ГЛАВА III

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В классическом анализе функций одной или нескольких переменных одной из центральных задач была задача об отыскании экстремумов дифференцируемых функций. В функциональных пространствах, рассмотрение которых мы начали в главе II, экстремальные задачи также играют важную роль. Например, задача об определении формы минимальной поверхности вращения, натянутой на два круга с общей осью (рис. 4), может быть истолкована как задача об отыскании точки экстремума функции

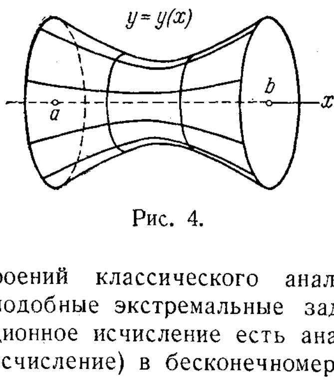

Рис. 4.

$$F(y) = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

аргумент которой $y = y(x)$ сам есть элемент линейного нормированного пространства (в данном случае, например, пространства $D_1(a, b)$).

Вариационное исчисление имеет своей целью такое обобщение построений классического анализа, которое даст возможность решать подобные экстремальные задачи. Более широко понимаемое, вариационное исчисление есть анализ бесконечно малых (дифференциальное исчисление) в бесконечномерных пространствах.

§ 1. Дифференцируемые функционалы

1. Сначала напомним определение дифференцируемой функции в классическом анализе.

Если функция $F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет непрерывные производные (в обычном смысле) по каждому из аргументов $x_1, \ldots, x_n$, то ее приращение при переходе из точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в точку $x + h = (x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n)$, как известно, может быть записано в форме

$$\Delta F(x) = F(x+h) - F(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x_j+\theta h_j)}{\partial x_j} h_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x_j)}{\partial x_j} h_j + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial F(x_j+\theta h_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial F(x_j)}{\partial x_j} \right] h_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x_j)}{\partial x_j} h_j + r(x, h) \qquad (0 < \theta < 1). \tag{1}$$

Первый член в правой части есть полный дифференциал функции F; он представляет собой выражение, линейно зависящее от составляющих вектора смещения h. Второй член в силу непрерывности частных производных $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ есть *бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с* $|h|$; это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $|h| < \delta$ выполняется неравенство

$$|r(x, h)| \leqslant \varepsilon |h|.$$

В частности, если функция $F(x)$ обладает в окрестности точки x вторыми производными $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, то величина $r(x, h)$ имеет вид

$$r(x, h) = \sum \frac{\partial^2 F(x_1+\theta h_1, x_2+\theta h_2, \ldots, x_n+\theta h_n)}{\partial x_i \partial x_k} h_i h_k \qquad (0 < \theta < 1),$$

и, если указанные вторые производные ограничены в окрестности точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ числом N, для $r(x, h)$ получается оценка

$$|r(x, h)| \leqslant N n^2 |h|^2, \tag{1'}$$

которая показывает, что в этом случае $r(x, h)$ имеет порядок малости по сравнению с h не ниже второго.

Таким образом, в общем случае первое слагаемое в сумме (1) при достаточно малых смещениях h имеет господствующее значение; поэтому оно называется *главной линейной частью приращения функции* $F(x)$. На основании этих свойств строится общее определение дифференцируемой функции в n-мерном пространстве R_n. Именно, функция $F(x)$, определенная на множестве S в пространстве R_n, называется *дифференцируемой в точке* $x_0 \in S$, если ее приращение при переходе в точку $x_0 + h \in S$ можно записать в форме

$$\Delta F(x) = F(x_0 + h) - F(x_0) = L(x_0, h) + r(x_0, h),$$

где $L(x_0, h)$ — линейная функция от смещения h, а $r(x_0, h)$ — бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с h в том смысле, как это было объяснено выше.

2. Это определение переносится и на случай функции, заданной в линейном нормированном пространстве, а именно: функционал $F(y)$, заданный в линейном нормированном пространстве E, называется *дифференцируемым в точке* $y_0 \in E$, если его приращение при переходе в точку y_0+h можно записать в форме

$$\Delta F(y) = F(y_0+h) - F(y_0) = L(y_0, h) + r(y_0, h),$$

где $L(y_0, h)$ — линейный непрерывный функционал от смещения h, а $r(y_0, h)$ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с h; это последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $\|h\| < \delta$ выполняется неравенство $|r(y_0, h)| < \varepsilon\|h\|$.

Заметим, что может существовать лишь единственный линейный непрерывный функционал $L(y_0, h)$, удовлетворяющий поставленным условиям. Действительно, если бы мы имели

$$\Delta F(y) = L_1(y_0, h) + r_1(y_0, h) = L_2(y_0, h) + r_2(y_0, h),$$

то, вычитая, получили бы

$$L_1(y_0, h) - L_2(y_0, h) = r_2(y_0, h) - r_1(y_0, h) = r(y_0, h),$$

где $r(y_0, h)$ есть снова бесконечно малая высшего порядка по сравнению с h. Разность $L_1(y_0, h) - L_2(y_0, h) = L(y_0, h)$ представляет собой новый линейный непрерывный функционал от h. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что при $\|h\| < \delta$ выполняется неравенство

$$|r(y_0, h)| = |L(y_0, h)| < \varepsilon\|h\|.$$

Разделяя последнее неравенство на $\|h\|$, мы получаем, что в единичном шаре $\|h\| \leqslant 1$ значения линейного функционала $L(y_0, h)$ не превосходят по абсолютной величине числа ε. Но так как ε можно выбрать произвольно малым, то $L(y_0, h) \equiv 0$, $L_1(y_0, h) \equiv L_2(y_0, h)$, что и требуется.

Линейный функционал $L(y_0, h)$, определенный, по доказанному, единственным образом, называется *дифференциалом* или, чаще, *вариацией функционала F в точке* y_0 и обозначается $\delta F(y_0, h)$.

Известно, что дифференцируемая функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных имеет производную по каждому направлению. Это свойство переносится и на дифференцируемые функционалы в любом линейном нормированном пространстве:

Лемма. *Если функционал $F(y)$ дифференцируем при $y = y_0$, то при любом h функция $F(y_0 + th)$, как функция от числа t, дифференцируема в обычном смысле по t при $t = 0$ и ее производная равна $L(y_0, h) = \delta F(y_0, h)$.*

Доказательство. Искомая производная есть предел отношения

$$\frac{F(y_0+th) - F(y_0)}{t} = \frac{\delta F(y_0, th) + r(y_0, th)}{t} = \delta F(y_0, h) + \frac{r(y_0, th)}{t}. \qquad (2)$$

По условию для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\|th\| = |t|\,\|h\| < \delta$ имеет место неравенство

$$|r(y_0, th)| < \varepsilon \|th\| = \varepsilon |t|\,\|h\|.$$

Отсюда следует, что частное

$$\frac{|r(y_0, th)|}{|t|} < \varepsilon \|h\|$$

и при $t \to 0$ может быть сделано как угодно малым. Это показывает, что отношение, стоящее в левой части (2), при $t \to 0$ имеет предел $\delta F(y_0, h)$, что и требовалось.

Замечание. *Если функционал $F(y)$ всюду дифференцируем, то функция $F(y + th)$ при фиксированных y и h дифференцируема при каждом t.* Действительно, положим $t = t_0 + \tau$; тогда

$$F(y + th) = F(y + t_0 h + \tau h) = F(y_0 + \tau h) \qquad (y_0 = y + t_0 h);$$

по доказанному эта функция от τ дифференцируема по τ при $\tau = 0$; но тогда и функция $F(y + th)$ дифференцируема по t при $t = t_0$.

3. ***Примеры.*** *1.* Линейный непрерывный функционал $F(y)$, очевидно, всегда есть дифференцируемая функция, поскольку

$$F(y + h) - F(y) = F(h)$$

и все приращение функционала сводится к линейному выражению по h.

2. Рассмотрим функционал

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x))\, dx$$

в пространстве $C(a, b)$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Ядро $f(x, y)$ предполагается непрерывной и обладающей непрерывными частными производными до второго порядка (в обычном смысле) функцией своих аргументов в области $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < \infty$. Составим приращение функционала $F(y)$, когда функциональный аргумент $y(x)$ получит смещение $h(x)$:

$$\Delta F(y) = F(y + h) - F(y) =$$
$$= \int_a^b \{f[x, y(x) + h(x)] - f[x, y(x)]\}\, dx. \tag{3}$$

Согласно определению дифференцируемой функции $f(x, y)$ мы имеем:

$$f(x, y + h) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} h + r(x, y, h),$$

где $r(x, y, h)$ при фиксированных x и y есть бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с h. В каждой ограниченной (по y) области вторые производные функции $f(x, y)$ ограничены по модулю, например, числом N, и функция $r(x, y, h)$, по предыдущему, допускает оценку

$$|r(x, y, h)| \leqslant N|h|^2.$$

Поэтому интеграл (3) приводится к виду

$$\Delta F(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} h(x)\, dx + \varepsilon(y),$$

где функция $\varepsilon(y)$ ограничена по модулю числом

$$\int_a^b |r(x, y, h(x))|\, dx \leqslant N \int_a^b |h^2(x)|\, dx \leqslant N(b-a) \max |h^2(x)| \leqslant$$
$$\leqslant N(b-a)\, \|h\|^2.$$

Мы видим, что приращение функционала $F(y)$ разлагается на главную линейную часть и бесконечно малую более высокого порядка. Таким образом, функционал $F(y)$ дифференцируем в пространстве $C(a, b)$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} h(x)\, dx.$$

3. Рассмотрим функционал

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

в пространстве $D_1(a, b)$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, обладающих непрерывными производными первого порядка. Ядро $f(x, y, y')$ предполагается непрерывной функцией, обладающей непрерывными производными до второго порядка, определенной в области $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y, y' < \infty$. Составим приращение функционала $F(y)$, перейдя от аргумента $y = y(x)$ к аргументу $y(x) + h(x)$, $h \in D_1(a, b)$:

$$\Delta F(y) = F(y+h) - F(y) =$$
$$= \int_a^b \{f[x, y(x) + h(x), y'(x) + h'(x)] - f(x, y, y')\}\, dx =$$
$$= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h(x) + \frac{\partial f}{\partial y} h'(x)\right] dx + \int_a^b r(x, y, y', h, h')\, dx.$$

Первое слагаемое, очевидно, линейно относительно смещения $h(x)$. Если N означает верхнюю границу вторых производных функции f по аргументам y и y' в некоторой ограниченной по y и y' области и поскольку в пространстве $D_1(a, b)$, как мы знаем,

$$\|h\| = \max\{|h(x)|, \quad |h'(x)|\},$$

то, обозначая $\mu = \|h\|$, мы получим для второго слагаемого оценку (см. неравенство (1'))

$$\int_a^b |r(x, y, h, y', h')|\, dx \leqslant 4N \int_a^b \mu^2 dx = 4N\mu^2 (b - a).$$

Полученное выражение второго порядка малости по сравнению с $\|h\|$. Мы видим, что функционал $F(y)$ дифференцируем в пространстве $D_1(a, b)$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} h'(x)\right] dx.$$

4. Аналогично функционал

$$F(y) = \int_a^b f[x, y(x), \ldots, y^{(m)}(x)]\, dx$$

дифференцируем в пространстве $D_m(a, b)$; его вариация имеет вид

$$\delta F = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h(x) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} h^{(m)}(x)\right] dx.$$

От функции f здесь снова требуется существование и непрерывность вторых производных (по всем аргументам).

5. Можно рассматривать также функционалы, аргументом которых служит функция нескольких переменных. Пусть для определенности рассматривается функционал

$$F(z) = \iint_G f(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y))\, dx\, dy, \tag{4}$$

где для сокращения введены обозначения

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Этот функционал мы рассмотрим, естественно, в пространстве $D_1(G)$ функций $z(x, y)$, непрерывных вместе с первыми частными производными в области G. Норма в этом пространстве задается формулой

$$\|z\| = \max_{(x, y) \in G} \left\{ |z(x, y)|, \left|\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right| \right\}.$$

Предполагая, что функция f обладает непрерывными вторыми производными по всем аргументам, преобразуем выражение приращения функционала F, когда функциональный аргумент $z(x, y)$ получает приращение $h(x, y)$:

$$\Delta F = \iint_G [f(x, y, z+h, z_x+h_x, z_y+h_y) - f(x, y, z, z_x, z_y)]\,dx\,dy =$$
$$= \iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial z_x} h_x + \frac{\partial f}{\partial z_y} h_y\right] dx\,dy + \iint_G r(x, y, z, z_x, z_y, h, h_x, h_y)\,dx\,dy.$$

Первое слагаемое линейно по h. Второе слагаемое при $\|h\| = \mu$ оценивается неравенством

$$\iint_G |r(x, y, z, z_x, z_y, h, h_x, h_y)|\,dx\,dy \leqslant 9N \iint_G \mu^2\,dx\,dy = 9N\mu^2\,|G|,$$

где N означает верхнюю границу модулей вторых производных функции F, а $|G|$ есть площадь области G. Итак, функционал (4) дифференцируем в пространстве $D_1(G)$, и его вариация имеет вид

$$\delta F(z, h) = \iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial z_x} h_x + \frac{\partial f}{\partial z_y} h_y\right] dx\,dy.$$

6. Рассмотрим функционал, зависящий от нескольких функциональных аргументов, например

$$F(y_1, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))\,dx.$$

Его естественно рассматривать в пространстве $D_1^{(n)}$, элементами которого являются вектор-функции $y = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Норму вектор-функции $y = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ определим формулой

$$\|y\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{|y_1(x)|, \ldots, |y_n(x)|, |y_1'(x)|, \ldots, |y_n'(x)|\}.$$

Легко проверить, что здесь выполнены все аксиомы линейного нормированного пространства.

Предполагая, что f имеет ограниченные (числом N) вторые производные по $y_1, \ldots, y_n'$, оценим приращение функционала F, когда вектор-функция $y = (y_1, \ldots, y_n)$ получит приращение $h = (h_1, \ldots, h_n)$:

$$\Delta F(y_1, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1+h_1, \ldots, y_n'+h_n')\,dx - \int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n')\,dx =$$
$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n'} h_n'\right) dx + \int_a^b r(x, y_1, \ldots, y_n', h_1, \ldots, h_n')\,dx.$$

Первый член получившегося результата линеен по $h = (h_1, \ldots, h_n)$.

Последний член при $\|h\| \leqslant \mu$ допускает оценку

$$\int_a^b |r(x, x_1, \ldots, y'_n, h_1, \ldots, h'_n)|\, dx \leqslant n^2 N \int_a^b \mu^2\, dx = n^2 N (b-a)\mu^2.$$

Это величина второго порядка по сравнению с μ. Таким образом, функционал F в данном случае также дифференцируем, и его вариация имеет вид

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y'_n} h'_n \right] dx.$$

Задачи. **1.** Проверить дифференцируемость следующих функционалов:
а) $F(y) = y(a)$ в пространстве $C(a, b)$;
б) $F(y) = y(a)$ в пространстве $D_1(a, b)$;
в) $F(y) = y^2(a)$ в пространстве $C(a, b)$;
г) $F(y) = \sqrt{1 + y'^2(a)}$ в пространстве $D_1(a, b)$;
д) $F(y) = |y(a)|$ в пространстве $C(a, b)$.

Отв. а) — г) дифференцируемые, д) нет.

2. Проверить, что функционал $F^2(y)$ дифференцируем, если дифференцируем $F(y)$. Написать вариацию $F^2(y)$.

Отв. $\delta F^2(y, h) = 2F(y)\, \delta F(y, h)$.

4. В некоторых случаях, так же как и в классическом анализе, остаток $r(y, h)$ допускает дальнейшую расшифровку. Предположим, что остаток $r(y, h)$ приращения дифференцируемого функционала $F(y)$ после выделения главной линейной части может быть разложен на квадратичный функционал и новый остаток выше второго порядка малости

$$r(y, h) = \frac{1}{2} Q(y, h, h) + r_2(y, h),$$

так что для любого $\delta > 0$ можно найти $\varepsilon > 0$ такое, что при $\|h\| < \delta$ будет

$$|r_2(y, h)| < \varepsilon |h|^2.$$

В этом случае квадратичный функционал $Q(y, h, h)$ называют вторым дифференциалом или *второй вариацией* функционала $F(y)$; сам функционал $F(y)$ называют в этом случае *дважды дифференцируемым*. Так же, как и первый дифференциал, определен однозначно и второй дифференциал.

Функционалы $F(y)$ интегрального типа, которые мы выше рассматривали, например

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx, \tag{1}$$

в пространстве $D_1(a, b)$ являются дважды дифференцируемыми, если подынтегральная функция f обладает непрерывными производными до третьего порядка включительно. Выражения для второй вариации таких функционалов легко получаются разложением f от аргумента $y+h$ по формуле Тейлора до членов третьего порядка. Так, для функционала

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

вторая вариация имеет вид

$$\delta^2 F(y, h) = \int_a^b f_{yy}(x, y)\, h^2\, dx; \tag{2}$$

для функционала (1)

$$\delta^2 F(y, h) = \int_a^b [f_{yy}h^2 + 2f_{yy'}hh' + f_{y'y'}h'^2]\, dx; \tag{3}$$

для функционала

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(m)})\, dx$$

имеем

$$\delta^2 F = \int_a^b [f_{yy}h^2 + \ldots + f_{y^{(k)}y^{(l)}}\, h^{(k)}\, h^{(l)} + \ldots + f_{y^{(m)}y^{(m)}}\, (h^{(m)})^2]\, dx; \tag{4}$$

для функционала

$$F(z) = \iint_G f(x, y, z, z_x, z_y)\, dx\, dy$$

аналогично

$$\delta^2 F = \iint_G [f_{zz}h^2 + f_{zz_x}hh_x + \ldots + f_{z_yz_y}h_y^2]\, dx\, dy; \tag{5}$$

наконец, для функционала

$$F(y_1, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx$$

получается

$$\delta^2 F = \int_a^b [\sum f_{y_iy_k}h_ih_k + \sum f_{y_iy_k'}h_ih_k' + \sum f_{y_k'y_i'}h_k'h_i']\, dx. \tag{6}$$

Задачи. 1. Доказать единственность второй вариации.

2. Доказать, что квадратичный функционал дифференцируем, и найти его первую и вторую вариации.

Отв. $\delta A(y, y; h) = A(y, h) + A(h, y)$, $\delta^2 A(y, y; h, h) = 2A(h, h)$.

3. Написать вторую вариацию функционала $e^{F(y)}$, где $F(y)$—дважды дифференцируемый функционал.

Отв. $\delta^2 e^{F(y)} = \{[\delta F(y, h)]^2 + \delta^2 F(y, h, h)\} e^{F(y)}$.

§ 2. Экстремумы дифференцируемых функционалов

1. Рассмотрим некоторый дифференцируемый функционал F в линейном нормированном пространстве E. Поставим задачу найти те точки y, в которых функционал F достигает экстремальных значений — максимума или минимума.

По определению, функционал F достигает в точке y_0 *относительного минимума*, если существует такая окрестность точки y_0 (шар с центром в точке y_0), в пределах которой выполняется неравенство

$$F(y) \geqslant F(y_0).$$

Если для точки y_0 существует окрестность, в пределах которой выполняется противоположное неравенство

$$F(y) \leqslant F(y_0),$$

то говорят, что в точке y_0 функционал F имеет *относительный максимум*. В анализе для определения точек относительного экстремума дифференцируемых функций приравнивают нулю их дифференциалы. Покажем, что аналогичное правило справедливо и для дифференцируемых функционалов в линейных нормированных пространствах.

Лемма. *Во всякой точке y_0, где дифференцируемый функционал $F(y)$ достигает экстремума, первая вариация $\delta F(y_0, h)$ функционала F при любом приращении h равна нулю.*

Доказательство. При произвольно заданном h рассмотрим функцию $F(y_0 + th)$ от переменного t. Эта функция дифференцируема по t и при $t = 0$ имеет экстремальное значение. Поэтому ее производная при $t = 0$ обращается в нуль. Но эта производная равна $\delta F(y_0, h)$ в силу леммы § 1. Таким образом, при любом h выражение $\delta F(y_0, h)$ равно нулю, что и требовалось.

Всякая точка y_0, в которой первая вариация $\delta F(y_0, h)$ функционала $F(y)$ обращается в нуль при любом h, называется *стационарной точкой* функционала.

Таким образом, мы должны приравнять нулю вариацию $\delta F(y_0, h)$ (тождественно по h) и выяснить, при каких y_0 это возможно. Мы