здесь $y_j(x)$ означает решение, удовлетворяющее начальному условию $y_j(x_0)=y_j$ $(j=0,1)$.

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$Ay(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\,d\xi, \quad By(x)=y_1+\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\,d\xi.$$

Оба они — сжимающие с одним и тем же параметром $\theta=K(b-a)$. Если $|y_0-y_1|<\varepsilon$, то, очевидно, отображения A и B находятся в ε-близости. В силу леммы расстояние между их неподвижными точками не превосходит $\frac{\varepsilon}{1-\theta}=\frac{\varepsilon}{1-K(b-a)}$, что и требуется.

Задачи. **1.** Сформулировать и доказать по методу неподвижной точки теорему существования и единственности решения для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_j}{dx}=f_j(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Указание. Метрическое пространство M состоит из «вектор-функций» $y=(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ с метрикой

$$\rho(y, z)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|y_1(x)-z_1(x)|, \ \ldots, |y_n(x)-z_n(x)|\}.$$

2. Отображение A на полупрямой $1\leqslant x<\infty$ переводит каждую точку x в $x+\frac{1}{x}$. Является ли отображение сжимающим? Имеет ли неподвижную точку?

Отв. Хотя отображение A и уменьшает расстояния, так что $\rho(Ax, Ay)<\rho(x, y)$, но неравенство $\rho(Ax, Ay)\leqslant\theta\rho(x, y)$ не выполняется (для всех x и y) ни при каком $\theta<1$. Отображение не сжимающее. Неподвижной точки нет.

§ 6. Пополнение метрического пространства

В теории Кантора вещественные числа определяются при помощи фундаментальных последовательностей рациональных чисел[1]). Рациональные числа образуют в обычной метрике *неполное* метрическое пространство M, и процесс построения вещественных чисел по Кантору можно рассматривать как процесс построения полного пространства $\overline{M}$, включающего пространство M. Метод Кантора, должным образом обобщенный, позволяет *любое* неполное метрическое пространство M включить в некоторое полное пространство $\overline{M}$.

Теорема (Ф. Хаусдорф, 1914). *Пусть M — метрическое пространство (вообще говоря, неполное). Существует полное метри-*

[1]) См., например, В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов, Курс математического анализа, т. I, М.—Л., 1957.

ческое пространство $\overline{M}$, называемое пополнением пространства M, которое обладает следующими свойствами:

а) *M изометрично некоторой части $M_1 \subset \overline{M}$,*

б) *M_1 плотно в $\overline{M}$.*

Всякие два пространства $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, удовлетворяющие условиям а) *и* б), *изометричны между собой.*

Доказательство. Назовем две фундаментальные последовательности $\{y_\nu\}$ и $\{z_\nu\}$ пространства M *конфинальными*, если $\lim\limits_{\nu\to\infty} \rho(y_\nu, z_\nu) = 0$. Например, всякие две последовательности пространства M, сходящиеся к одному и тому же пределу, являются конфинальными, а сходящиеся к разным пределам не являются конфинальными. Две фундаментальные последовательности, конфинальные с третьей, конфинальны и между собой. Поэтому все фундаментальные последовательности, которые можно построить из элементов пространства M, можно разбить на классы так, что все последовательности, входящие в один класс, конфинальны между собой и любая последовательность, не входящая в этот класс, не конфинальна ни с одной последовательностью класса. Из таких классов — мы будем обозначать их Y, Z, ... — мы и будем строить новое пространство $\overline{M}$. Подлежит определению лишь величина расстояния между классами Y и Z. Мы определяем ее по формуле

$$\rho(Y, Z) = \lim_{\nu\to\infty} \rho(y_\nu, z_\nu), \tag{1}$$

где $\{y_\nu\}$ — любая фундаментальная последовательность класса Y, а $\{z_\nu\}$ — любая фундаментальная последовательность класса Z. Нужно, конечно, прежде всего проверить, что указанный предел существует и не зависит от выбора последовательностей $\{y_\nu\}$ и $\{z_\nu\}$ в классах Y и Z. По неравенству четырехугольника (§ 1, п. 2)

$$|\rho(y_\nu, z_\nu) - \rho(y_{\nu+\mu}, z_{\nu+\mu})| \leqslant \rho(y_\nu, y_{\nu+\mu}) + \rho(z_\nu, z_{\nu+\mu}),$$

откуда следует, что числа $\rho(y_\nu, z_\nu)$ образуют последовательность, удовлетворяющую критерию Коши. Таким образом, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \rho(y_\nu, z_\nu)$ существует. Если $\{y'_\nu\}$ и $\{z'_\nu\}$ — другие фундаментальные последовательности в классах Y и Z, то, снова применяя неравенство четырехугольника, находим, что

$$|\rho(y_\nu, z_\nu) - \rho(y'_\nu, z'_\nu)| \leqslant \rho(y_\nu, y'_\nu) + \rho(z_\nu, z'_\nu) \to 0,$$

поэтому последовательность $\rho(y'_\nu, z'_\nu)$ имеет тот же предел, что и последовательность $\rho(y_\nu, z_\nu)$. Таким образом, определение расстояния между классами не зависит от выбора фундаментальных последовательностей в этих классах.

Теперь мы должны проверить, что величина

$$\rho(Y,\ Z)=\lim_{\nu\to\infty}\rho(y_\nu,\ z_\nu)$$

удовлетворяет аксиомам 1—3 § 1.

Аксиома 1: $\rho(Y,\ Z)=\rho(Z,\ Y)$ выполнена по построению.

Аксиома 2: $\rho(Y,\ Z)>0$ при $Y\neq Z$, $\rho(Y,\ Y)=0$. Прежде всего, по построению функции ρ мы имеем $\rho(Y,\ Y)=0$, ибо в формуле (1) можно положить $y_\nu=z_\nu$.

Далее предположим, что $\rho(Y,\ Z)=0$. Это означает, что для любой фундаментальной последовательности $\{y_\nu\}$ из класса Y и любой фундаментальной последовательности $\{z_\nu\}$ из класса Z имеет место равенство $\lim(y_\nu,\ z_\nu)=0$. Но тогда $\{y_\nu\}$ и $\{z_\nu\}$ — конфинальные последовательности, и класс Y должен совпадать с классом Z. Таким образом, если $\rho(Y,\ Z)=0$, то $Y=Z$; отсюда следует, что при $Y\neq Z$ имеем $\rho(Y,\ Z)>0$, что и требуется.

Аксиома 3: $\rho(Y,\ U)\leqslant\rho(Y,\ Z)+\rho(Z,\ U)$. Пусть $\{y_\nu\}$, $\{z_\nu\}$, $\{u_\nu\}$ — фиксированные фундаментальные последовательности из классов Y, Z, U соответственно. Искомое неравенство получается в результате перехода к пределу в неравенстве

$$\rho(y_\nu,\ u_\nu)\leqslant\rho(y_\nu,\ z_\nu)+\rho(z_\nu,\ u_\nu).$$

Проверим теперь для пространства $\overline{M}$ все утверждения, сформулированные выше в теореме о пополнении.

1) *$\overline{M}$ содержит подмножество M_1, изометричное пространству M.* Каждому элементу $y\in M$ поставим в соответствие класс $Y\subset\overline{M}$, содержащий последовательность $y,\ y,\ y,\ \ldots$ (т. е. класс всех последовательностей, сходящихся к y). Если по этому правилу точка y соответствует классу Y и точка z — классу Z, то

$$\rho(Y,\ Z)=\lim\rho(y,\ z)=\rho(y,\ z).$$

Отсюда следует, что совокупность соответствующих классов Y есть часть пространства $\overline{M}$, изометричная пространству M.

2) *M_1 плотно в $\overline{M}$.* Пусть Y — произвольный класс из $\overline{M}$ и $\{y_\nu\}$ — фундаментальная последовательность из класса Y. Рассмотрим последовательность классов $Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_\mu,\ \ldots$, где Y_μ определяется последовательностью $(y_\mu,\ y_\mu,\ y_\mu,\ \ldots)$, т. е. отвечает элементу y_μ в соответствии $M\to M_1$. Для заданного $\varepsilon>0$ найдем номер μ_0 так, чтобы при $\mu>\mu_0$ иметь $\rho(y_\mu,\ y_{\mu+p})\leqslant\varepsilon$. Тогда мы будем иметь

$$\rho(Y,\ Y_\mu)=\lim_{\nu\to\infty}(y_\nu,\ y_\mu)\leqslant\varepsilon.$$

Но это означает, что класс Y есть предел классов Y_μ. Так как класс Y_μ принадлежит по построению множеству M_1, то тем самым доказано, что M_1 плотно в $\overline{M}$.

3) $\overline{M}$ — *полное пространство*. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ — фундаментальная последовательность элементов из $\overline{M}$. Для каждого класса Y_ν найдем класс $Z_\nu \subset M_1$ так, чтобы иметь $\rho(Y_\nu, Z_\nu) < \frac{1}{\nu}$, и пусть $z_\nu \in M$ есть элемент, соответствующий классу Z_ν. Мы утверждаем, что последовательность $\{z_\nu\}$ фундаментальна в пространстве M. Действительно,

$$\rho(z_\nu, z_\mu) = \rho(Z_\nu, Z_\mu) \leqslant \rho(Z_\nu, Y_\nu) + \rho(Y_\nu, Y_\mu) + \rho(Y_\mu, Z_\mu) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(Y_\nu, Y_\mu) + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} \to 0 \qquad \text{при } \nu \to \infty, \ \mu \to \infty.$$

Фундаментальная последовательность $\{z_\nu\}$ определяет некоторый класс $Z \subset \overline{M}$; покажем, что класс Z является пределом в $\overline{M}$ последовательности Y_ν. Для заданного $\varepsilon > 0$ при достаточно большом $\nu \geqslant \nu_0$ имеем:

$$\rho(Z, Y_\nu) \leqslant \rho(Z, Z_\nu) + \rho(Z_\nu, Y_\nu) = \lim_{\mu \to \infty} \rho(z_\mu, z_\nu) + \frac{1}{\nu} < \varepsilon.$$

Таким образом, всякая фундаментальная последовательность $Y_\nu \subset \overline{M}$ имеет в $\overline{M}$ предел, что и требовалось.

4) *Любое метрическое пространство* $\overline{\overline{M}}$, *обладающее свойствами* 1) — 3), *изометрично пространству* $\overline{M}$.

Действительно, пусть M_1 и M_2 — подмножества пространства $\overline{M}$ и $\overline{\overline{M}}$, изометричные пространству M и, следовательно, изометричные друг другу. Мы должны продолжить эту изометрию с множеств M_1 и M_2 на пространства $\overline{M}$ и $\overline{\overline{M}}$. Возьмем любой элемент $Y \subset \overline{M}$ и рассмотрим последовательность элементов $Y_\nu \subset M_1$, сходящуюся к Y. Соответствующая последовательность $Z_\nu \subset M_2$, во всяком случае, фундаментальна, так как в силу изометрии между M_1 и M_2 взаимные расстояния между элементами последовательности Z_ν такие же, какие и между элементами последовательности Y_ν. Так как $\overline{\overline{M}}$ полно, то в $\overline{\overline{M}}$ имеется элемент $z = \lim\limits_{\nu \to \infty} z_\nu$. Этот элемент $z \subset \overline{\overline{M}}$ поставим в соответствие взятому элементу $Y \subset \overline{M}$. Он определен однозначно, поскольку конфинальные последовательности в $\overline{M}$ соответствуют конфинальным последовательностям в $\overline{\overline{M}}$ и замена последовательности Y_ν на конфинальную приводит к замене последовательности Z_ν также на конфинальную. Указанное сопоставление взаимно однозначно и исчерпывает все элементы $\overline{M}$ и $\overline{\overline{M}}$. Нам остается показать, что оно является изометрическим. Пусть элементы Y и Y' пространства $\overline{M}$ соответствуют элементам Z и Z' пространства $\overline{\overline{M}}$ и при этом

$$Y = \lim Y_\nu, \qquad Y' = \lim Y'_\nu \qquad (Y_\nu, \ Y'_\nu \text{ из } M_1).$$

Если далее Z_ν и Z'_ν — элементы M_2, отвечающие элементам Y_ν и Y'_ν, то $\rho(Z_\nu, Z'_\nu)=\rho(Y_\nu, Y'_\nu)$, и в силу леммы о непрерывности расстояния (§ 3, п. 1)

$$\rho(Z, Z')=\lim_{\nu\to\infty}\rho(Z_\nu, Z'_\nu)=\lim_{\nu\to\infty}\rho(Y_\nu, Y'_\nu)=\rho(Y, Y'),$$

что и требуется. Тем самым наша теорема доказана полностью.

Замечание 1. Предположим, что данное метрическое пространство M есть часть другого полного метрического пространства M^*. Тогда в качестве пополнения M можно взять замыкание $\overline{M}$ множества M в пространстве M^*. Действительно, $\overline{M}$, как замкнутое подмножество полного пространства M^*, есть полное пространство; затем, оно содержит внутри себя M в качестве плотного подмножества. Оно удовлетворяет, таким образом, условиям доказанной теоремы и в силу этой теоремы может служить пополнением пространства M.

Замечание 2. Пространство $C_p(a, b)$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с расстоянием по формуле

$$\rho^p(y, z)=\int_a^b |y(x)-z(x)|^p\,dx$$

неполно (мы видели это в § 4, п. 1). В силу доказанной теоремы оно имеет пополнение $\overline{C}_p(a, b)$. Естественно поставить вопрос: можно ли элементам пространства $\overline{C}_p(a, b)$, определенным по теореме 1 абстрактным образом, приписать конкретный смысл, истолковать их в виде каких-то функций? Оказывается, что это возможно сделать, хотя и не очень просто; мы откладываем рассмотрение этого вопроса до главы IV, когда будем располагать необходимыми средствами для его решения.

§ 7. Непрерывные функции и компактные пространства

1. Определения и простейшие свойства. Функция $f(x)$ с числовыми значениями, определенная на метрическом пространстве M, называется *непрерывной в точке* x_0, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что из условия

$$\rho(x, x_0)<\delta$$

следует

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Как и в классическом анализе, возможно и второе определение, эквивалентное первому: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любой последовательности $x_n\to x_0$ имеем $f(x_n)\to f(x_0)$. Функция,