Задачи. 1. Доказать единственность второй вариации.

2. Доказать, что квадратичный функционал дифференцируем, и найти его первую и вторую вариации.

Отв. $\delta A(y, y; h) = A(y, h) + A(h, y)$, $\delta^2 A(y, y; h, h) = 2A(h, h)$.

3. Написать вторую вариацию функционала $e^{F(y)}$, где $F(y)$—дважды дифференцируемый функционал.

Отв. $\delta^2 e^{F(y)} = \{[\delta F(y, h)]^2 + \delta^2 F(y, h, h)\} e^{F(y)}$.

§ 2. Экстремумы дифференцируемых функционалов

1. Рассмотрим некоторый дифференцируемый функционал F в линейном нормированном пространстве E. Поставим задачу найти те точки y, в которых функционал F достигает экстремальных значений — максимума или минимума.

По определению, функционал F достигает в точке y_0 *относительного минимума*, если существует такая окрестность точки y_0 (шар с центром в точке y_0), в пределах которой выполняется неравенство

$$F(y) \geqslant F(y_0).$$

Если для точки y_0 существует окрестность, в пределах которой выполняется противоположное неравенство

$$F(y) \leqslant F(y_0),$$

то говорят, что в точке y_0 функционал F имеет *относительный максимум*. В анализе для определения точек относительного экстремума дифференцируемых функций приравнивают нулю их дифференциалы. Покажем, что аналогичное правило справедливо и для дифференцируемых функционалов в линейных нормированных пространствах.

Лемма. *Во всякой точке y_0, где дифференцируемый функционал $F(y)$ достигает экстремума, первая вариация $\delta F(y_0, h)$ функционала F при любом приращении h равна нулю.*

Доказательство. При произвольно заданном h рассмотрим функцию $F(y_0 + th)$ от переменного t. Эта функция дифференцируема по t и при $t = 0$ имеет экстремальное значение. Поэтому ее производная при $t = 0$ обращается в нуль. Но эта производная равна $\delta F(y_0, h)$ в силу леммы § 1. Таким образом, при любом h выражение $\delta F(y_0, h)$ равно нулю, что и требовалось.

Всякая точка y_0, в которой первая вариация $\delta F(y_0, h)$ функционала $F(y)$ обращается в нуль при любом h, называется *стационарной точкой* функционала.

Таким образом, мы должны приравнять нулю вариацию $\delta F(y_0, h)$ (тождественно по h) и выяснить, при каких y_0 это возможно. Мы найдем тогда стационарные точки функционала. Далее из всех стационарных точек нужно отобрать интересующие нас точки максимума и минимума.

2. Если функционал $F(y)$ дважды дифференцируем, то для исследования этого последнего вопроса можно привлечь вторую вариацию функционала. Поскольку в стационарной точке y_0 первая вариация функционала равна нулю, приращение его при переходе в точку y_0+h записывается в виде

$$\Delta F=\frac{1}{2}\delta^2F(y_0,\ h)+r_1(y_0,\ h),$$

где величина $r_1(y_0,\ h)$ при любом $\varepsilon>0$ в шаре $\|h\|<\delta(\varepsilon)$ допускает оценку

$$|r_1(y_0,\ h)|\leqslant\varepsilon\|h\|^2.$$

Эту оценку можно записать в форме равенства

$$r_1(y_0,\ h)=\theta\varepsilon\|h\|^2,\ \text{где}\ -1\leqslant\theta\leqslant1.$$

Отсюда при $\|h\|<\delta(\varepsilon)$ выражение приращения функционала приводится к виду

$$\Delta F(y_0,\ h)=\frac{1}{2}\delta^2F(y_0;\ h)+\theta\varepsilon\|h\|^2. \tag{1}$$

Теперь мы можем сформулировать некоторое необходимое и некоторое достаточное условие минимума. А именно:

а) *Если стационарная точка y_0 есть точка минимума функционала $F(y)$*, то $\delta^2F(y_0,h_0)\geqslant0$ *при любом h_0.*

б) *Если в стационарной точке y_0 при всех h выполняется неравенство*

$$\delta^2F(y_0,\ h)\geqslant C\|h\|^2\qquad(C>0\ \text{фиксировано}), \tag{1'}$$

то y_0 есть точка минимума функционала $F(y)$.

Для доказательства утверждения а) допустим обратное, т. е. допустим, что при некотором h_0 имеет место неравенство $\delta^2F(y_0,\ h_0)<0$. Возьмем $\varepsilon<\frac{|\delta^2F(y_0,\ h_0)|}{2\|h_0\|^2}$ и положим $h=th_0$, где t настолько мало, что $\|h\|=|t|\,\|h_0\|<\delta(\varepsilon)$. Тогда

$$\Delta F(y_0,\ h)=\frac{1}{2}\delta^2F(y_0,\ th_0)+\theta\varepsilon\|th_0\|^2=t^2\left[\frac{\delta^2F(y_0,\ h_0)}{2}+\theta\varepsilon\|h_0\|^2\right]<0,$$

так что y_0 не есть точка минимума функционала $F(y)$.

Для доказательства утверждения б) возьмем $\varepsilon<\frac{C}{2}$ и оценим снизу приращение функционала $F(y)$ в шаре радиуса $\delta(\varepsilon)$ с центром в точке y_0. Используя (1′), из (1) получаем

$$\Delta F(y_0, h) = \frac{1}{2}\delta^2 F(y_0, h) + \theta\varepsilon \|h\|^2 \geqslant \|h\|^2 \left(\frac{C}{2} + \theta\varepsilon\right) > 0 \text{ при } h \neq 0,$$

и, следовательно, y_0 есть точка минимума функционала $F(y)$.

Условие б), вообще говоря, нельзя ослабить, заменив его, казалось бы, естественным условием $\delta^2 F(y_0, h) > 0$ для всех h. Примером может служить функционал

$$F(y) = \int_0^1 xy^2(x)\,dx - \int_0^1 y^3(x)\,dx = \int_0^1 y^2(x)\,[x - y(x)]\,dx$$

в пространстве $C(0, 1)$. Точка $y(x) \equiv 0$ — стационарная точка для этого функционала, и вторая вариация

$$\delta^2 F(0, h) = \int_0^1 xh^2(x)\,dx$$

положительна для каждой функции $h(x) \neq 0$. Но функционал $F(y)$ принимает в любой окрестности нуля и отрицательные значения; достаточно при заданном $\varepsilon > 0$ взять в качестве $y(x)$ любую неотрицательную функцию, положительную при $x = 0$, не превосходящую $\varepsilon - x$ при $x < \varepsilon$ и равную нулю при $x \geqslant \varepsilon$.

Задачи. 1. Доказать, что линейный функционал, отличный от тождественного нуля, не имеет экстремумов.

2. Показать, что теория экстремума функционала

$$F(y) = f(y(x))\big|_{x=a}$$

в пространстве $C(a, b)$ совпадает с обычной теорией экстремума для функции $f(\xi)$.

3. Показать, что теория экстремума функционала

$$F(y) = f(y(a), y(b))$$

в пространстве $C(a, b)$ совпадает с обычной теорией экстремума для функции двух переменных $f(\xi, \eta)$.

3. В качестве примера проанализируем экстремальную задачу для функционала вида

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x))\,dx.$$

Этот функционал имеет первую вариацию (стр. 84)

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} h(x)\,dx.$$

Пусть $y_0 = y_0(x)$ — искомая точка экстремума. В этой точке при любой функции $h(x)$ выражение $\delta F(y_0', h)$ должно обращаться в нуль. Мы получаем уравнение

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y} h(x)\, dx = 0. \tag{2}$$

Ниже будет доказано, что такое уравнение может удовлетворяться лишь при условии, что

$$\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y} \equiv 0 \text{ по } x. \tag{3}$$

Это уравнение, если его разрешить относительно y_0, даст, вообще говоря, одну или несколько функций от x — элементов пространства $C(a, b)$, в которых только и возможны экстремумы рассматриваемого функционала.

Вторая вариация функционала $F(y)$ имеет вид (стр. 88)

$$\delta^2 F(y_0, h) = \int_a^b \frac{\partial^2 f(x, y_0)}{\partial y^2} h^2(x)\, dx.$$

Если она неотрицательна при любой $h(x)$, то, очевидно, $f_{yy} \geqslant 0$. Поэтому неравенство $f_{yy} \geqslant 0$ служит необходимым условием минимума функционала F. С другой стороны, если при всех x имеем $f_{yy}(x, y_0(x)) > 0$, то стационарная точка $y_0(x)$ является минимумом функционала, поскольку

$$\Delta F(y_0, h) =$$
$$= \int_a^b \left[\frac{1}{2} f_{yy}(x, y_0(x))\, h^2(x) + \frac{1}{6} f_{yyy}(x, y_0(x) + \theta(x) h(x))\, h^3(x)\right] dx =$$
$$= \int_a^b h^2(x) \left[\frac{1}{2} f_{yy} + \frac{1}{6} f_{yyy} h\right] dx > 0$$

при достаточно малых h.

4. Теперь вернемся к уравнению (2). Нам нужно доказать, что если оно выполняется для всех непрерывных $h(x)$, то имеет место равенство (3). Для этого применим лемму, которая и в дальнейшем нам будет неоднократно полезна:

Лемма. *Если для непрерывной функции $A(x)$ при любой непрерывной функции $h(x)$*

$$\int_a^b A(x)\,h(x)\,dx = 0, \tag{4}$$

то $A(x) \equiv 0$.

Доказательство. Если $A(x) \not\equiv 0$, то имеется внутренняя точка x_0 отрезка $[a, b]$, в которой $A(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $A(x_0) = c > 0$ и $U(x_0) = \{x : |x - x_0| < \delta\}$ — окрестность точки x_0, в которой выполняется неравенство $A(x) > \frac{c}{2}$. Рассмотрим любую функцию $h(x)$, неотрицательную, равную нулю вне окрестности $U(x_0)$ и положительную при $x = x_0$. Тогда, очевидно,

$$\int_a^b A(x)\,h(x)\,dx = \int_{|x-x_0|<\delta} A(x)\,h(x)\,dx > \frac{c}{2} \int_{|x-x_0|<\delta} h(x)\,dx > 0,$$

что противоречит исходному предположению. Лемма доказана.

Замечание 1. Запас функций $h(x)$, для которых нужно требовать выполнения равенства (4), чтобы сохранить справедливость результата, можно значительно уменьшить; как видно из построения, можно наложить на $h(x)$ любые ограничения гладкости (вплоть до бесконечной дифференцируемости), можно также считать, что $h(x)$ равна нулю вблизи концов промежутка. Отметим также, что в аналогичной формулировке — с заменой отрезка $[a, b]$ на ограниченную область G — лемма сохраняется и в случае нескольких независимых переменных.

Замечание 2. Просматривая приведенные выше построения, легко убедиться, что они остаются справедливыми и в несколько более общей постановке. Именно функционал $F(y)$ может быть задан не на всем пространстве E, а только на некотором подмножестве $E' \subset E$, которое обладает тем свойством, что вместе с двумя своими точками y, $y + h$ содержит все точки вида $y + th$, $-\infty < t < \infty$, иными словами, содержит всю прямую, определяемую точками y и $y + h$. Подмножество $E' \subset E$, обладающее этим свойством, называется *линейным многообразием* в E. В задачах, которые мы будем рассматривать далее, функционал, определенный и дифференцируемый во всем пространстве E, рассматривается только на некотором линейном многообразии $E' \subset E$ и разыскиваются те точки $y_0 \in E'$, в которых функционал имеет значение, экстремальное относительно смещений в этом многообразии. Для решения такой задачи мы должны рассмотреть вариацию $\delta F(y, h)$ только для $y \in E'$ и разыскать при этом такие точки y_0, для которых $\delta F(y_0, h)$ равна нулю при любом смещении h, не выводящем из многообразия E'. Точно так же и вторую вариацию $\delta^2 F(y_0, h)$ мы должны исследовать только на смещениях h, не выводящих из многообразия E'.

§ 3. Функционалы вида $\int\limits_a^b f(x, y, y')\,dx$

На этих функционалах, часто встречающихся в задачах математики и механики, мы остановимся несколько подробнее.

1. Функционал в пространстве $D_1(a, b)$

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')\,dx,$$

как мы видели в § 1 (стр. 85), имеет вариацию

$$\delta F(y, h) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} h'(x)\right] dx. \tag{1}$$

Чтобы найти точки экстремума функционала F, нужно приравнять нулю его вариацию $\delta F(y, h)$. Для искомой функции $y = y(x)$ здесь можно получить несколько вариантов условий в зависимости от многообразий, на которых задан функционал.

Рассмотрим сначала случай, когда функционал F задан на совокупности функций $y(x)$, принимающих в точках a и b заданные значения $y(a)$ и $y(b)$. Тем самым функция $h(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ должна обращаться в нуль. Очевидно, что эта совокупность является линейным многообразием в $D_1(a, b)$, и мы можем действовать в соответствии с замечанием 2 к § 2.

Предположим далее, что искомое решение $y = y(x)$ обладает непрерывной второй производной. (Это ограничение будет снято ниже.) Тогда оба коэффициента при $h(x)$ и $h'(x)$ в интеграле (1), где вместо y подставлено искомое решение $y(x)$, будут дифференцируемыми функциями от x. Интегрируя второе слагаемое по частям, получим:

$$\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} h'(x)\,dx = \frac{\partial f}{\partial y'} h(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b \left[\frac{d}{dx} f_{y'}\right] h(x)\,dx.$$

Внеинтегральный член обращается в нуль, так как $h(a) = h(b) = 0$. Поэтому выражение вариации преобразуется к виду

$$\delta F(y, h) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right] h(x)\,dx.$$