4. Доказать, что конечномерное подпространство нормированного пространства R всегда замкнуто в R.

Указание. Использовать задачу 3.

5. Пусть L — замкнутое подпространство нормированного пространства R, отличное от всего R. Доказать, что в единичном шаре пространства R имеется вектор y, отстоящий более чем на $\frac{1}{2}$ от всех векторов подпространства L.

Указание. Пусть $y_0 \in R - L$ и $d = \inf\limits_{x \in L} |y_0 - x|$; пусть, далее, найден $y_1 \in L$ такой, что $|y_0 - y_1| < 2d$. Тогда вектор $y = \frac{y_0 - y_1}{|y_0 - y_1|}$ удовлетворяет условию.

6. Постоянную $\frac{1}{2}$ в задаче 5 можно заменить любой постоянной, меньшей 1. Но заменить $\frac{1}{2}$ на 1, вообще говоря, нельзя. Для примера рассмотреть в пространстве $C(-1,1)$ подпространство L, состоящее из функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int_{-1}^{0} \varphi(x)\, dx = \int_{0}^{1} \varphi(x)\, dx.$$

7. В бесконечномерном линейном нормированном пространстве всегда существует ограниченное бесконечное множество, элементы которого имеют взаимные расстояния $> \frac{1}{2}$ (Ф. Рисс).

Указание. Использовать задачу 5.

Примечание. Результат этой задачи в соединении с результатами § 7 показывает, что условие компактности ограниченных множеств является необходимым и достаточным условием конечномерности нормированного пространства.

8. В полном линейном нормированном пространстве E имеется замкнутое множество F, содержащее на каждом луче tx_0, $0 \leqslant t < \infty$, некоторый отрезок $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(x_0)$. Доказать, что F содержит шар. (И. М. Гельфанд.)

Указание. $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} nF$; использовать задачу 2 к § 4, п. 5.

9 (Продолжение). Если замкнутое множество F в задаче 8 центрально симметрично и выпукло, то оно содержит шар с центром в точке 0.

Примечание. Без условия выпуклости теорема неверна даже на плоскости.

§ 9. Линейные и квадратичные функции в линейном пространстве

Среди функций, определенных на линейных нормированных пространствах, наиболее простыми являются линейные функции.

Определение линейной функции можно построить в любом линейном пространстве, без всякой метрики, именно: функция $f(x)$, определенная на линейном пространстве E, называется *линейной* (*линейным функционалом*), если она удовлетворяет условиям:

1° $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых x, y из E;

2° $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для любого $x \in E$ и любого числа λ.

Найдем для примера общий вид линейного функционала в n-мерном пространстве E. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ есть базис в пространстве E;

положим для данного линейного функционала $f(x)$

$$f(e_1)=\alpha_1, \ldots, f(e_n)=\alpha_n.$$

Тогда для любого вектора $x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j \in E$ будем иметь:

$$f(x)=f\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j f(e_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\xi_j.$$

Таким образом, всякий линейный функционал в n-мерном пространстве записывается в любом базисе как *линейная функция от координат вектора* x.

Задачи. 1. Если $f(x)$ есть линейный функционал в линейном пространстве E, то уравнением $f(x)=0$ в пространстве E выделяется подпространство E_1. Показать, что фактор-пространство E/E_1 (п. 4 § 8) одномерно.

Указание. Класс X элементов, эквивалентных относительно E_1, есть совокупность элементов, на которых $f(x)$ сохраняет постоянное значение. Отображение $x \to f(x)$ определяет изоморфизм между пространством E/E_1 и одномерным пространством.

2. Линейные функционалы $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ называются линейно независимыми, если из $C_1 f_1(x)+\ldots+C_n f_n(x)\equiv 0$ следует $C_1=\ldots=C_n=0$. Пусть E_n — подпространство пространства E, выделяемое системой уравнений $f_1(x)=0, \ldots, f_n(x)=0$. Показать, что фактор-пространство E/E_n n-мерно, если $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы.

Указание. На каждом классе X элементов, эквивалентных относительно E_n, функционалы $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ сохраняют постоянные значения. Отображение $x \to \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ пространства E в n-мерное пространство R_n определяет изоморфизм фактор-пространства E/E_n с некоторым подпространством $R' \subset R_n$, имеющим, например, k измерений. Если бы мы имели $k<n$, то существовала бы линейная зависимость $C_1 f_1(x)+\ldots+C_n f_n(x)\equiv 0$; таким образом, $k=n$, $R'=R_n$.

3. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — линейно независимые функционалы в линейном пространстве E и E_n — подпространство, фигурирующее в задаче 2. Показать, что всякий линейный функционал g, обращающийся в нуль на E_n, есть линейная комбинация функционалов $f_1, \ldots, f_n$, так что $g=\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_n f_n$.

Указание. Можно однозначно определить g на классах элементов, эквивалентных относительно E_n, и тем самым определить g на пространстве E/E_n. Использовать далее общий вид линейного функционала в конечномерном пространстве.

4. Для всяких n линейно независимых функционалов $f_1, \ldots, f_n$ найти n элементов $x_1, \ldots, x_n$ так, чтобы иметь $\det \| f_j(x_k) \| \neq 0$.

Указание. Искомые элементы выбрать произвольно по одному в каждом из n линейно независимых классов n-мерного пространства E/E_n (задача 2).

Заметим, что линейная функция от координат вектора x n-мерного пространства E, очевидно, есть непрерывная функция от x в смысле § 7. Поэтому линейный функционал в конечномерном пространстве всегда есть непрерывная функция.

В бесконечномерных пространствах бывают линейные функционалы как непрерывные, так и не непрерывные. Мы ограничимся рассмотрением только класса непрерывных линейных функционалов.

Укажем два важных примера линейных непрерывных функционалов в пространстве $C(a, b)$ всех непрерывных функций $y(x)$ на отрезке $[a, b]$:

а) $F(y)=y(x_0)$; это значит, что функционал F ставит в соответствие каждой точке пространства $C(a, b)$, т. е. непрерывной функции $y(x)$, значение этой функции в фиксированной точке x_0 отрезка $[a, b]$.

б) $F(y)=\int\limits_a^b f(\xi)\,y(\xi)\,d\xi$, где $f(\xi)$—фиксированная непрерывная функция от ξ.

Мы предоставляем читателю проверку требуемых свойств непрерывности и линейности этих функционалов.

Заметим, что линейный функционал $F(y)=y(x)_0$ в пространстве $C_p(a, b)$ уже не является непрерывным[1]).

Приведем теперь некоторые общие свойства линейных непрерывных функционалов в нормированном пространстве.

Лемма 1. *Линейный функционал $f(x)$, непрерывный в точке $x=0$, ограничен (по модулю) в любом шаре $\|x\|\leqslant r$.*

Действительно, из непрерывности функционала $f(x)$ в точке $x=0$ следует, что существует шар $U=\{x\colon\ \|x\|\leqslant\delta\}$, в котором значения функционала $f(x)$ ограничены заданным числом ε. Если теперь $\|x\|\leqslant r$, то $\frac{\delta}{r}x\in U$, поэтому

$$\left|f\left(\frac{\delta}{r}\,x\right)\right|\leqslant\varepsilon.$$

Но так как функционал $f(x)$ линеен, то $f\left(\frac{\delta}{r}\,x\right)=\frac{\delta}{r}f(x)$ и, следовательно, при $\|x\|\leqslant r$

$$|f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon r}{\delta},$$

что и требовалось.

Лемма 2. *Если некоторый линейный функционал $f(x)$ ограничен в единичном шаре $\|x\|\leqslant 1$, так что, например, $|f(x)|\leqslant K$ в этом шаре, то функционал $f(x)$ при любом x удовлетворяет неравенству*

$$|f(x)|\leqslant K\|x\|$$

и непрерывен на всем пространстве E.

Действительно, для любого x отношение $\frac{x}{\|x\|}$ лежит в единичном шаре; поэтому по условию

$$f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)=\frac{1}{\|x\|}\,|f(x)|\leqslant K,\qquad |f(x)|\leqslant K\|x\|,$$

---

[1]) В данном примере функционал $F(y)$ определен в неполном пространстве. Пример с полным пространством см. в Дополнении в конце книги.

чем доказано первое утверждение леммы. Второе утверждение следует из неравенства

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x-x_0)|\leqslant K|x-x_0|.$$

Как следствие из лемм 1 и 2 получаем, что для линейного функционала *из непрерывности в одной точке* $x=0$ *следует непрерывность всюду.*

Точная верхняя граница значений $|f(x)|$ в единичном шаре называется *нормой функционала* f и обозначается через $\|f\|$. В силу леммы 2 для любого $x\in E$ справедливо неравенство

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|.$$

Задача. Линейный функционал $f(x)$ ограничен в шаре $\|x-x_0\|\leqslant r$. Доказать, что он непрерывен во всем пространстве E.

Часто приходится иметь дело с линейными функциями от нескольких аргументов: билинейными, трилинейными и т. д. Приведем определение билинейного функционала. Функция $f(y, z)$ от пары аргументов y, z, меняющихся в линейном пространстве, называется *билинейным функционалом*, если она представляет собой линейный функционал от z при каждом фиксированном y и линейный функционал от y при каждом фиксированном z.

В n-мерном пространстве легко можно найти общий вид билинейного функционала. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис n-мерного пространства и $f(y, z)$ — заданный билинейный функционал. Определим n^2 чисел β_{jk} $(j, k=1, 2, \ldots, n)$ равенствами

$$\beta_{jk}=f(e_j, e_k).$$

Пусть теперь $y=\sum_{j=1}^{n}\eta_j e_j$ и $z=\sum_{k=1}^{n}\zeta_k e_k$ — два произвольных вектора. Вычислим значение $f(y, z)$:

$$f(y, z)=f\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_j e_j, \sum_{k=1}^{n}\zeta_k e_k\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_j\zeta_k f(e_j, e_k)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}\eta_j\zeta_k, \tag{1}$$

т. е. функционал $f(y, z)$ в базисе $\{e_j\}$ записывается как билинейная форма от координат векторов y и z.

В бесконечномерном случае мы будем рассматривать билинейные функционалы с дополнительным предположением непрерывности. Напомним, что функция $f(y, z)$ называется непрерывной, например, при $y=0$, $z=0$, если для любого $\varepsilon>0$ можно найти $\delta>0$ так, что при $\|z\|<\delta$, $\|y\|\leqslant\delta$ мы имеем

$$|f(y, z)|<\varepsilon.$$

Из этого условия для билинейного непрерывного функционала $f(y, z)$ можно вывести следующую важную оценку: *для любых y и z*

$$|f(y, z)| \leqslant C\|y\| \cdot \|z\| \tag{2}$$

с фиксированной постоянной C. Действительно, в силу непрерывности $f(y, z)$ при $y=0$, $z=0$ имеется шар, например, радиуса δ, в котором $|f(y, z)|$ не превосходит заданной величины, например 1. Но тогда для любых y, z

$$\left|f\left(\delta \frac{y}{\|y\|}, \delta \frac{z}{\|z\|}\right)\right| \leqslant 1,$$

откуда

$$|f(y, z)| \leqslant \frac{1}{\delta^2}\|y\| \cdot \|z\|. \tag{3}$$

Функция от y, которая получается при замене в билинейном функционале $f(y, z)$ аргумента z на y, т. е. функция $f(y, y)$, называется *квадратичным функционалом.* В частности, в n-мерном пространстве квадратичный функционал, как следует из формулы (1), всегда может быть записан в виде

$$f(y, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \eta_j \eta_k,$$

т. е. в виде квадратичной формы от координат вектора y. В общем случае квадратичный функционал удовлетворяет неравенству

$$|f(y, y)| \leqslant C\|y\|^2,$$

которое получается из неравенства (3) заменой z на y.

Аналогично можно построить трилинейные функционалы, кубические функционалы и т. д.

Заключительное замечание. Появление в начале XX века и глубокое проникновение в математический анализ теории метрических пространств было подготовлено всем предыдущим развитием анализа. Основные понятия теории, включая полноту, компактность и сепарабельность, были сформулированы в 1906 г. М. Фреше (франц. математик, р. 1878). Общее определение линейного нормированного пространства и линейных функционалов в нем (отсюда «функциональный анализ») было введено в 1922 г. Стефаном Банахом (польский математик, 1892—1945) и Норбертом Винером (американский математик, р. 1894). Для дальнейшего ознакомления можно рекомендовать «Теорию множеств» Хаусдорфа и «Курс функционального анализа» Банаха (Киев, 1948).