Если далее Z_ν и Z'_ν — элементы M_2, отвечающие элементам Y_ν и Y'_ν, то $\rho(Z_\nu, Z'_\nu)=\rho(Y_\nu, Y'_\nu)$, и в силу леммы о непрерывности расстояния (§ 3, п. 1)

$$\rho(Z, Z')=\lim_{\nu\to\infty}\rho(Z_\nu, Z'_\nu)=\lim_{\nu\to\infty}\rho(Y_\nu, Y'_\nu)=\rho(Y, Y'),$$

что и требуется. Тем самым наша теорема доказана полностью.

Замечание 1. Предположим, что данное метрическое пространство M есть часть другого полного метрического пространства M^*. Тогда в качестве пополнения M можно взять замыкание $\overline{M}$ множества M в пространстве M^*. Действительно, $\overline{M}$, как замкнутое подмножество полного пространства M^*, есть полное пространство; затем, оно содержит внутри себя M в качестве плотного подмножества. Оно удовлетворяет, таким образом, условиям доказанной теоремы и в силу этой теоремы может служить пополнением пространства M.

Замечание 2. Пространство $C_p(a, b)$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с расстоянием по формуле

$$\rho^p(y, z)=\int_a^b |y(x)-z(x)|^p\,dx$$

неполно (мы видели это в § 4, п. 1). В силу доказанной теоремы оно имеет пополнение $\overline{C}_p(a, b)$. Естественно поставить вопрос: можно ли элементам пространства $\overline{C}_p(a, b)$, определенным по теореме 1 абстрактным образом, приписать конкретный смысл, истолковать их в виде каких-то функций? Оказывается, что это возможно сделать, хотя и не очень просто; мы откладываем рассмотрение этого вопроса до главы IV, когда будем располагать необходимыми средствами для его решения.

§ 7. Непрерывные функции и компактные пространства

1. Определения и простейшие свойства. Функция $f(x)$ с числовыми значениями, определенная на метрическом пространстве M, называется *непрерывной в точке* x_0, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что из условия

$$\rho(x, x_0)<\delta$$

следует

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Как и в классическом анализе, возможно и второе определение, эквивалентное первому: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любой последовательности $x_n\to x_0$ имеем $f(x_n)\to f(x_0)$. Функция, непрерывная в каждой точке множества M, называется *непрерывной на M.*

Одним из простейших примеров непрерывной функции в метрическом пространстве является расстояние от точки x до фиксированной точки x_0. Непрерывность этой функции вытекает из второго неравенства треугольника (§ 1, п. 2):

$$|\rho(x', x_0) - \rho(x'', x_0)| \leqslant \rho(x', x'').$$

Обычные свойства функций, непрерывных на прямой, известные в анализе, легко переносятся на случай непрерывных функций на метрических пространствах. Так, сумма, разность, произведение двух непрерывных функций — также непрерывные функции. Частное двух непрерывных функций есть также непрерывная функция во всех точках, где знаменатель отличен от нуля.

Установим следующие важные свойства непрерывных функций на метрическом пространстве:

Лемма. *Если $f(x)$ — непрерывная функция, то множества*

$$F_1 = \{x\colon\ f(x) \leqslant A\},$$
$$F_2 = \{x\colon\ f(x) \geqslant A\}$$

замкнуты при любом A, а множества

$$U_1 = \{x\colon\ f(x) < A\},$$
$$U_2 = \{x\colon\ f(x) > A\}$$

открыты при любом A.

Доказательство. Докажем, что множество U_1 открыто. Пусть $x_0 \in U_1$, так что $f(x_0) < A$, и положим $\varepsilon = A - f(x_0)$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то существует такой шар $\rho(x_0, x) < \delta$, в котором выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. В пределах этого шара

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon = A,$$

и, следовательно, весь шар принадлежит множеству U_1. Так как x_0 — любая точка множества U_1, то U_1 — открытое множество. Его дополнением служит множество F_2, которое, следовательно, замкнуто. Для множеств U_2 и F_1 доказательство можно провести аналогично; можно, впрочем, заменить $f(x)$ на $2A - f(x)$, чем задача сводится к предыдущей.

Обратно, *если известно, что для некоторой функции $f(x)$, определенной на метрическом пространстве M, каждое из множеств*

$$U_1 = \{x\colon\ f(x) < A\}, \qquad U_2 = \{x\colon\ f(x) > A\}$$

при любом A является открытым, то функция $f(x)$ непрерывна.

Действительно, в этом случае для любой точки $x_0 \in M$ и любого $\varepsilon > 0$ можно образовать множества

$$U_1 = \{x\colon\ f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}, \qquad U_2 = \{x\colon\ f(x) > f(x_0) - \varepsilon\},$$

которые по условию открыты. Пересечение этих множеств

$$U=\{x:\ f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon\}=\{x:\ -\varepsilon<f(x)-f(x_0)<\varepsilon\}$$

также открыто. Оно содержит, очевидно, точку x_0, а вместе с ней и некоторый шар $U_\delta(x_0)=\{x:\rho(x, x_0)<\delta\}$. В пределах этого шара выполняется неравенство

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

что и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0.

Соответствующее предложение можно формулировать и для множеств $F_1=\{x:\ f(x)\leqslant A\}, F_2=\{x:\ f(x)\geqslant A\}$: *если для функции $f(x)$ каждое из этих множеств при любом A является замкнутым, то $f(x)$ непрерывна.* Доказательство легко получается переходом к дополнениям.

Функции, определенные на метрическом пространстве, которое само состоит из функций, — как известные нам пространства $C(a, b)$, $D_n(a, b)$ и т. д. — мы будем, как правило, называть ***функционалами.***

Задачи. 1. Непрерывны ли на пространстве $C(a, b)$ функционалы:

а) $F(y)=y(a)$;

б) $F(y)=\max|y(x)|$;

в) $F(y)=\max y(x)$;

г) $F(y)=\int\limits_a^b y(x)\,dx$;

д) $$F(y)=\begin{cases}0, \text{ если } y(x) \text{ принимает хотя бы одно отрицательное значение},\\ \dfrac{1}{2}, \text{ если } y(x)\equiv 0,\\ 1, \text{ если } y(x)\geqslant 0, \text{ причем } y(x)\not\equiv 0?\end{cases}$$

Отв. В случаях а) — г) непрерывны, в случае д) нет.

2. Непрерывны ли на пространстве $D_1(a, b)$ функционалы:

а) $F(y)=y(a)$;

б) $F(y)=\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$?

Отв. Да.

3. Непрерывна ли функция $\rho(x, B)=\inf\limits_{y\in B}\rho(x, y)$ (§ 3, задача 8)?

Отв. Да.

4. Непрерывна ли функция $d(x, B)=\sup\limits_{y\in B}\rho(x, y)$?

Отв. Да.

2. Компактные множества. Аналогия со свойствами непрерывных функций на отрезке не всегда сохраняется при переходе к общему метрическому пространству. Например, непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ всегда ограничена на этом отрезке и достигает своей верхней и нижней границы. Непрерывная функция в шаре радиуса r метрического пространства M может оказаться неограниченной или не достигать своих границ (пример указан в одной из задач к настоящему параграфу). Чтобы указанные свойства непрерывных функций оказались справедливыми в данном метрическом пространстве M, нужно подчинить это пространство дальнейшим ограничениям.

Будем называть метрическое пространство M *компактным*, если всякое бесконечное подмножество $A \subset M$ содержит фундаментальную последовательность.

Так, всякое бесконечное подмножество A на интервале $a < x < b$ в силу известной из анализа теоремы Больцано — Вейерштрасса имеет предельную точку и, следовательно, содержит фундаментальную последовательность; мы видим, что интервал $M = (a, b)$ есть компактное метрическое пространство.

Компактное метрическое пространство может не быть полным, как интервал (a, b) в предыдущем примере. Метрическое пространство, одновременно компактное и полное, называется *компактом*.

Можно дать и независимое определение компакта: компакт есть метрическое пространство M, в котором всякое бесконечное подмножество содержит *сходящуюся* последовательность.

Типичным примером компакта является отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ вещественной оси с обычной метрикой.

Оказывается, что свойства непрерывных функций быть ограниченными и достигать своих граней связаны именно с компактностью множества, на котором они определены.

Теорема 1. *Всякая непрерывная функция $f(x)$, определенная на компакте M, ограничена.*

Доказательство. Допустим, что $f(x)$ не ограничена. Тогда для любого целого n можно указать точку $x_n \in M$, в которой $|f(x_n)| > n$.

Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ в силу предположения должна содержать сходящуюся подпоследовательность; отбросив, если потребуется, часть точек, мы можем предположить, что сама эта последовательность сходится к некоторой точке $x_0 \in M$. В силу непрерывности $f(x)$ существует окрестность x_0, определяемая, например, неравенством $\rho(x, x_0) < \delta$, в которой $|f(x_0) - f(x)| < 1$, откуда $|f(x)| \leqslant |f(x_0)| + 1$. С другой стороны, в этой окрестности имеются точки последовательности $x_1, x_2, \ldots$ со сколь угодно большими номерами; в этих точках $f(x)$ принимает сколь угодно большие значения. Полученное противоречие показывает, что $f(x)$ не может быть неограниченной; таким образом, на самом деле $f(x)$ ограничена, что и требуется.

Теорема 2. *Всякая непрерывная функция $f(x)$, определенная на компакте M, достигает на M точной верхней (и нижней) грани.*

Доказательство. Пусть b — точная верхняя грань значений $f(x)$. Для любого целого n можно указать точку x_n, в которой выполняется неравенство

$$0 \leqslant b - f(x_n) < \frac{1}{n}.$$

Допустим, что функция $f(x)$ ни в одной точке компакта M не принимает значения b. Тогда функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{b - f(x)}$$

непрерывна на компакте M и (по теореме 1) ограничена. Но на последовательности точек x_n знаменатель стремится к нулю. Поэтому функция $\varphi(x)$ не может быть ограниченной. Полученное противоречие показывает, что наше допущение несправедливо; следовательно, в некоторой точке компакта M функция $f(x)$ принимает значение b. Теорема доказана.

Справедливы и обратные утверждения: если некоторое метрическое пространство M не есть компакт, то существуют непрерывные функции, определенные на M и не ограниченные или хотя и ограниченные, но не достигающие своих точных границ. Этому вопросу посвящена одна из приведенных ниже задач. Таким образом, условие «M есть компакт» необходимо и достаточно для справедливости теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Всякая непрерывная функция $f(x)$, определенная на компакте M, равномерно непрерывна на нем; иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из $\rho(x, y) < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Доказательство. Допуская противное, мы для некоторого $\varepsilon = \varepsilon_0$ сможем указать такие последовательности x_n и y_n, что

$$\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Последовательность x_n в силу предположения содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке x_0; отбросив, если нужно, часть точек, мы можем считать, что сама последовательность x_n сходится к точке x_0. Тогда и последовательность y_n сходится к точке x_0. Начиная с некоторого номера, точки x_n и y_n попадают в такую окрестность точки x_0, в которой выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Но тогда

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant |f(x_n) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_n)| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0$$

в противоречие с построением. Теорема доказана.

3. Условия компактности. Мы приведем теперь удобные условия, пригодные для проверки компактности конкретных метрических пространств.

Имея в виду дальнейшие применения, мы будем, не ограничивая общности, считать, что метрическое пространство M (изометрически) вложено в метрическое пространство P (поскольку всегда можно положить $P = M$).

Множество

$$B \subset P$$

будем называть *ε-сетью для множества* $M \subset P$, если каждая точка x множества M отстоит не далее чем на ε от некоторой точки $y \in B$.

Теорема 1 (Ф. Хаусдорф, 1914). *Множество M, расположенное в метрическом пространстве P, компактно (в метрике P) тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в P имеется конечная ε-сеть для M.*

Доказательство. Пусть M компактно и задано $\varepsilon > 0$; покажем, что существует конечная ε-сеть для множества M. Возьмем произвольную точку $x_1 \in M$. Если все остальные точки множества M находятся от точки x_1 на расстоянии $\leqslant \varepsilon$, то сама точка x_1 представляет ε-сеть для M и построение закончено. Если же среди точек множества M имеются такие, которые отстоят от x_1 дальше чем на ε, то мы выберем среди них произвольно точку x_2. Если теперь каждая точка множества M отстоит не далее чем на ε или от точки x_1, или от точки x_2, то x_1 и x_2 образуют конечную ε-сеть для M и построение закончено; в противном случае построение можно продолжить. В процессе построения каждая новая точка x_n отстоит от каждой из предшествующих $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ дальше чем на ε. Поэтому, если бы процесс можно было продолжать неограниченно, мы получили бы бесконечное подмножество $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ множества M, заведомо не содержащее ни одной фундаментальной последовательности, что противоречило бы компактности M. Так как M компактно, то процесс закончится после конечного числа шагов; а окончание процесса свидетельствует о построении конечной ε-сети для множества M.

Обратно, пусть в пространстве P имеется при каждом $\varepsilon > 0$ конечная ε-сеть для множества M; покажем, что M компактно. Рассмотрим произвольное бесконечное подмножество $A \subset M$; мы должны выбрать в A фундаментальную последовательность. В качестве первой точки этой последовательности возьмем любую точку $x_0 \in A$. Применяя условие теоремы при $\varepsilon = 1$, мы можем покрыть множество A конечным числом шаров радиуса 1; среди них имеется такой — обозначим его через U_1, — который содержит бесконечное подмножество $A_1 \subset A$. Выберем в A_1 любую точку $x_1 \neq x_0$. Применяя условие теоремы при

$\varepsilon=\frac{1}{2}$, мы можем покрыть множество A_1 конечным числом шаров радиуса $\frac{1}{2}$; среди них есть шар U_2, который содержит бесконечное подмножество $A_2 \subset A_1$. Выберем любую точку $x_2 \in A_2$, не совпадающую ни с x_0, ни с x_1. Продолжая таким же образом далее, мы построим цепочку бесконечных подмножеств $A \supset A_1 \supset \ldots \supset A_\nu \supset \ldots$ (причем каждое из множеств A_ν содержится в шаре U_ν радиуса $\frac{1}{\nu}$) и, кроме того, последовательность различных точек $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$, где $x_\nu \in A_\nu$. Мы утверждаем, что последовательность $x_0, x_1, \ldots$ фундаментальна. Действительно, при $\mu < \nu$ мы имеем $U_\mu \supset A_\mu \supset A_\nu$, поэтому $\rho(x_\mu, x_\nu) < \frac{2}{\mu}$. Эта величина стремится к нулю при $\mu \to \infty$, следовательно, последовательность $x_0, x_1, \ldots$ фундаментальна, что и требовалось.

В качестве применения этого признака покажем, что *любое ограниченное бесконечное множество в n-мерном евклидовом пространстве $P=E_n$ компактно*. Действительно, для любого m в том шаре пространства P, который содержит ограниченное множество M, существует лишь конечное число точек, все координаты которых имеют вид $\frac{k}{2^m}$, k — целое, а множество всех таких точек, очевидно, при достаточно большом m образует ε-сеть для M.

Отметим еще следующий простой признак компактности: *множество M в метрическом пространстве P компактно, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать в P компактное множество B_ε (может быть, и бесконечное), являющееся ε-сетью для M.*

Доказательство этого признака весьма просто. Мы утверждаем, что при заданном ε конечная $\frac{\varepsilon}{2}$*-сеть Z для множества $B_{\frac{\varepsilon}{2}}$* — существующая в силу компактности $B_{\frac{\varepsilon}{2}}$ — есть ε-сеть для множества M. Действительно, для произвольной точки $x \in M$ по условию найдется такая точка $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}$, что $\rho(x, y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, и такая точка $z \in Z$, что $\rho(y, z) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, но тогда $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z) \leqslant \varepsilon$, что и утверждалось. Таким образом, при любом $\varepsilon>0$ множество M обладает конечной ε-сетью и, следовательно, компактно.

В качестве применения этого признака покажем, что *пополнение $\overline{M}$ любого компактного множества M есть компакт*. В самом деле, множество M, поскольку оно плотно в $\overline{M}$, является при любом $\varepsilon>0$ ε-сетью для множества $\overline{M}$. По условию M компактно; отсюда и $\overline{M}$

компактно; а так как $\overline{M}$ полно, то оно есть компакт, что и требовалось.

Теорема 2. *Компактное подмножество M полного метрического пространства P является компактом тогда и только тогда, когда оно замкнуто в P.*

Доказательство. Если подмножество M замкнуто в полном метрическом пространстве P, то оно само является полным метрическим пространством (§ 4, п. 2, пример 3). Если при этом M компактно, то, согласно определению, M есть компакт. Обратно, пусть $M \subset P$ — компакт; тем самым M компактное множество, и нужно показать только, что M замкнуто. Это следует из того же результата § 4 (п. 2, пример 3) и из того, что M как компакт есть полное пространство.

Соединяя теоремы 1 и 2, получаем:

Теорема 3. *Множество M в полном метрическом пространстве P является компактом тогда и только тогда когда, оно замкнуто в P и для каждого $\varepsilon > 0$ в P имеется для M конечная ε-сеть.*

В частности, компактом является любой замкнутый шар в евклидовом n-мерном пространстве. Всякая непрерывная функция, определенная на таком шаре, ограничена и достигает на нем своей точной верхней и нижней грани.

Задачи. **1.** Указать в данном компакте Q счетное всюду плотное множество точек.

Указание. Рассмотреть объединение всех конечных $\frac{1}{m}$-сетей для Q $(m = 1, 2, \ldots)$.

2. Показать, что из любой системы открытых множеств $\{G\}$, покрывающих в совокупности компакт Q, можно выбрать конечную подсистему $G_1, \ldots, G_m$, также покрывающую все Q.

Указание. Если из данного покрытия компакта Q нельзя выбрать конечного покрытия, то нельзя выбрать конечного покрытия и для некоторого шара Q_n — одного из шаров радиуса $\frac{1}{2^n}$, покрывающих в конечном числе компакт Q. Рассмотреть предельную точку множества центров шаров Q_n.

3. Проверить, что убывающая последовательность $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ непустых замкнутых подмножеств компакта имеет непустое пересечение.

Указание. Перейти к дополнениям и использовать задачу 2.

4. Если последовательность непрерывных функций $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$ сходится на компакте Q к непрерывной функции $f(x)$, то она сходится равномерно на этом компакте (теорема Дини).

Указание. При заданном $\varepsilon > 0$ для фиксированной точки x_0 найти номер n_0 так, чтобы иметь $0 \leqslant f(x_0) - f_{n_0}(x_0) \leqslant \varepsilon$. Существует окрестность точки x_0, в которой $0 \leqslant f(x) - f_{n_0}(x) \leqslant 3\varepsilon$, а следовательно, и $0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant 3\varepsilon$ при всех $n \geqslant n_0$. Далее использовать результат задачи 2.

5. Совокупность непрерывных функций $\{f(x)\} = A$ на компакте Q называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\rho(x', x'') < \delta$ следует $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для любой $f \in A$; она называется *равномерно ограниченной*, если существует постоянная C такая, что $|f(x)| < C$ для любой $f \in A$. Показать, что совокупность A компактна в метрике $\rho(f, g) = \max_{x \in Q} |f(x) - g(x)|$ тогда и только тогда, когда она равностепенно непрерывна и равномерно ограничена (*теорема Арцела*).

Указание. Включить A в пространство всех ограниченных (хотя бы и разрывных) функций на Q с метрикой $\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$. Для заданной δ-сети на Q совокупность кусочно-постоянных функций, принимающих в шарах радиуса δ с центрами в точках сети постоянные значения, целые кратные ε, не провосходящие по модулю C, образует конечную 3ε-сеть для A. (Для устранения многозначности в точках, общих нескольким шарам, выбирать из всех возможных значений одно произвольное.)

6. Проверить, что функционал

$$F(y) = \int_0^{1/2} y(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} y(x)\,dx$$

непрерывен в пространстве $C(0, 1)$; показать, что точная верхняя грань его значений в замкнутом единичном шаре пространства $C(0, 1)$ равна 1, но эта верхняя грань не достигается ни на каком элементе единичного шара.

7. Дано метрическое пространство M, которое не есть компакт. Построить непрерывную функцию на M и при этом не ограниченную.

Указание. Каждая точка x_k последовательности $x_1, x_2, \ldots$, из которой нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности, находится на положительном расстоянии r_k от множества всех остальных точек этой последовательности. Всякая функция $f(x)$, непрерывная в каждом из шаров $\left\{\rho(x, x_k) \leqslant \frac{1}{2} r_k\right\}$, равная нулю на их границах и вне всех этих шаров, непрерывна на M.

8. Дано отображение компакта в себя, удовлетворяющее условию $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ при $x \neq y$. Показать, что у этого отображения существует единственная неподвижная точка.

Указание. Минимум непрерывной функции $\rho(x, Ax)$ не может быть положительным.

9. Доказать, что компакт нельзя отобразить изометрично на свою часть (В. А. Рохлин).

Указание. Допуская противное, можно указать точку, которая находится от образа компакта на положительном расстоянии r_0. Повторяя отображение, построить последовательность, все точки которой находятся друг от друга на расстоянии, не меньшем чем r_0.

10. Построить на плоскости компактное множество, изометричное своей части.

Указание. Рассмотреть множество точек с полярными координатами $\rho = 1$, $\varphi = 0, 1, 2, \ldots$

11. Пусть A и B — два изометрических отображения компакта Q на себя. Определим расстояние между отображениями A и B по формуле

$$\rho(A, B) = \max_{x \in Q} \rho(Ax, Bx). \tag{1}$$

Показать, что совокупность всех изометрических отображений компакта Q на себя, метризованная по формуле (1), есть компакт (Б. Л. Ван-дер-Варден).

Указание. Для заданной конечной ε-сети на компакте Q, замечая, что существует лишь конечное число отображений конечного множества на себя, построить конечную 2ε-сеть в пространстве изометрических отображений.

4. Функции нескольких переменных. Нам будут встречаться иногда непрерывные функции нескольких аргументов, меняющихся в метрическом пространстве M. Рассмотрим для определенности функцию пары точек y, z. Числовая функция $f(y, z)$, аргументы которой принадлежат метрическому пространству M, называется непрерывной на паре $y=y_0$, $z=z_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из неравенств

$$\rho(y, y_0)<\delta, \quad \rho(z, z_0)<\delta$$

следует

$$|f(y, z)-f(y_0, z_0)|<\varepsilon.$$

Функция, непрерывная на любой паре y_0, z_0, называется непрерывной всюду.

Примером непрерывной функции пары точек y, z служит их расстояние $\rho(y, z)$. Действительно, в силу неравенства четырехугольника (§ 1, п. 2)

$$|\rho(y, z)-\rho(y_0, z_0)|\leqslant\rho(y, y_0)+\rho(z, z_0),$$

что может быть сделано меньше заданного $\varepsilon>0$ при

$$\rho(y, y_0)<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(z, z_0)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для функций нескольких переменных нет необходимости повторять всю теорию, изложенную в пп. 1—2. В действительности всякая функция нескольких переменных, меняющихся в метрическом пространстве M, может быть представлена как функция одного переменного, меняющегося в некотором новом метрическом пространстве M'. Для простоты рассмотрим случай двух переменных. Введем для этого определение *произведения* метрических пространств.

Пусть заданы метрические пространства M и N. Рассмотрим множество всевозможных формальных пар $\{x, y\}$, где $x\in M$, $y\in N$, и определим расстояние между такими парами по формуле

$$\rho(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\})=\rho(x_1, x_2)+\rho(y_1, y_2),$$

причём $\rho(x_1, x_2)$ и $\rho(y_1, y_2)$ означают расстояние соответственно в пространствах M и N.

Легко проверить, что введенное по этому правилу расстояние удовлетворяет аксиомам § 1. Множество всех пар $\{x, y\}$ с расстоянием по формуле (1) и называется *произведением метрических пространств* M и N; оно обозначается $M\times N$.

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, первый аргумент которой пробегает пространство M, а второй — пространство N. Ясно, что ее можно считать функцией одного аргумента, пробегающего пространство $M\times N$. В частности, функцию $f(x, y)$, аргументы которой пробегают одно и то же пространство M, можно считать функцией одного аргумента, пробегающего пространство $M\times M$. Если $f(x, y)$ — непрерывная функция аргументов x, y в том смысле, который был указан выше, то, очевидно, соответствующая функция на пространстве $M\times M$ будет непрерывна в обычном смысле (п. 1). Таким образом, теория непрерывных функций двух переменных приводится к теории непрерывных функций одного переменного.

Задачи. 1. Пусть пространства M и N компактны; показать, что произведение $M \times N$ также компактно.

2. Пусть пространства M и N полны; показать, что произведение $M \times N$ также полно.

3. Привести пример, где пространство M компактно, пространство N полно, а произведение $M \times N$ не является ни компактным, ни полным.

4. Если метрические пространства M и N оба бесконечны, то существует функция $f(x, y)$, непрерывная по каждому из аргументов в отдельности (при фиксированном другом аргументе), но не непрерывная на произведении $M \times N$.

§ 8. Линейные нормированные пространства

1. Линейные пространства. В анализе операция предельного перехода чаще всего встречается в комбинации с другими операциями, среди которых наиболее распространены линейные операции — сложение элементов и умножение на число. Сами эти операции изучаются в линейной алгебре. Напомним связанное с этими операциями основное определение — определение линейного пространства [1]):

Линейным пространством называется совокупность E элементов $x, y, \ldots$, для которых установлены операции сложения и умножения на число (вещественное или комплексное) так, что выполняются следующие ниже аксиомы 1—8.

Первая группа аксиом (1—4) описывает свойства сложения:

1. $x+y=y+x$ (*коммутативность сложения*).
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (*ассоциативность сложения*).
3. *Существует элемент* 0 *такой, что* $x+0=x$ *для любого* $x \in E$.
4. *Для каждого* $x \in E$ *уравнение* $x+y=0$ *разрешимо*. Элемент y называется *противоположным* элементу x.

Легко проверить, что элементы 0 и y, существование которых требуется в аксиомах 3 и 4, определяются единственным образом.

Следующая группа аксиом (5—8) связывает операции сложения и умножения на число. При этом через $\mathscr{E}$ обозначена та совокупность чисел (вещественных или комплексных), на которой допускается операция умножения.

5. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x \qquad (\lambda \in \mathscr{E},\ \mu \in \mathscr{E},\ x \in E)$.
6. $1 \cdot x = x$.
7. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.
8. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

Можно показать, что $0 \cdot x=0$ и что противоположный данному x элемент y получается путем умножения x на -1.

---

[1]) Подробное изложение можно найти, например, в книге: Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, Гостехиздат, 1956 (2 изд.), гл. II и далее.