Задачи. 1. Пусть пространства M и N компактны; показать, что произведение $M\times N$ также компактно.

2. Пусть пространства M и N полны; показать, что произведение $M\times N$ также полно.

3. Привести пример, где пространство M компактно, пространство N полно, а произведение $M\times N$ не является ни компактным, ни полным.

4. Если метрические пространства M и N оба бесконечны, то существует функция $f(x, y)$, непрерывная по каждому из аргументов в отдельности (при фиксированном другом аргументе), но не непрерывная на произведении $M\times N$.

§ 8. Линейные нормированные пространства

1. Линейные пространства. В анализе операция предельного перехода чаще всего встречается в комбинации с другими операциями, среди которых наиболее распространены линейные операции — сложение элементов и умножение на число. Сами эти операции изучаются в линейной алгебре. Напомним связанное с этими операциями основное определение — определение линейного пространства[1]):

Линейным пространством называется совокупность E элементов $x, y, \ldots$, для которых установлены операции сложения и умножения на число (вещественное или комплексное) так, что выполняются следующие ниже аксиомы 1—8.

Первая группа аксиом (1—4) описывает свойства сложения:

1. $x+y=y+x$ (*коммутативность сложения*).
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (*ассоциативность сложения*).
3. *Существует элемент* 0 *такой, что* $x+0=x$ *для любого* $x\in E$.
4. *Для каждого* $x\in E$ *уравнение* $x+y=0$ *разрешимо*. Элемент y называется *противоположным* элементу x.

Легко проверить, что элементы 0 и y, существование которых требуется в аксиомах 3 и 4, определяются единственным образом.

Следующая группа аксиом (5—8) связывает операции сложения и умножения на число. При этом через $\mathscr{E}$ обозначена та совокупность чисел (вещественных или комплексных), на которой допускается операция умножения.

5. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x \qquad (\lambda\in\mathscr{E},\ \mu\in\mathscr{E},\ x\in E)$.
6. $1\cdot x=x$.
7. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.
8. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

Можно показать, что $0\cdot x=0$ и что противоположный данному x элемент y получается путем умножения x на -1.

---

[1]) Подробное изложение можно найти, например, в книге: Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, Гостехиздат, 1956 (2 изд.), гл. II и далее.

Совокупность L элементов линейного пространства E называется *подпространством* в E, если операции сложения элементов L и умножения их на числа приводят всегда к элементам из L. Наименьшее подпространство состоит из одного элемента 0, наибольшее совпадает со всем E.

Примером линейного пространства является совокупность R_n комплексов из n чисел

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

с операциями «по координатам»: если

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \ldots, \eta_n),$$

то по определению

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n),$$
$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n).$$

Это пространство, как говорят, *n-мерно*, т. е. между всякими $n+1$ элементами $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ существует зависимость

$$C_1 x^{(1)} + \ldots + C_{n+1} x^{(n+1)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} C_j^2 > 0$$

и имеются n элементов $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$, между которыми такой зависимости не существует.

Функциональные пространства $C(a, b)$, $D_n(a, b)$, $C_p(a, b)$ (§ 1) также являются линейными пространствами (с естественными операциями). В отличие от R_n эти пространства уже бесконечномерны.

Напомним далее важное понятие изоморфизма между линейными пространствами. Два линейных пространства E' и E'' называются *изоморфными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие с сохранением операций сложения и умножения на числа; последнее означает, что если вектору $x' \in E'$ соответствует вектор $x'' \in E''$, а вектору $y' \in E'$ соответствует вектор $y'' \in E''$, то вектору $x' + y' \in E'$ соответствует вектор $x'' + y'' \in E''$ и при любом $\lambda \in \mathscr{C}$ вектору $\lambda x' \in E'$ соответствует вектор $\lambda x'' \in E''$.

Так, изоморфны любые два n-мерных пространства; каждое из них изоморфно координатному n-мерному пространству, описанному выше.

2. Линейные нормированные пространства. Свойства линейного пространства сочетаются с метрическими свойствами, о которых мы говорили на протяжении этой главы, в определении линейного нормированного пространства (пространства Банаха):

Линейным нормированным пространством называется множество E элементов $x, y, \ldots$, которое:

1) является линейным пространством;

2) является метрическим пространством

и в котором

3) расстояния $\rho(x, y)$ и линейные операции связаны следующими условиями:

а) расстояние не меняется при сдвиге, т. е.

$$\rho(x+z, y+z)=\rho(x, y) \text{ при любых } x, y, z;$$

б) расстояния подчинены «условию однородности»:

$$\rho(\lambda x, 0)=|\lambda|\rho(x, 0)$$

для любого числа λ и любого элемента x.

Из аксиомы а) вытекает, что расстояние между двумя точками равно расстоянию их разности до нуля:

$$\rho(x, y)=\rho(x-y, y-y)=\rho(x-y, 0).$$

Поэтому достаточно знать расстояния от любого элемента до нуля. Расстояние $\rho(x, 0)$ называют *нормой* (или длиной) элемента x и обозначают $\|x\|$ или $|x|$. Из аксиом метрики и свойств 3) легко вывести, что норма любого элемента удовлетворяет условиям:

(α) $\|x\|>0$ при $x\neq 0$, $\|0\|=0$;

(β) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$;

(γ) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

Обратно, если в некотором линейном пространстве E введена норма, т. е. каждому элементу x сопоставлено число $\|x\|$ так, что выполнены условия (α) — (γ), то в пространстве E может быть введена метрика по формуле

$$\rho(x, y)=\|x-y\|$$

и пространство E становится линейным нормированным пространством. Обычно линейное пространство с нормой, удовлетворяющей условиям (α) — (γ), и называют *линейным нормированным пространством.*

Рассмотренные в § 1 этой главы метрические пространства $C(a, b)$, $D_m(a, b)$, $C_p(a, b)$ $(p=1, 2)$ являются линейными нормированными пространствами.

Действительно, в пространстве $C(a, b)$ непрерывных функций на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ расстояние вводилось по формуле

$$\rho(y, z)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y(x)-z(x)|.$$

Очевидно, что аксиома 3) здесь выполнена. Норма элемента y определяется по формуле

$$\|y\|=\rho(y, 0)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y(x)|.$$

В пространстве $D_m(a, b)$ функций с непрерывными производными до порядка m на отрезке $[a, b]$ расстояние вводилось по формуле

$$\rho(y, z) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{|y(x) - z(x)|, \ \ldots, \ |y^{(m)}(x) - z^{(m)}(x)|\}.$$

Легко видеть, что и здесь выполнены оба свойства, требуемые аксиомой 3). Норма элемента y определяется по формуле

$$\|y\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{|y(x)|, \ |y'(x)|, \ \ldots, \ |y^{(m)}(x)|\}.$$

В пространстве $C_p(a, b)\,(p = 1,\ 2)$ непрерывных функций на $[a, b]$ с расстоянием по формуле

$$\rho^p(y, z) = \int_a^b |y(x) - z(x)|^p\, dx$$

также выполнены оба требования аксиомы 3) (второе именно потому, что слева стоит ρ^p, а не ρ). Норма элемента y определяется по формуле

$$\|y\|^p = \int_a^b |y(x)|^p\, dx.$$

Множество, выделенное неравенством

$$\|x\| \leqslant 1,$$

есть шар радиуса 1 с центром в нуле пространства. Его называют *единичным шаром* пространства E.

Единичный шар (как и любой шар линейного нормированного пространства) *является выпуклым множеством*. Вообще множество M в линейном пространстве E называют выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками x, y содержит все точки

$$z = \alpha x + \beta y, \qquad \alpha + \beta = 1, \qquad \alpha \geqslant 0, \qquad \beta \geqslant 0,$$

или, геометрически выражаясь, содержит отрезок, концами которого являются точки x и y. Выпуклость единичного шара следует непосредственно из аксиомы треугольника: если $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, то

$$\|z\| = \|\alpha x + \beta y\| \leqslant \alpha\|x\| + \beta\|y\| \leqslant \alpha + \beta = 1.$$

Отметим некоторые общие свойства линейных нормированных пространств, связанные с понятием сходимости. Так как расстояние от точки x до точки y определяется как $\|x - y\|$, то факт сходимости последовательности x_n к элементу x записывается соотношением

$$\lim_{n \to \infty} \|x - x_n\| = 0.$$

Если $x_n \to x$, $y_n \to y$, *то* $x_n + y_n \to x + y$; действительно,

$$\|x + y - (x_n + y_n)\| = \|(x - x_n) + (y - y_n)\| \leqslant \\ \leqslant \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \to 0.$$

Если $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, *то* $\lambda_n x_n \to \lambda x$; действительно,

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n (x_n - x) + (\lambda_n - \lambda) x\| \leqslant \\ \leqslant |\lambda_n| \, \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|x\| \to 0.$$

В заключение скажем несколько слов о линейной изометрии линейных нормированных пространств. Два изоморфных линейных пространства могут иметь различные нормировки; таковы, например, $C(a, b)$ и $C_p(a, b)$. Если линейные нормированные пространства как линейные пространства изоморфны и как метрические пространства изометричны, они называются *линейно изометричными*. Например, линейно изометричны пространства $C(0, 1)$ и $C(0, 2)$, $C_p(0, 1)$ и $C_p(0, 2)$. Нужное взаимно однозначное соответствие может быть задано формулами:

$$C(0, 1) \ni \varphi(x) \longleftrightarrow \varphi(2x) \in C(0, 2); \; C_p(0, 1) \ni \varphi(x) \longleftrightarrow 2^{\frac{1}{p}} \varphi(2x) \in C_p(0, 2).$$

Впрочем, вместо точного термина «линейная изометрия» часто употребляют менее точный, но короткий — «изоморфизм».

3. Пополнение линейного нормированного пространства. Как и любое метрическое пространство, линейное нормированное пространство E может быть полным или неполным. В последнем случае пространство E можно пополнить, включив в более широкое полное метрическое пространство $\overline{E}$, как мы это делали в § 7. Полезно отметить, что пополнение линейного нормированного пространства является не только метрическим, но и линейным нормированным пространством. Для этого мы должны ввести в пополнение линейные операции и проверить выполнение аксиом 1) и 3).

Каждый элемент X пополнения метрического пространства E у нас был определен как символ, соответствующий классу конфинальных фундаментальных последовательностей пространства E.

Предположим теперь, что E — линейное нормированное пространство. Тогда, складывая две фундаментальные последовательности $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ почленно, мы получим последовательность

$$x_1 + y_1, \; x_2 + y_2, \; \ldots, \; x_n + y_n, \; \ldots,$$

которая также фундаментальна, поскольку

$$\|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|.$$

При этом, заменяя последовательность $\{x_n\}$ на конфинальную $\{x_n''\}$ и последовательность $\{y_n\}$ на конфинальную $\{y'_n\}$, мы придем к последовательности сумм $\{x'_n+y'_n\}$, конфинальной с построенной $\{x_n+y_n\}$, поскольку

$$\|(x'_n+y'_n)-(x_n+y_n)\| \leqslant \|x'_n-x_n\|+\|y'_n-y_n\|.$$

Этот факт позволяет следующим образом ввести линейные операции над элементами пространства $\bar{E}$.

Выберем в классе X фундаментальную последовательность $\{x_n\}$ и в классе Y фундаментальную последовательность $\{y_n\}$; будем считать суммой X и Y тот класс, который содержит фундаментальную последовательность $\{x_n+y_n\}$.

Предыдущие рассуждения подтверждают корректность этого определения и, в частности, независимость результата от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в соответствующих классах.

Аналогично произведение класса X на число λ определяется так: выбирают фундаментальную последовательность $\{x_n\}$ в классе X и под классом λX понимают тот класс, который содержит фундаментальную последовательность $\{\lambda x_n\}$. Мы предоставляем читателю обосновать корректность этого определения.

Легко проверить, что аксиомы линейного пространства 1—8 здесь выполняются; в силу самого определения линейные операции над классами сводятся к соответствующим операциям над элементами исходного пространства. В частности, класс 0 состоит из всех последовательностей пространства E, сходящихся к нулю.

Нам остается проверить еще выполнение аксиомы 3 линейного нормированного пространства. Расстояние между классами X и Y определяется по формуле (1) § 7:

$$\rho(X, Y)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n),$$

где $\{x_n\}$ — любая фундаментальная последовательность из класса X, а $\{y_n\}$ — любая фундаментальная последовательность из класса Y. В частности, фиксируя в классах X, Y, Z фундаментальные последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, мы имеем:

$$\rho(X+Z, Y+Z)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n+z_n, y_n+z_n)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=\rho(X, Y),$$

так что аксиома 3а) выполнена. Аналогично

$$\rho(\lambda X, 0)=\lim_{n\to\infty}\rho(\lambda x_n, 0)=|\lambda|\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, 0)=|\lambda|\rho(X, 0),$$

так что выполнена и аксиома 3б). Тем самым наше утверждение полностью доказано.

4. Фактор-пространство. Пусть L — подпространство линейного пространства R (пока без метрики). Назовем элементы x и y *эквивалентными относительно* L, если их разность $x-y$ принадлежит L. Если два элемента x и y порознь эквивалентны третьему элементу z, то они эквивалентны и друг другу; действительно,

$$x-y=(x-z)-(y-z)\in L.$$

Поэтому все пространство R можно разбить на классы взаимно эквивалентных элементов так, что два элемента x и y попадают в один и тот же класс тогда и только тогда, когда они эквивалентны. Подпространство L само образует один из классов; класс, содержащий элемент x_0, есть совокупность всех сумм x_0+l, где l пробегает все L. Будем обозначать классы эквивалентных элементов $X, Y, \ldots$

Покажем, что в совокупности всех классов $X, Y, \ldots$ могут быть введены линейные операции. Определим сумму двух классов X и Y. Для этого возьмем в классе X произвольный элемент x и в классе Y произвольный элемент y; сумма $z=x+y$ лежит в некотором классе Z, который мы по определению будем считать суммой классов X и Y. Это определение выделяет класс Z по классам X и Y однозначно: если заменить x эквивалентным элементом $x=x+l$, $l\in L$, и элемент y эквивалентным элементом $y=y+l'$, $l'\in L$, то сумма $x+y$ заменяется элементом $x'+y'=(x+y)+(l+l')$, эквивалентным $x+y$. Аналогично определяется произведение класса X на число α: класс αX состоит из всех элементов, эквивалентных элементу αx, где x — любой фиксированный элемент класса X. Все аксиомы 1—8 линейного пространства (п. 1) выполняются здесь автоматически, приводясь к соответствующим аксиомам для самих элементов R. В частности, нулем пространства классов служит класс L.

Линейное пространство из классов, которое мы построили, называется *фактор-пространством* пространства R по его подпространству L и обозначается R/L.

Пусть теперь R — линейное нормированное пространство и L — его замкнутое подпространство. Тогда можно ввести норму и в фактор-пространство R/L. Именно, мы положим

$$\|X\|=\inf_{x\in X}\|x\|.$$

Проверим выполнение аксиом нормы.

а) Очевидно, что $\|L\|=0$, поскольку $0\in L$. Покажем, что $\|X\|>0$, если $X\neq L$. Если $\|X\|=0$, то в классе X имеется последовательность x_n, для которой $\|x_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Пусть x — любой элемент класса X. Мы имеем $x-x_n=l_n\in L$. Но

$x - x_n \to x$, а L замкнуто; поэтому $x \in L$, $X = L$, что противоречит условию.

б) $\|\lambda X\| = \inf\limits_{z \in \lambda X} \|z\| = \inf\limits_{x \in X} \|\lambda x\| = |\lambda| \inf\limits_{x \in X} \|x\| = |\lambda| \, \|X\|$.

в) $\|X + Y\| = \inf\limits_{z \in X+Y} \|z\| \leqslant \inf\limits_{x \in X, y \in Y} \|x + y\| \leqslant \inf\limits_{x \in X, y \in Y} \{\|x\| + \|y\|\} =$
$= \inf\limits_{x \in X} \|x\| + \inf\limits_{y \in Y} \|y\| = \|X\| + \|Y\|$.

Итак, в рассматриваемом случае R/L — линейное нормированное пространство.

Предположим далее, что R — полное пространство. В этом случае *пространство* R/L *также полное пространство*. Для доказательства рассмотрим фундаментальную последовательность классов $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ Для заданного k найдем номер n_k так, чтобы при любом $m = 1, 2, \ldots$ иметь $\|X_{n_k+m} - X_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$; в частности, $\|X_{n_k+1} - X_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$. Выберем в классе X_{n_1} произвольный элемент x_1; далее, поскольку класс $X_{n_2} - X_{n_1}$ состоит из всевозможных разностей $x - x_1$, где x пробегает класс X_{n_2}, мы найдем элемент $x_2 \in X_{n_2}$ так, чтобы иметь $\|x_2 - x_1\| < 1$; далее таким же путем найдем элемент $x_3 \in X_{n_3}$ так, чтобы иметь $\|x_3 - x_2\| < \frac{1}{2}$, и т. д.; элемент x_{k+1} принадлежит классу $X_{n_{k+1}}$ и $\|x_{k+1} - x_k\| < \frac{1}{2^{k-1}}$. Последовательность x_k, очевидно, фундаментальна и в силу полноты R сходится к некоторому элементу x. Пусть X — класс, содержащий элемент x; мы имеем

$$\|X - X_{n_k}\| \leqslant \|x - x_k\| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Таким образом, последовательность классов X_{n_k} сходится к классу X. Но тогда и вся последовательность X_n, поскольку она фундаментальна, сходится к классу X, что и требовалось.

Примеры. *1.* Пусть имеется линейное пространство E, в которое введена *полунорма*. Это означает, что каждому элементу $x \in E$ сопоставлено число $\|x\|$ так, что удовлетворяются аксиомы нормы (β) и (γ) (т. е. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ и $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$), но аксиома (α) не выполнена, так что имеются элементы $x \neq 0$, для которых $\|x\| = 0$. Покажем, как можно «исправить» пространство E — перейти от E к новому пространству, естественно связанному с E, в котором выполнены все три аксиомы (α), (β), (γ). Именно, совокупность *всех* элементов x с $\|x\| = 0$ в силу (β) и (γ) образует подпространство $Z \in E$. Образуем фактор-пространство R/Z; элементами его, как мы знаем, служат классы элементов, эквивалентные относительно Z. Все элементы одного класса X имеют одну и ту же полунорму, поскольку

$$\|x+l\| \leqslant \|x\|+\|l\|=\|x\|,$$
$$\|x\| \leqslant \|x+l-l\| \leqslant \|x+l\|+\|l\|=\|x+l\|.$$

Определим норму класса X как общее значение полунорм всех элементов класса X. Аксиомы (β) и (γ) здесь выполняются по построению, поскольку они выполнены для элементов x. Аксиома (α) также выполнена: норма класса L равна нулю, и если $\|X\|=0$, то все элементы $x \in X$ имеют норму 0, так что X совпадает с Z. Таким образом, образуя фактор-пространство E по подпространству Z элементов с нулевой полунормой, мы получаем «настоящее» линейное нормированное пространство E/Z.

2. Пополнение линейного нормированного пространства E (п. 3) можно интерпретировать как построение фактор-пространства пространства R всех фундаментальных последовательностей из элементов пространства E по подпространству Z последовательностей, сходящихся к нулю.

Именно, пространство R обладает полунормой

$$\|\{x_n\}\|=\lim \|x_n\|.$$

Элементы с нулевой полунормой соответствуют последовательностям, сходящимся к нулю. Классы взаимно-эквивалентных элементов — это классы конфинальных фундаментальных последовательностей, и R/Z есть совокупность всех этих классов, нормированная как раз по правилу, указанному в примере 1.

Задачи. 1. Доказать, что аксиому треугольника в определении линейного нормированного пространства можно заменить условием выпуклости единичного шара.

2. На плоскости взято произвольное центрально-симметричное замкнутое выпуклое множество Q, у которого начало координат является внутренней точкой. Доказать, что существует норма, в которой Q является единичным шаром.

3. Пусть R — n-мерное нормированное пространство. Доказать, что последовательность $x_m=(\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$ $(m=1, 2, \ldots)$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда каждая из координат $\xi_j^{(m)}$ при $m \to \infty$ стремится к нулю.

Указание. Так как $\|x\| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |\xi_j| \|e_j\|$, то из сходимости по координатам следует сходимость по норме. Для доказательства обратного достаточно рассмотреть шар $|x| \leqslant 1$ и показать, что координаты всех его точек ограничены фиксированной постоянной. Но если для некоторой последовательности x_m, $\|x_m\| \leqslant 1$, мы имеем $\max_j |\xi_j^{(m)}|=c_m \to \infty$, то $y_m=\frac{x_m}{c_m} \to 0$. В то же время среди координат каждого из векторов y_m имеется хотя бы одна, равная по модулю 1. Из последовательности y_m можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся по всем координатам, а следовательно и по норме, к некоторому вектору $y_0 \neq 0$, что противоречит данному соотношению $y_m \to 0$.

4. Доказать, что конечномерное подпространство нормированного пространства R всегда замкнуто в R.

Указание. Использовать задачу 3.

5. Пусть L — замкнутое подпространство нормированного пространства R, отличное от всего R. Доказать, что в единичном шаре пространства R имеется вектор y, отстоящий более чем на $\frac{1}{2}$ от всех векторов подпространства L.

Указание. Пусть $y_0 \in R - L$ и $d = \inf\limits_{x \in L} |y_0 - x|$; пусть, далее, найден $y_1 \in L$ такой, что $|y_0 - y_1| < 2d$. Тогда вектор $y = \frac{y_0 - y_1}{|y_0 - y_1|}$ удовлетворяет условию.

6. Постоянную $\frac{1}{2}$ в задаче 5 можно заменить любой постоянной, меньшей 1. Но заменить $\frac{1}{2}$ на 1, вообще говоря, нельзя. Для примера рассмотреть в пространстве $C(-1,1)$ подпространство L, состоящее из функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int_{-1}^{0} \varphi(x)\, dx = \int_{0}^{1} \varphi(x)\, dx.$$

7. В бесконечномерном линейном нормированном пространстве всегда существует ограниченное бесконечное множество, элементы которого имеют взаимные расстояния $> \frac{1}{2}$ (Ф. Рисс).

Указание. Использовать задачу 5.

Примечание. Результат этой задачи в соединении с результатами § 7 показывает, что условие компактности ограниченных множеств является необходимым и достаточным условием конечномерности нормированного пространства.

8. В полном линейном нормированном пространстве E имеется замкнутое множество F, содержащее на каждом луче tx_0, $0 \leqslant t < \infty$, некоторый отрезок $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(x_0)$. Доказать, что F содержит шар. (И. М. Гельфанд.)

Указание. $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} nF$; использовать задачу 2 к § 4, п. 5.

9 (Продолжение). Если замкнутое множество F в задаче 8 центрально симметрично и выпукло, то оно содержит шар с центром в точке 0.

Примечание. Без условия выпуклости теорема неверна даже на плоскости.

§ 9. Линейные и квадратичные функции в линейном пространстве

Среди функций, определенных на линейных нормированных пространствах, наиболее простыми являются линейные функции.

Определение линейной функции можно построить в любом линейном пространстве, без всякой метрики, именно: функция $f(x)$, определенная на линейном пространстве E, называется *линейной* (*линейным функционалом*), если она удовлетворяет условиям:

1° $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых x, y из E;

2° $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для любого $x \in E$ и любого числа λ.

Найдем для примера общий вид линейного функционала в n-мерном пространстве E. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ есть базис в пространстве E;