных интервалов к множеству F на два класса: левый $D_л$ (интервалы, лежащие левее η) и правый $D_{пр}$ (интервалы, лежащие правее η). Вместе с этим и множество двоично-рациональных чисел разбивается на классы $K_л$ и $K_{пр}$. Число $\xi = \sup K_л = \inf K_{пр}$, как легко видеть, двоично-иррационально и имеет своим образом как раз точку η.

Переход от интервала (0, 1) к множеству F можно представить себе теперь как некую непрерывную деформацию, при которой каждая двоично-рациональная точка растягивается в целый интервал, каждая двоично-иррациональная точка остается точкой и порядок взаимного расположения соответствующих интервалов и точек сохраняется.

В дальнейшем замкнутое множество в метрическом пространстве, не содержащее ни одного шара целиком, мы будем называть *нигде не плотным*. Произвольное множество A в метрическом пространстве M мы будем называть *нигде не плотным*, если нигде не плотно $\bar{A}$ — замыкание множества A.

Задачи. 1. Показать, что каждое замкнутое множество (на оси или в пространстве со счетной базой) есть сумма совершенного и не более чем счетного.

Указание. Совершенное слагаемое — множество точек конденсации данного замкнутого множества. См. задачи 5—6 к § 3.

2. Доказать, что полное метрическое пространство не может быть представлено как счетная сумма своих нигде не плотных подмножеств.

Указание. Использовать метод доказательства теоремы 1.

§ 5. Теорема о неподвижной точке

1. Предположим, что имеется некоторая функция, определенная на метрическом пространстве M и ставящая в соответствие каждой точке y этого пространства точку $z = A(y)$ этого же пространства. Мы будем говорить в таком случае, что нам задано *отображение A пространства M в себя*.

В анализе часто приходится иметь дело с различными отображениями функциональных пространств. Например, если $f(x, y)$ — заданная непрерывная функция своих аргументов в области $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < \infty$, то с ее помощью можно построить отображение пространства $C(a, b)$ в себя по формулам:

$$A[y(x)] = f(x, y(x)),$$

$$A[y(x)] = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi \quad (x_0, y_0 \text{ — заданные числа})$$

и т. п.

Всякая точка y, которая переводится отображением A в себя (т. е. для которой $Ay = y$), называется *неподвижной точкой* отображения A. К вопросу о существовании неподвижных точек отображений сводятся многие задачи анализа типа задач о существовании решений различных уравнений. Например, теорема о существовании решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

с начальными условиями $x = x_0$, $y = y_0$ есть задача о существовании неподвижной точки y отображения

$$Ay(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi,$$

поскольку уравнение (1) при указанных начальных условиях эквивалентно уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi.$$

Имеется много общих теорем, устанавливающих в тех или иных предположениях относительно отображения A наличие неподвижной точки у этого отображения. Мы приведем здесь одну из самых простых теорем такого рода, которая дает не только существование, но и единственность неподвижной точки, правда, при довольно сильном ограничении, наложенном на рассматриваемое отображение.

Определение. Отображение A метрического пространства M в себя называется *сжимающим*, если для любых двух точек y, z пространства M имеет место неравенство

$$\rho(Ay, Az) \leqslant \theta\rho(y, z),$$

где θ — фиксированное положительное число, меньшее 1.

Теорема. *Сжимающее отображение A полного метрического пространства M в себя имеет неподвижную точку, и притом единственную.*

Доказательство. Исходя из произвольной точки $y_0 \in M$, построим последовательность точек

$$y_1 = Ay_0, \quad y_2 = Ay_1 = A^2 y_0, \ \ldots, \ y_\nu = Ay_{\nu-1} = A^\nu y_0, \ \ldots$$

Мы утверждаем, что эта последовательность фундаментальна в M. Действительно, для любого ν

$$\rho(y_\nu, y_{\nu+1}) = \rho(A^\nu y_0, A^{\nu+1} y_0) \leqslant \theta\rho(A^{\nu-1} y_0, A^\nu y_0) \leqslant \ldots \leqslant \theta^\nu \rho(y_0, y_1)$$

и, следовательно,

$$\rho(y_\nu, y_{\nu+\mu}) \leqslant \rho(y_\nu, y_{\nu+1}) + \rho(y_{\nu+1}, y_{\nu+2}) + \ldots + \rho(y_{\nu+\mu-1}, y_{\nu+\mu}) \leqslant$$
$$\leqslant \theta^\nu \rho(y_0, y_1) + \theta^{\nu+1}\rho(y_0, y_1) + \ldots + \theta^{\nu+\mu-1}\rho(y_0, y_1) \leqslant$$
$$\leqslant (\theta^\nu + \theta^{\nu+1} + \ldots + \theta^{\nu+\mu-1} + \ldots)\rho(y_0, y_1) = \frac{\theta^\nu}{1-\theta}\rho(y_0, y_1); \quad (2)$$

при достаточно большом ν эта величина становится как угодно малой. Так как M полно, то существует предел

$$y = \lim_{\nu \to \infty} y_\nu.$$

Покажем, что y — неподвижная точка. Мы имеем

$$\rho(Ay, y_\nu) = \rho(Ay, Ay_{\nu-1}) \leqslant \theta\rho(y, y_{\nu-1}) \to 0,$$

откуда следует, что последовательность y_ν сходится к Ay. В силу единственности предела $Ay = y$, что и требуется. Остается показать, что полученная неподвижная точка — единственная неподвижная точка преобразования A. Допустим, что z — вторая неподвижная точка, так что вместе с равенством $Ay = y$ имеет место и равенство $Az = z$. При этом

$$\rho(y, z) = \rho(Ay, Az) \leqslant \theta\rho(y, z).$$

Если $\rho(y, z) > 0$, то можно сократить равенство на $\rho(y, z)$, и мы получим противоречие: $1 \leqslant \theta$. Поэтому в действительности $\rho(y, z) = 0$, $y = z$, т. е. второй неподвижной точки, отличной от y, не существует. Теорема доказана.

Замечание. Полезно оценить расстояние от какой-то точки y_ν до неподвижной точки y. Для этого в неравенстве (2)

$$\rho(y_\nu, y_{\nu+\mu}) \leqslant \frac{\theta^\nu}{1-\theta}\rho(y_0, y_1)$$

перейдем к пределу при $\mu \to \infty$; используя непрерывность расстояния (§ 3), получаем:

$$\rho(y_\nu, y) \leqslant \frac{\theta^\nu}{1-\theta}\rho(y_0, y_1). \quad (3)$$

Это и есть интересующая нас оценка. В конкретных задачах она позволяет оценить заранее число шагов, необходимое для вычисления y с заданной точностью.

Полагая в (3) $\nu = 0$, получаем:

$$\rho(y_0, y) \leqslant \frac{1}{1-\theta}\rho(y_0, y_1);$$

это неравенство дает оценку расстояния от исходной точки y_0 до неподвижной точки.

2. Теперь мы продемонстрируем применение этой теоремы на примере задачи о существовании и единственности решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{4}$$

с начальными условиями $x = x_0$, $y = y_0$. Как мы уже выше заметили, эта задача есть задача о существовании и единственности неподвижной точки отображения

$$Ay(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{5}$$

Функция $f(x, y)$ предполагается непрерывной в области $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < \infty$. Точка x_0 — внутренняя точка отрезка $[a, b]$.

Отображение (5) определено в метрическом пространстве $C(a, b)$ всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Это пространство, как мы видели, полное; нам остается только выяснить, при каких условиях оператор A является сжимающим.

Для этого оценим расстояние в пространстве $C(a, b)$ между результатами применения оператора A к элементу $y(x)$ и к элементу $z(x)$:

$$\rho(Ay, Az) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |Ay(x) - Az(x)| =$$
$$= \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, z(\xi))]\, d\xi \right|.$$

Предположим, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2| \tag{6}$$

для любого x в промежутке $[a, b]$ и любых значений y_1 и y_2 с фиксированной постоянной K. Неравенство (6) называется *условием Липшица*. Если условие Липшица выполнено, то мы будем иметь при любом ξ в промежутке $[a, b]$

$$|f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, z(\xi))| \leqslant K|y(\xi) - z(\xi)| \leqslant K\rho(y, z)$$

и, следовательно,

$$\rho(Ay,\ Az) \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} \int_{x_0}^{x} K\rho(y,\ z)\ d\xi = K(b-a)\,\rho(y,\ z).$$

Мы видим, что оператор A является сжимающим, если интервал $[a,\ b]$, содержащий точку x_0, достаточно мал, так что

$$K(b-a) = \theta < 1.$$

В этом случае теорема о неподвижной точке может быть применена. Мы получаем: *если функция $f(x,\ y)$ удовлетворяет условию Липшица* (6), *то уравнение* (4) *с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 решение $y = y(x)$, и притом единственное.* Мы доказали тем самым основную теорему о существовании и единственности решения у дифференциального уравнения (4).

Аналогичным приемом можно доказать и непрерывную зависимость решения от начального условия. Условимся сначала называть отображения A и B *ε-близкими*, если при заданном $\varepsilon > 0$ для любой точки x пространства M выполняется неравенство $\rho(Ax,\ Bx) < \varepsilon$.

Лемма. *Пусть в полном метрическом пространстве M даны два сжимающих отображения A и B, так что*

$$\rho(Ax,\ Ay) \leqslant \theta_A \rho(x,\ y), \qquad \rho(Bx,\ By) \leqslant \theta_B \rho(x,\ y),$$

и пусть $\theta = \max(\theta_A,\ \theta_B) < 1$. Тогда можно утверждать, что если эти отображения ε-близки, то неподвижные точки их находятся друг от друга на расстоянии, не превосходящем $\frac{\varepsilon}{1-\theta}$.

Доказательство. Пусть y_0 есть неподвижная точка отображения A. Неподвижную точку отображения B, согласно общей теории, можно построить как предел y_ω последовательности $y_0,\ y_1 = By_0,\ y_2 = By_1,\ \ldots$, причем по доказанному

$$\rho(y_0,\ y_\omega) \leqslant \frac{\rho(y_0,\ y_1)}{1-\theta}.$$

Но так как A и B ε-близки, то $\rho(y_0,\ y_1) = \rho(Ay_0,\ By_0) < \varepsilon$, откуда $\rho(y_0,\ y_\omega) < \frac{\varepsilon}{1-\theta}$, что и требовалось доказать.

Теорема о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начального условия может быть сформулирована следующим образом.

Теорема. *Если уравнение* (1) *рассматривается на отрезке $[a,\ b]$ длиной меньше $\frac{1}{K}$, где K — постоянная из условия Липшица для функции $(f x,\ y)$, то для всякого $\varepsilon > 0$ из $|y_0 - y_1| < \varepsilon$ следует*

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |y_0(x) - y_1(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - K(b-a)};$$

здесь $y_j(x)$ означает решение, удовлетворяющее начальному условию $y_j(x_0)=y_j (j=0,1)$.

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$Ay(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\,d\xi, \quad By(x)=y_1+\int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\,d\xi.$$

Оба они — сжимающие с одним и тем же параметром $\theta=K(b-a)$. Если $|y_0-y_1|<\varepsilon$, то, очевидно, отображения A и B находятся в ε-близости. В силу леммы расстояние между их неподвижными точками не превосходит $\frac{\varepsilon}{1-\theta}=\frac{\varepsilon}{1-K(b-a)}$, что и требуется.

Задачи. **1.** Сформулировать и доказать по методу неподвижной точки теорему существования и единственности решения для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_j}{dx}=f_j(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Указание. Метрическое пространство M состоит из «вектор-функций» $y=(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ с метрикой

$$\rho(y, z)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|y_1(x)-z_1(x)|, \ldots, |y_n(x)-z_n(x)|\}.$$

2. Отображение A на полупрямой $1\leqslant x<\infty$ переводит каждую точку x в $x+\frac{1}{x}$. Является ли отображение сжимающим? Имеет ли неподвижную точку?

Отв. Хотя отображение A и уменьшает расстояния, так что $\rho(Ax, Ay)<\rho(x, y)$, но неравенство $\rho(Ax, Ay)\leqslant\theta\rho(x, y)$ не выполняется (для всех x и y) ни при каком $\theta<1$. Отображение не сжимающее. Неподвижной точки нет.

§ 6. Пополнение метрического пространства

В теории Кантора вещественные числа определяются при помощи фундаментальных последовательностей рациональных чисел[1]). Рациональные числа образуют в обычной метрике *неполное* метрическое пространство M, и процесс построения вещественных чисел по Кантору можно рассматривать как процесс построения полного пространства $\overline{M}$, включающего пространство M. Метод Кантора, должным образом обобщенный, позволяет *любое* неполное метрическое пространство M включить в некоторое полное пространство $\overline{M}$.

Теорема (Ф. Хаусдорф, 1914). *Пусть M — метрическое пространство (вообще говоря, неполное). Существует полное метри-*

[1]) См., например, В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов, Курс математического анализа, т. I, М.—Л., 1957.