смещении h, не выводящем из многообразия E'. Точно так же и вторую вариацию $\delta^2 F(y_0, h)$ мы должны исследовать только на смещениях h, не выводящих из многообразия E'.

§ 3. Функционалы вида $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$

На этих функционалах, часто встречающихся в задачах математики и механики, мы остановимся несколько подробнее.

1. Функционал в пространстве $D_1(a, b)$

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,dx,$$

как мы видели в § 1 (стр. 85), имеет вариацию

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} h'(x)\right] dx. \tag{1}$$

Чтобы найти точки экстремума функционала F, нужно приравнять нулю его вариацию $\delta F(y, h)$. Для искомой функции $y = y(x)$ здесь можно получить несколько вариантов условий в зависимости от многообразий, на которых задан функционал.

Рассмотрим сначала случай, когда функционал F задан на совокупности функций $y(x)$, принимающих в точках a и b заданные значения $y(a)$ и $y(b)$. Тем самым функция $h(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ должна обращаться в нуль. Очевидно, что эта совокупность является линейным многообразием в $D_1(a, b)$, и мы можем действовать в соответствии с замечанием 2 к § 2.

Предположим далее, что искомое решение $y = y(x)$ обладает непрерывной второй производной. (Это ограничение будет снято ниже.) Тогда оба коэффициента при $h(x)$ и $h'(x)$ в интеграле (1), где вместо y подставлено искомое решение $y(x)$, будут дифференцируемыми функциями от x. Интегрируя второе слагаемое по частям, получим:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} h'(x)\,dx = \frac{\partial f}{\partial y'} h(x)\Big|_a^b - \int_a^b \left[\frac{d}{dx} f_{y'}\right] h(x)\,dx.$$

Внеинтегральный член обращается в нуль, так как $h(a) = h(b) = 0$. Поэтому выражение вариации преобразуется к виду

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right] h(x)\,dx.$$

В искомой точке экстремума вариация $\delta F(y, h)$ должна быть равна нулю при любом $h(x)$. Отсюда (как и выше в § 2) следует, что множитель при $h(x)$ тождественно равен нулю. Итак, для неизвестной функции $y = y(x)$ мы получили уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{2}$$

(*уравнение Эйлера*). Раскрывая полную производную по x, мы можем записать это уравнение в форме

$$f_y - f_{xy'} - f_{yy'}\,y' - f_{y'y'}\,y'' = 0.$$

Это — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, линейное относительно старшей производной. Итак, *если экстремум функционала F существует и достигается на функции $y = y(x)$, обладающей производной второго порядка, то эта функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера.*

Общее решение уравнения Эйлера, как и всякого дифференциального уравнения 2-го порядка, зависит от двух параметров: C_1 и C_2. Каждое отдельное решение, получающееся при фиксированных C_1 и C_2, называется *экстремалью* функционала F. Подбирая должным образом постоянные C_1 и C_2, мы, вообще говоря, сможем указать экстремаль, которая удовлетворяет поставленным условиям $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ (может быть, и несколько таких экстремалей). Если же среди решений уравнения Эйлера нет ни одного, которое отвечает этим условиям, то это означает, что наша экстремальная задача не имеет решений в классе дважды дифференцируемых функций.

2. Изучая вторую вариацию функционала F, мы можем получить дальнейшие необходимые, а также и достаточные условия того или иного экстремума.

Вторая вариация, как было указано в § 1 (стр. 88), имеет вид

$$\delta^2 F = \frac{1}{2}\int_a^b [f_{yy}h^2 + 2f_{yy'}hh' + f_{y'y'}h'^2]\,dx.$$

Среднее слагаемое можно преобразовать следующим образом:

$$\int_a^b f_{yy'}hh'\,dx = \int_a^b \frac{1}{2} f_{yy'}\,dh^2(x) = -\frac{1}{2}\int_a^b h^2 \frac{d}{dx} f_{yy'}\,dx,$$

поэтому

$$\delta^2 F=\int_a^b \left[P(x)\,h^2+\frac{1}{2} f_{y'y'}\, h'^2\right] dx, \tag{3}$$

где $P(x)=\frac{1}{2}\left(f_{yy}-\frac{d}{dx} f_{y'y'}\right)$.

Мы утверждаем, что для точки минимума $y=y_0(x)$ выполняется неравенство

$$f_{y'y'}\,(x,\ y_0(x),\ y_0'(x)) \geqslant 0$$

при любом x в промежутке $[a, b]$.

Действительно, предположим, что в некоторой точке x_0, $a \leqslant x_0 \leqslant b$, выражение $f_{y'y'}\,(x,\ y_0(x),\ y_0'(x))$ отрицательно. Тогда это выражение отрицательно и в некоторой окрестности U точки x_0. Пусть некоторая функция $h_0(x-x_0) \in D_1(a, b)$ в окрестности U принимает значения между 0 и 1, в точке x_0 равна 1, а вне окрестности U равна 0. Всегда можно найти интервал длины, например δ, на котором $h_0'(x-x_0) \geqslant c > 0$. Рассмотрим выражение второй вариации (3) для смещения $h_m(x)=h_0[m(x-x_0)]$, когда $m \to \infty$. Первое слагаемое остается ограниченным по модулю величиной

$$\int_a^b |P(x)|\, dx,$$

второе же, очевидно, стремится к $-\infty$, так как по условию $f_{y'y'}<0$ в окрестности U, а в этой окрестности на интервале длины δ/m квадрат производной от функции $h_m(x)$ заведомо превосходит m^2c^2. Поэтому δ^2F на смещении $h_m(x)$ с достаточно большим m принимает отрицательное значение; но тогда функционал F не может иметь минимум в точке y_0.

Итак, неравенство $f_{y'y'}\,(x,\ y_0(x),\ y_0'(x)) \geqslant 0$ является необходимым условием минимума функционала $F(y)$ в стационарной точке $y_0(x)$. Это условие называется *условием Лежандра*.

Удобные *достаточные* условия минимума получить значительно сложнее. Мы приведем здесь без доказательства *достаточное условие Вейерштрасса*.

Предположим, что экстремаль $y=y(x)$ можно включить в «поле экстремалей», т. е. в однопараметрическое семейство экстремалей $y=y(x, \alpha)$, где $-\varepsilon<\alpha<\varepsilon$ и $y(x, 0)=y(x)$; при этом предполагается, что функция $y(x, \alpha)$ дифференцируема по α, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}>0$, и кривые $y=y(x, \alpha)$ в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ при разных значениях α не пересекаются. Тогда, *если для всех x и y в области, покрытой экстремалями $y=y(x, \alpha)$, выполняется при любом τ неравенство*

$$f_{y'y'}\,(x,\ y,\ \tau)>0,$$

то экстремаль $y=y(x)$ реализует относительный минимум функционала F в пространстве D_1; более того, среди всех кривых $y=\varphi(x) \in D_1$, удовлетворяющих при достаточно малом β неравенству

$$|y(x)-\varphi(x)|<\beta,$$

каковы бы ни были производные $\varphi'(x)$, *функционал* F *принимает наименьшее значение на кривой* $y=y(x)$. *Если, наоборот, в указанных условиях выполняется неравенство*

$$f_{y'y'}(x,\ y,\ \tau)<0,$$

то экстремаль $y=y(x)$ *реализует относительный максимум с теми же свойствами* *).

Укажем несколько конкретных задач из геометрии и механики, приводящих к задачам об отыскании экстремумов функционалов указанного вида.

а) Функционал

$$F(y)=\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

выражает длину дуги кривой $y=y(x)$ при $a\leqslant x\leqslant b$. Задача об экстремуме этого функционала может быть сформулирована так: среди всех кривых $y=y(x)$, соединяющих заданные точки $(a,\ y(a))$ и $(b,\ y(b))$, найти кривую с наименьшей длиной. В данном случае функция $f(x,\ y,\ y')=\sqrt{1+y'^2}$ не зависит от y, поэтому уравнение Эйлера (2) принимает вид

$$\frac{d}{dx}f_{y'}=0,$$

откуда

$$f_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\text{const};$$

но тогда и $y'=\text{const}$, и, следовательно, решение дается линейной функцией $y=Cx+C_1$; искомая линия есть прямая, соединяющая заданные точки.

Ясно, что мы имеем здесь дело с минимумом; посмотрим все же. во что превращается здесь условие Вейерштрасса. Экстремаль $y=Cx+C_1$, очевидно, можно включить в поле

$$y=Cx+C_1+\alpha, \qquad -\varepsilon<\alpha<\varepsilon.$$

Далее,

$$f_{y'y'}=\frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

и, следовательно,

$$f_{y'y'}(x,\ y,\ \tau)=\frac{1}{(1+\tau^2)^{3/2}}>0,$$

так что условие Вейерштрасса удовлетворено.

б) Поставим аналогичную задачу для поверхности, заданной параметрическими уравнениями

$$x=x(u,\ v); \qquad y=y(u,\ v); \qquad z=z(u,\ v). \tag{4}$$

---

*) Доказательство можно найти, например, в «Курсе вариационного исчисления» М. А. Лаврентьева и Л. А. Люстерника, М.—Л., 1950, гл. 8.

Известно, что длина дуги кривой $v = v(u)$, соединяющей на поверхности (4) точки A и B, выражается интегралом

$$F(v) = \int_a^b \sqrt{E(u,\ v) + 2F(u,\ v)\frac{dv}{du} + G(u,\ v)\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du, \tag{5}$$

где E, F, G — гауссовы коэффициенты элемента дуги. Мы должны, следовательно, решить задачу об экстремуме функционала (5). Оставляя пока в стороне общий случай, рассмотрим случай сферы, заданной уравнением в сферических координатах ($u = \varphi$, $v = \psi$):

$$x = \cos\varphi\cos\psi,\ y = \sin\varphi\cos\psi,\ z = \sin\psi. \tag{6}$$

Гауссовы параметры имеют вид

$$\begin{aligned} G &= x_\varphi x_\varphi + y_\varphi y_\varphi + z_\varphi z_\varphi = \cos^2\psi, \\ F &= x_\varphi x_\psi + y_\varphi y_\psi + z_\varphi z_\psi = 0, \\ E &= x_\psi x_\psi + y_\psi y_\psi + z_\psi z_\psi = 1, \end{aligned}$$

и функционал (5) принимает вид

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \cos^2\psi\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2}\, d\psi.$$

Уравнение Эйлера

$$F_\varphi - \frac{d}{d\psi} F_{\varphi'} = 0,$$

так же как и выше, допускает первый интеграл

$$F_{\varphi'} = \frac{\cos^2\psi\cdot\varphi'}{\sqrt{1+\cos^2\psi\cdot\varphi'^2}} = C \leqslant 1$$

который может быть записан также в виде

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{C}{\cos\psi\sqrt{\cos^2\psi - C^2}}.$$

Общий интеграл этого уравнения получается подстановкой $\operatorname{tg}\psi = t$:

$$\sin(\varphi + C_2) = C_1\operatorname{tg}\psi \qquad \left(C_1 = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}}\right)$$

или

$$\sin\psi = \alpha\sin\varphi\cos\psi + \beta\cos\varphi\cos\psi,$$

где α и β — новые постоянные. Возвращаясь к прямоугольным координатам по формулам (6), получаем

$$z = \alpha x + \beta y.$$

Мы получили уравнение плоскости, проходящей через начало координат; кривая, высекаемая ею на сфере, есть дуга большого круга. Таким образом, линии кратчайших расстояний на сфере, если они существуют, являются дугами больших кругов.

Проверим выполнение условия Вейерштрасса.

Если только две взятые точки не являются диаметрально противоположными (так что $\cos\psi > 0$), то дугу большого круга, соединяющую их, очевидно, можно включить в поле экстремалей. Далее,

$$F_{\varphi'\varphi'} = \frac{\cos^2\psi}{[1+\varphi'^2\cos^2\psi]^{3/2}},$$

поэтому

$$F_{\varphi'\varphi'}(\psi, \varphi, \tau) = \frac{\cos^2\psi}{[1+\tau^2\cos^2\psi]^{3/2}} > 0,$$

и условие Вейерштрасса выполнено; таким образом, дуга Γ большого круга, соединяющая две заданные точки, действительно реализует минимум длин среди всех кривых, соединяющих эти точки и проходящих достаточно близко от кривой Γ.

Прежде чем перейти к остальным двум примерам, сделаем одно практическое замечание относительно интегрирования уравнения Эйлера в случае, когда функция $f = f(x, y, y')$ не зависит от аргумента x, так что

$$f = f(y, y').$$

Будем считать здесь независимым переменным y, а x — его функцией, подлежащей определению. Тогда функционал F приводится к виду

$$F = \int\limits_{y_1}^{y_2} f\left(y, \frac{1}{x'}\right) x'\,dy.$$

Теперь уравнение Эйлера

$$g_x - \frac{d}{dy} g_{x'} = 0, \text{ где } g = f\left(y, \frac{1}{x'}\right) x',$$

так же как и выше, будет иметь первый интеграл

$$g_{x'} = \text{const},$$

или, что то же,

$$x' f_{y'}(y, y')\left(-\frac{1}{x'^2}\right) + f(y, y') = f - y' f_{y'}(y, y') = C. \tag{7}$$

Остается проинтегрировать полученное уравнение 1-го порядка, что возможно выполнить в квадратурах, поскольку в этом уравнении отсутствует x.

Переходим к рассмотрению следующих примеров.

в) Экстремум функционала

$$F(y) = 2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

дает решение следующей задачи: среди всех кривых $y = y(x)$, соединяющих заданные точки $(a, y(a))$ и $(b, y(b))$, найти такую, для которой площадь соответствующей поверхности вращения вокруг оси x имеет наименьшее значение.

Для решения уравнения Эйлера используем предыдущее замечание. Первый интеграл (7) имеет в данном случае вид

$$y\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

или, что то же,

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}.$$

Подстановкой $y = C\cdot\operatorname{ch} t$ уравнение легко интегрируется:

$$y = C\cdot\operatorname{ch}\left(\frac{x}{C} + C_1\right).$$

Кривая $y = y(x)$ будет искомой, если она принадлежит к этому двупараметрическому семейству и проходит через заданные точки $(a,\ y(a))$ и $(b,\ y(b))$.

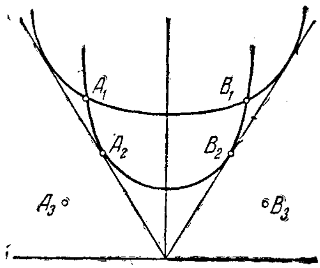

Рис. 5.

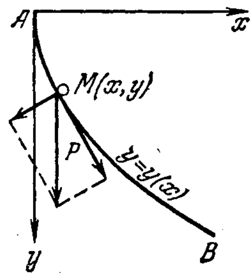

Рис. 6.

Для простоты будем считать, что $a = -b$, $y(a) = y(-a)$. Тогда $C_1 = 0$ и все семейство экстремалей сводится к однопараметрическому семейству

$$y = C\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{C}, \tag{8}$$

получающемуся из цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ с помощью всевозможных преобразований подобия (с центром в начале координат). В зависимости от положения точек $(a,\ y(a))$ и $(-a,\ y(-a))$ на плоскости могут возникнуть три различные возможности: в семействе цепных линий (8) есть две линии, проходящие через эту точку, одна или ни одной (рис. 5, пары точек A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3 соответственно). Выясним, как обстоит дело с выполнением достаточного условия Вейерштрасса. Мы имеем

$$f_{y'y'} = 2\pi\frac{y}{(1+y'^2)^{3/2}};$$

эта величина положительна при $y > 0$ и любом $y' = \tau$. С другой стороны, в первом случае верхнюю из двух возможных экстремалей, соединяющих точки A_1 и B_1, всегда можно включить в поле, используя для построения его экстремали семейства (8). Условие Вейерштрасса, таким образом, выполнено, поэтому верхняя экстремаль заведомо приводит к относительному минимуму функционала F. Нижнюю экстремаль нельзя включить в поле, и условие Вейерштрасса не выполняется; таким образом, вопрос относительно характера экстремума на нижней экстремали мы вынуждены оставить открытым. Более точное исследование показывает, что нижняя экстремаль не дает ни максимума, ни минимума.

Во втором случае единственная экстремаль, соединяющая точки A_2 и B_2, также включается в поле и, следовательно, реализует относительный минимум.

В третьем случае в классе дважды дифференцируемых линий, соединяющих точки A_3 и B_3, нет ни одной, на которой функционал F достигал бы относительного минимума.

г) В 1696 г. И. Бернулли поставил и решил следующую задачу, которая стала важной вехой в развитии вариационного исчисления: *какова должна быть кривая, соединяющая точки A и B в вертикальной плоскости, чтобы материальная точка M скатывалась по этой кривой от одной точки до второй под действием силы тяжести в наименьшее время?*

Искомая кривая была названа им брахистохроной.

Приступая к решению этой задачи, сначала найдем время, в течение которого материальная точка M с массой m скатывается под действием силы тяжести по заданной кривой из одной заданной точки в другую без начальной скорости. Поместим начало координат в первой из заданных точек и расположим оси, как указано на рис. 6.

Покажем прежде всего, что в точке с координатами x, y точка M имеет скорость $v = \sqrt{2gy}$. Для этого разложим силу тяжести $P = mg$ на нормальную и касательную составляющие; первая не играет роли, вторая создает касательное ускорение, равное $g\frac{dy}{ds}$. Имеем

$$\frac{dv}{du} = g\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{ds}{dt} = v;$$

разделяя эти уравнения друг на друга, исключаем ds и dt и приходим к уравнению

$$v\,dv = g\,dy.$$

Интегрируя это уравнение с учетом начального условия $y = 0$, $v = 0$, получим

$$v = \sqrt{2gy},$$

что и требовалось. Далее мы имеем

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$

и для искомого промежутка времени находим выражение

$$F(y) = \int\limits_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx.$$

Очевидно, что $F(y) = F(y(x))$ есть функционал, зависящий от выбора функции $y(x)$. Функция f в данном случае уже не является дважды дифференцируемой по y; тем не менее более точный подсчет обнаруживает, что и в данном случае F дифференцируем и его вариация вычисляется по формуле (1). Так же как и в предыдущем примере, уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$f - y'f_{y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

или, что то же,

$$y=\frac{C_1}{1+y'^2}\quad\left(C_1=\frac{C^2}{2g}\right).$$

Здесь удобно перейти к параметрическому представлению

$$y'=\operatorname{tg}\varphi.$$

Мы имеем в результате

$$y=C_1\cos^2\varphi,\quad y'=-C_1\sin 2\varphi\cdot\varphi'=\operatorname{tg}\varphi,$$

откуда

$$\varphi'=\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{1}{C_1\cos^2\varphi}$$

и, следовательно,

$$x=-\frac{C_1}{2}(2\varphi+\sin 2\varphi)+C_2.$$

Заменяя 2φ на $\pi-\theta$, получаем более простую параметрическую запись решения:

$$x=a(\theta-\sin\theta)+b,\quad y=a(1-\cos\theta),$$

где a и b — новые постоянные.

Таким образом, экстремали образуют семейство циклоид с точками возврата на оси x. Условиями задачи $y(0)=0$, $y(b)=C$ выделяется в этом семействе единственная кривая, которая и является искомой.

Замечание 1. В рассмотренных задачах мы находили кривые $y=y_0(x)$, реализующие относительный минимум функционала $F(y)$. Это несколько не соответствует постановке задачи: найти кривую $y=y_0(x)$, на которой реализуется абсолютный минимум функционала $F(y)$ [т. е. минимум не только среди достаточно близких кривых, но и среди вообще всех функций $y=y(x)$, для которых имеет смысл величина $F(y)$]. Конечно, если искомый минимум достигается на некоторой кривой $y=y_0(x)$, то для этой кривой он будет и относительным минимумом и поэтому будет «пойман» нашими методами. Но может быть и так, что абсолютный минимум не реализуется ни на одной гладкой кривой. Это заведомо имеет место, например, в задаче о минимальной поверхности вращения, если заданные точки, через которые должна проходить образующая, достаточно далеко раздвинуты. Но наши выводы еще не исключают допущения, что и в «хорошем» случае, когда заданные точки близки, соединяющая их экстремаль $y=y_0(x)$ реализует лишь относительный минимум, а абсолютный вовсе не реализуется (т. е. хотя для близких к $y=y_0(x)$ линий и справедливо неравенство $F(y)\geqslant F(y_0)$, но имеются иные линии, на которых все же $F(y)<F(y_0)$, и не существует гладкой функции, на которой $F(y)$ достигает минимума). В действительности это не имеет места. Имеется общая теорема, называемая теоремой Гильберта — Тонелли, которая гарантирует существование (в классе спрямляемых кривых) решения экстремальной задачи. Мы не имеем возможности останавливаться на ее доказательстве[1]).

Замечание 2. В ходе рассуждений мы *допустили*, что искомое решение $y=y(x)$ обладает непрерывной второй производной. Это допущение можно не вводить, если пойти несколько иным путем, который мы сейчас опишем.

---

[1]) См. Н. И. Ахиезер, Лекции по вариационному исчислению, Гостехиздат, 1955, гл. IV, §§ 33—36.

Вариация функционала

$$F(y)=\int_a^b f(x, y, y')\,dx,$$

как мы помним, имеет вид

$$\delta F(y, h)=\int_a^b [f_y h(x)+f_{y'} h'(x)]\,dx. \tag{9}$$

Мы преобразовали ее выражение, интегрируя второе слагаемое по частям, чтобы освободиться от $h'(x)$ и иметь дело только с $h(x)$. Но можно действовать и по-другому: интегрируя по частям первый член, освободиться от $h(x)$ и иметь дело только с $h'(x)$. Оказывается, что на этом пути не только не нужно предполагать существование y'', но даже можно доказать ее существование. Итак, проинтегрируем по частям первое слагаемое в выражении (9); мы находим тогда

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}\,h(x)\,dx=g(x)\,h(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\,h'(x)\,dx,$$

где через $g(x)$ обозначена первообразная от функции $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$ (мы помним, что y есть некоторая функция от x; вместе с этим и $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$ есть некоторая функция от x). Так как $h(a)=h(b)=0$, то внеинтегральный член исчезает, и мы получаем

$$\delta F(y, h)=\int_a^b\left[-g(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}\right]h'(x)\,dx=0.$$

Ниже будет доказано, что это уравнение может удовлетворяться при всех допустимых $h(x)$, лишь если

$$-g(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}=\text{const}. \tag{10}$$

Функция $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}$, как функция от переменного x, вообще говоря, не имеет производной [вместе с $y'(x)$]. Но в данном случае уравнение (10) показывает, что функция $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}$ вместе с $g(x)$ дифференцируема.

Дифференцируя левую часть по x, приходим к *уравнению Эйлера:*

$$-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0.$$

Пока не доказано существование y'', полную производную у второго члена нельзя раскрывать по обычным правилам. Покажем, что *y'' существует всюду, где $f_{y'y'}(x, y, y')$ отлична от нуля.*

Производная $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$ есть предел при $\Delta x \to 0$ выражения

$$\frac{f_{y'}(x+\Delta x,\ y(x+\Delta x),\ y'(x+\Delta x)) - f_{y'}(x,\ y,\ y')}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial \overline{f_{y'}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{f_{y'}}}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\partial \overline{f_{y'}}}{\partial y'}\frac{\Delta y'}{\Delta x},$$

где черта наверху означает, что соответствующее выражение вычисляется при некоторых промежуточных значениях аргументов. При $\Delta x \to 0$ эта черта снимается и соответствующие функции рассматриваются при исходных значениях аргументов. Кроме того, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $y'(x)$. Так как $\frac{\partial f_{y'}}{\partial y'}$ по условию отлична от нуля, то существует и предел выражения $\frac{\Delta y'}{\Delta x}$, а это и означает существование второй производной.

Нам остается доказать следующую лемму Дю-Буа-Реймонда: *Если для некоторой непрерывной функции* $A(x)$

$$\int_a^b A(x)\,h'(x)\,dx = 0, \tag{11}$$

какова бы ни была функция $h(x) \in D_1(a, b)$, *равная нулю при* $x = a$ *и* $x = b$, *то функция* $A(x)$ *постоянна.*

Для доказательства допустим, что непрерывная функция $A(x)$ непостоянна, и, например, имеются точки x_1 и x_2, где $A(x_1) < A(x_2)$. Покажем, что существует функция $h(x) \in D_1(a, b)$, $h(a) = h(b) = 0$, для которой равенство (11) не выполняется. Возьмем произвольно число C между значениями $A(x_1)$ и $A(x_2)$. Так как $A(x)$ — непрерывная функция, то найдутся непересекающиеся интервалы $\Delta_1 \ni x_1$ и $\Delta_2 \ni x_2$, обладающие тем свойством, что для любых $x' \in \Delta_1$, $x'' \in \Delta_2$

$$A(x') < C < A(x'').$$

В качестве функции $h'(x)$ возьмем любую непрерывную функцию, положительную на интервале Δ_1, отрицательную на интервале Δ_2, равную нулю вне Δ_1 и Δ_2 и такую, что

$$\int_a^b h'(x)\,dx = \int_{\Delta_1} h'(x)\,dx + \int_{\Delta_2} h'(x)\,dx = 0.$$

Функцию $h(x)$ определим, естественно, формулой

$$h(x) = \int_a^x h'(\xi)\,d\xi;$$

очевидно, что $h(x) \in D_1(a, b)$ и $h(a) = h(b) = 0$.

Далее мы имеем

$$\int_a^b [A(x) - C]\,h'(x)\,dx = \int_{\Delta_1} (A(x) - C)\,h'(x)\,dx + \int_{\Delta_2} [A(x) - C]\,h'(x)\,dx < 0,$$

поскольку оба слагаемых отрицательны. Но тогда и

$$\int_a^b A(x)\,h'(x)\,dx = \int_a^b [A(x) - C]\,h'(x)\,dx + C\int_a^b h'(x)\,dx = \int_a^b [A(x) - C]\,h'(x)\,dx < 0;$$

мы видим, что при данной $h(x)$ равенство (11) не выполняется, что нам и требовалось.

Задачи. 1. Найти экстремали и исследовать условия разрешимости экстремальной задачи для следующих функционалов:

а) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \sqrt{y(1 + y'^2)}\,dx, \qquad y(-1) = y(1) = b > 0;$

б) $\displaystyle\int_a^b \frac{1 + y^2}{y'^2}\,dx, \qquad y(a) = A, \qquad y(b) = B.$

Отв. а) Одно решение при $b = 1$, два при $b > 1$ (параболы) и ни одного при $b < 1$.

б) Всегда одно решение вида $y = sh(C_1x + C_2)$.

2. Проанализировать экстремальные задачи для данных функционалов:

а) $\displaystyle\int_0^1 y'\,dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$

б) $\displaystyle\int_0^1 yy'\,dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$

в) $\displaystyle\int_0^1 xyy'\,dx, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$

Отв. В случаях а) и б) значение функционала не зависит от выбора функции $y(x)$. В случае в) вариация функционала не равна нулю ни на одной из кривых, соединяющих заданные точки; экстремума нет.

3. Согласно принципу Ферма, свет движется так, что из точки A в точку B приходит за наименьшее время. Принимая, что в атмосфере Земли скорость света линейно меняется с высотой, найти форму лучей света. Кривизну земной поверхности не учитывать.

Отв. Дуги окружностей.

4. Найти экстремаль функционала

$$F(y) = \int_0^1 e^{y'}\,\mathrm{tg}\,y'\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Отв. $y = x$.

5. Доказать следующее обобщение леммы Дю-Буа-Реймонда:

Если $A(x)$ — непрерывная функция и

$$\int_a^b A(x)\, h^{(n)}(x)\, dx = 0$$

для всякой функции $h(x) \in D_n(a, b)$, равной нулю при $x = a$ и $x = b$ вместе с производными до порядка $n-1$, то $A(x)$ есть многочлен степени $< n$.

Указание. Положить

$$h^{(n)} x = p(x), \quad h(x) = \int_a^x \ldots \int_a^x p\ (x)\ dx^n = \frac{1}{n!} \int_a^x p(\xi)(x-\xi)^{n-1} d\xi$$

(формула Дирихле). Условие теоремы теперь можно выразить так: интеграл

$$\int_a^b A(x)\, p(x)\, dx$$

равен нулю на всякой функции $p(x)$, для которой

$$\int_a^b x^k p(x)\, dx = 0$$

при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Применить далее результат задачи 3 § 9 гл. II

§ 4. Функционалы вида $\int_a^b f(x, y, y')dx$ (продолжение)

1. Условный экстремум. В конкретных задачах вариационного исчисления, кроме условий $y(a) = y(b)$, иногда накладываются дополнительные условия связей вида

$$G(y) = \int_a^b g(x, y, y')\, dx = C \qquad (C \text{ — заданная постоянная}).$$

Такова, например, задача Дидоны, где требуется найти линию $y = y(x)$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$, которая при заданной длине $L > b - a$ ограничивает вместе с отрезком $[a, b]$ наибольшую площадь. Здесь подлежит исследованию на экстремум функционал

$$F(y) = \int_a^b y\, dx$$

при условиях закрепления $y(a) = y(b) = 0$ и условии связи

$$G(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = L.$$