Если $A(x)$ — непрерывная функция и

$$\int_a^b A(x)\, h^{(n)}(x)\, dx = 0$$

для всякой функции $h(x) \in D_n(a, b)$, равной нулю при $x=a$ и $x=b$ вместе с производными до порядка $n-1$, то $A(x)$ есть многочлен степени $< n$.

Указание. Положить

$$h^{(n)} x = p(x), \quad h(x) = \int_a^x \ldots \int_a^x p(x)\, dx^n = \frac{1}{n!} \int_a^x p(\xi)(x-\xi)^{n-1} d\xi$$

(формула Дирихле). Условие теоремы теперь можно выразить так: интеграл

$$\int_a^b A(x)\, p(x)\, dx$$

равен нулю на всякой функции $p(x)$, для которой

$$\int_a^b x^k p(x)\, dx = 0$$

при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Применить далее результат задачи 3 § 9 гл. II

§ 4. Функционалы вида $\int_a^b f(x, y, y')dx$ (продолжение)

1. Условный экстремум. В конкретных задачах вариационного исчисления, кроме условий $y(a) = y(b)$, иногда накладываются дополнительные условия связей вида

$$G(y) = \int_a^b g(x, y, y')\, dx = C \qquad (C \text{ — заданная постоянная}).$$

Такова, например, задача Дидоны, где требуется найти линию $y = y(x)$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$, которая при заданной длине $L > b - a$ ограничивает вместе с отрезком $[a, b]$ наибольшую площадь. Здесь подлежит исследованию на экстремум функционал

$$F(y) = \int_a^b y\, dx$$

при условиях закрепления $y(a) = y(b) = 0$ и условии связи

$$G(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = L.$$

Абстрактная формулировка задачи следующая: *найти экстремум дифференцируемого функционала $F(y)$ на «кривом» многообразии, описываемом уравнением*

$$G(y) = C,$$

где $G(y)$ — некоторый другой дифференцируемый функционал.

При решении этой задачи мы дополнительно предположим, что искомая точка не является стационарной точкой функционала G. Поэтому стационарные точки функционала G, вообще говоря, должны быть исследованы особо. Основой для решения нашей задачи будет тот факт, что в искомой точке экстремума по-прежнему вариация функционала F должна обращаться в нуль, но уже не для всех возможных смещений h, а только для тех h, которые отвечают неизменному значению функционала G. Точнее говоря, мы утверждаем следующее: *в искомой точке экстремума для любого вектора h, удовлетворяющего уравнению*

$$\delta G(y, h) = 0,$$

также должно удовлетворяться и уравнение

$$\delta F(y, h) = 0.$$

Допустим, напротив, что для некоторого $h = h_0$ имеем

$$\delta G(y, h_0) = 0, \quad \delta F(y, h_0) = A \neq 0.$$

Тогда при любом t, $|t| \leqslant 1$, будет

$$\delta G(y, th_0) = 0, \quad \delta F(y, th_0) = tA \neq 0 \text{ при } t \neq 0.$$

Смещение th_0 выводит нас, вообще говоря, за пределы поверхности $G(y) = C$, и мы имеем $G(y + th_0) \neq C$. Выберем произвольно вектор h_1, для которого линейный функционал $\delta G(y, h_1) \neq 0$, и с помощью подходящего числа s подправим смещение th_0 так, чтобы смещение $th_0 + sh_1$ удовлетворяло уравнению

$$G(y + th_0 + sh_1) = C.$$

Можно показать, что для всех достаточно малых t число s существует и является бесконечно малой более высокого порядка, чем t, так что $\frac{s}{t} \to 0$ при $t \to 0$.

Действительно, напишем уравнение

$$G(y + th_0 + sh_1) = G(y).$$

Так как G — дифференцируемый функционал, то

$$G(y + th_0 + sh_1) = G(y) + \delta G(th_0 + sh_1) + r(th_0 + sh_1),$$

где $r(h)$ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $|h|$. Так как $\delta G(h_0)=0$, $\delta G(h_1)=b\neq 0$, то мы получаем уравнение

$$K(s, t)\equiv sb+r(th_0+sh_1)=0. \qquad (1)$$

Функция $r(th_0+sh_1)$ дифференцируема по t и s вместе с $G(y+th_0+sh_1)$, причем по условию $\left.\frac{\partial r(th_0+sh_1)}{\partial t}\right|_{\substack{s=0\\t=0}}=\left.\frac{\partial r(th_0+sh_1)}{\partial s}\right|_{\substack{s=0\\t=0}}=0$. Мы видим, что для функции $K(s, t)$ выполнены условия теоремы о неявной функции; из уравнения (1) можно выразить s как однозначную функцию от t, обращающуюся в нуль при $t=0$. Это — дифференцируемая функция от t, причем

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{\substack{s=0\\t=0}}:\left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{\substack{s=0\\t=0}}=0,$$

так что s есть бесконечно малая более высокого порядка, чем t.

Далее, для функционала F мы имеем:

$$F(y+th_0+sh_1)-F(y)=\delta F(y,\ th_0+sh_1)+\ldots=$$
$$=t\delta F(y,\ h_0)+s\delta F(y,\ h_1)+\ldots=ta+\ldots,$$

где многоточием заменены бесконечно малые высшего порядка по сравнению с t. Это выражение имеет заведомо разные знаки при t положительном и отрицательном (достаточно малом по модулю); поэтому функционал F не может иметь экстремума в точке y, когда G сохраняет постоянное значение C.

Таким образом, наше утверждение доказано. Извлечем теперь из него правило для определения искомой экстремальной точки.

Для этого воспользуемся одной простой леммой из общей теории линейных функционалов.

Лемма. *Если линейный функционал $F(h)$ обращается в нуль на всяком векторе h_0, на котором обращается в нуль линейный функционал $G(h)$, то функционал $F(h)$ пропорционален функционалу $G(h)$:*

$$F(h)=\lambda G(h) \quad (\lambda \text{ фиксировано}). \qquad (2)$$

Доказательство. Если $G(h)\equiv 0$, то и $F(h)\equiv 0$ и равенство (2) выполняется с любым λ. Пусть $G(h)\not\equiv 0$, так что имеется вектор h_1, для которого $G(h_0)=b\neq 0$. Тогда для любого h можно найти такое число t, что

$$G(h-th_0)=G(h)-tG(h_0)=0.$$

Очевидно, что это уравнение удовлетворяется при $t=\frac{G(h)}{G(h_0)}=0$. По условию,

$$F(h-th_0)=0,$$

откуда

$$F(h)=tF(h_0)=G(h)\frac{F(h_0)}{G(h_0)}=\lambda G(h),$$

где

$$\lambda=\frac{F(h_0)}{G(h_0)},$$

и лемма доказана.

Мы видели, что линейный функционал $\delta F(y, h)$ обращается в нуль на любом векторе h, на котором равен нулю функционал $\delta G(y, h)$. В силу доказанной выше леммы имеет место (для всех h) равенство

$$\delta F = \lambda \delta G,$$

или

$$\delta(F - \lambda G) = 0.$$

Таким образом, искомая экстремальная точка y определяется как такая, для которой функционал

$$H = F - \lambda G$$

при некотором (неизвестном) λ имеет стационарное значение (во всем пространстве). Если мы умеем находить y из такого условия, то для каждого λ получим стационарную точку $y(\lambda)$; но из всех λ годятся только те, для которых соответствующая точка $y(\lambda)$ удовлетворяет уравнению связи

$$G(y(\lambda)) = C.$$

Выведенное правило аналогично известному правилу множителей Лагранжа из теории условного экстремума функций нескольких переменных.

Пример. Найти экстремум функционала

$$F(y) = \int\limits_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

при условиях $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ и

$$G(y) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = C. \tag{3}$$

Здесь

$$H = F - \lambda G = \int\limits_a^b (y - \lambda)\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Обозначая $y - \lambda = z$, получаем задачу об экстремуме функционала

$$H(z) = \int\limits_a^b z\sqrt{1 + z'^2}\,dx$$

при условиях $z(a) = y_a - \lambda$, $z(b) = y_b - \lambda$. Решением служит, как мы знаем, дуга цепной линии; число λ при этом определяется из условия (3), фиксирующего длину этой дуги. Стационарная точка функционала $G(y)$ — единственная; она отвечает прямолинейному отрезку, соединяющему точки (a, y_a) и (b, y_b), причем $G(y)$ становится равным длине l этого отрезка. Очевидно, что при условии $G(y)=l$ задача теряет смысл.

Задачи. 1. Решить задачу Дидоны; найти линию $y=y(x)$, $y(b)=y(a)=0$, которая при заданной длине $L>b-a$ ограничивает вместе с отрезком $a\leqslant x\leqslant b$ наибольшую площадь.

Отв. Дуга окружности.

2. Среди всех замкнутых кривых заданной длины L найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

Указание. Применить полярную систему координат. Показать, что уравнение Эйлера для функционала $F-\lambda G$ означает, что кривизна искомой кривой постоянна.

Отв. Окружность.

3. Найти тело вращения наименьшего объема с данной площадью осевого сечения.

Отв. Цилиндр.

4. Найти тело вращения наибольшего объема с данной боковой поверхностью.

Отв. Тело вращения кругового сегмента вокруг хорды.

5. Дифференцируемые функционалы $G_1(y), \ldots, G_n(y)$ называются независимыми в точке y_0, если их вариации $\delta G_1(y_0, h), \ldots, \delta G_n(y_0, h)$ линейно независимы. Показать, что $y\longrightarrow\{G_1(y), \ldots, G_n(y)\}$ есть отображение окрестности точки $y_0\in E$ *на* окрестность точки $\{G_1(y_0), \ldots, G_n(y_0)\}$ в n-мерном пространстве, если функционалы $G_1, \ldots, G_n$ независимы в точке y_0.

Указание. Найдя n элементов $h_1, \ldots, h_n$ так, чтобы иметь $\det\|G_j(h_k)\|\neq 0$ (задача 4 к § 9 гл. II), применить теорему о неявных функциях к системе уравнений (ξ_j заданы, t_j неизвестны)

$$G_j(y_0+t_1h_1+\ldots+t_nh_n)=G_j(y_0)+\xi_j \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

6. Показать, что задача на экстремум функционала

$$F(y)=\int\limits_a^b f(x, y, y')\,dx$$

с n дополнительными условиями

$$G_1(y)=\int\limits_a^b g_1(x, y, y')=C_1, \ \ldots, \qquad G_n(y)=\int\limits_a^b g_n(x, y, y')\,dx=C_n$$

в предположении, что $G_j(y)$ независимы, приводится к задаче на экстремум функционала

$$F-\lambda_1G_1-\ldots-\lambda_nG_n=\int\limits_a^b [f(x, y, y')-\lambda_1g_1(x, y, y')-\ldots-\lambda_ng_n(x, y, y')]\,dx.$$

Указание. Используя задачу 5, показать, что в искомой точке экстремума для всякого смещения h, удовлетворяющего условиям $\delta G_1(y, h)=\ldots$ $\ldots=\delta G_n(y, h)=0$, должно удовлетворяться также уравнение $\delta F(y, h)=0$. Далее использовать результат задачи 3 § 9 гл. II.

2. Задачи с подвижными концами. Теперь мы рассмотрим случаи, когда искомая кривая $y=y(x)$ подчинена граничным условиям иного типа, так что концы ее не закреплены в точках (a, y_a) и (b, y_b), а могут перемещаться по заданным кривым. Задачи такого рода часто встречаются в геометрии и механике.

Рассмотрим вначале случай, когда левый конец искомой кривой по-прежнему закреплен, а у правого фиксирована только абсцисса b.

Вариация функционала $F(y)$, как и раньше, имеет вид

$$\delta F(y, h)=\int_a^b [f_y h+f_{y'}h']\,ax,$$

но функция $h(x)$ уже не обязана обращаться в нуль в точке $x=b$. Интегрируя второе слагаемое по частям, получаем

$$\delta F(y, h)=f_{y'}\Big|_{x=b} h(b)+\int_a^b \left[f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}\right] h\,dx.$$

В искомой точке экстремума вариация $\delta F(y, h)$ должна быть равна нулю, какова бы ни была функция смещения $h(x)$. Если рассмотреть сначала только функции смещения с условием $h(b)=0$, то, как и раньше, находим, что искомая кривая удовлетворяет уравнению Эйлера

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0, \tag{1}$$

т. е. эта кривая есть одна из экстремалей функционала F. Вместе с тем в точке экстремума вариация функционала F приводится к виду

$$\delta F(y, h)=f_{y'}\,|_{x=b}\, h(b). \tag{2}$$

Так как $h(b)$ произвольно, то условие экстремума $\delta F=0$ приводит к уравнению

$$f_{y'}(b, y(b), y'(b))=0, \tag{3}$$

которому должна удовлетворять искомая кривая.

Пример. Один из вариантов задачи о брахистохроне (стр. 101) состоит в определении кривой $y=y(x)$, скатываясь по которой из начала координат материальная точка быстрее всего достигнет прямой $x=b$. Функционал $F(y)$ имеет, как мы помним, вид

$$F(y)=\int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx.$$

Экстремали функционала $F(y)$, проходящие через начало координат, суть циклоиды

$$x = C(\theta - \sin\theta), \qquad y = C(1 - \cos\theta). \tag{4}$$

Условие (3) в данном случае, как легко видеть, приводится к виду

$$y'(b) = 0.$$

Мы должны, следовательно, среди всех циклоид (4) выбрать такую, которая пересекает прямую $x = b$ под прямым углом, т. е. такую, у которой y принимает наибольшее значение при $x = b$. Наибольшее значение достигается координатой y при $\theta = \pi$; отсюда для C получается уравнение

$$b = C\pi.$$

Таким образом, искомая кривая имеет уравнения

$$x = \frac{b}{\pi}(\theta - \sin\theta), \qquad y = \frac{b}{\pi}(1 - \cos\theta).$$

Перейдем к случаю, когда правому концу искомой кривой предписано находиться на заданной линии с уравнением $y = b(x)$. Функционал $F(y)$ имеет в данном случае вид

$$F(y) = \int_a^\xi F(x, y, y')\,dx,$$

так что подлежит определению не только функция $y = y(x)$, но и правый конец ξ интервала интегрирования. В качестве линейного нормированного пространства, в котором определен функционал $F(y)$, мы возьмем, естественно, пространство $D_1(a, b)$ всех функций с непрерывными производными на отрезке $[a, b]$, заключающем в себе все возможные положения точки ξ.

Приращение функционала $F(y)$ при замене функционального аргумента $y(x)$ на $y(x) + h(x)$ можно записать в форме

$$\Delta F(y, h) = \int_a^\xi [f(x, y+h, y'+h') - f(x, y, y')]\,dx + \int_\xi^{\xi+\Delta\xi} f(x, y+h, y'+h')\,dx. \tag{5}$$

Главная линейная часть первого слагаемого вычисляется так же, как и в предыдущем случае:

$$\delta_1 F(y, h) = \int_a^\xi \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) h\,dx + f_{y'}\Big|_{x=\xi} h(\xi). \tag{6}$$

Приращение $\Delta\xi$ абсциссы ξ, величина $h(\xi)$ и угловой коэффициент кривой $y = b(x)$, по которой движется правый конец искомой линии, связаны соотношением (см. рис. 7)

$$[b'(\xi) - y'(\xi)]\,\Delta\xi = h(\xi),$$

откуда $\Delta\xi$ линейно выражается через $h(\xi)$:

$$\Delta\xi = \frac{h(\xi)}{b'(\xi) - y'(\xi)}.$$

Будем считать, что заданная линия отлична от экстремали, так что $b'(\xi) \neq y'(\xi)$. Теперь мы можем найти главную линейную часть второго слагаемого в равенстве (5):

$$\delta_2 F(y, h) = \Delta\xi f(\xi, y(\xi), y'(\xi)) = \frac{h(\xi)}{b'(\xi) - y'(\xi)} f(\xi, y, y'). \qquad (7)$$

Складывая (6) и (7), получаем:

$$\delta F(y, h) = \delta_1 F(y, h) + \delta_2 F(y, h) =$$
$$= \int_a^\xi \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) h\,dx + \left[f_{y'} + \frac{f}{b'(x) - y'(x)}\right]\Bigg|_{x=\xi} h(\xi).$$

В искомой точке экстремума вариация $\delta F(y, h)$ должна быть равна нулю, какова бы ни была функция смещения $h(x)$. Если рассмотреть вначале только такие функции смещения, для которых $h(\xi) = 0$, то второе слагаемое, как и раньше, пропадает, и получается, что искомая кривая должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0.$$

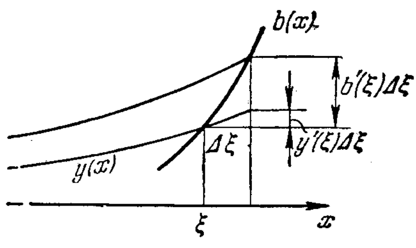

Рис. 7.

Как и ранее, искомая кривая есть одна из экстремалей функционала F. Вместе с тем для общей функции смещения в точке экстремума получаем уравнение

$$\left[f_{y'} + \frac{f}{b'(x) - y'(x)}\right]\Bigg|_{x=\xi} h(\xi) = 0,$$

что в силу произвольности $h(\xi)$ приводит к условию

$$f + [b'(x) - y'(x)]\,f_{y'}\,|_{x=\xi} = 0. \qquad (8)$$

Это соотношение накладывает в точке линии $y=b(x)$ добавочную связь на элементы $y(x)$ и $y'(x)$ искомой кривой, которая и может быть теперь полностью определена.

Пример. Какая кривая реализует минимум расстояний между точками A и B, первая из которых неподвижна, $A=A(0,\ 0)$, а вторая может перемещаться по заданной кривой $y=b(x)$?

Мы имеем дело с функционалом

$$F(y)=\int_0^{\xi}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Экстремали этого функционала — прямые: первому условию задачи отвечают только те прямые, которые проходят через начало координат:

$$y=kx.$$

Условие (8) приобретает вид

$$\sqrt{1+k^2}+[b'(x)-k]\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}=0,$$

или, что то же,

$$kb'(x)=-1.$$

Это означает, что искомая прямая $y=kx$ должна пересекать заданную кривую $y=b(x)$ ортогонально.

Условие (8) называют обычно условием *трансверсальности;* искомая экстремаль должна пересекать заданную кривую *трансверсально.*

Замечание. Мы рассмотрели только такие случаи, когда правый конец искомой кривой может двигаться по заданной линии. Если и левый конец может двигаться по заданной линии, то таким же способом, как и выше, можно показать, что искомая кривая — экстремаль функционала F и что условие трансверсальности должно выполняться и для левого и для правого конца этой экстремали.

Задачи. 1. Если $f(x,\ y,\ y')=A(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}$, то условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности.

2. Найти вариацию функционала

$$F(y)=\int_0^1 y^3y'^2\,dx$$

с единственным условием $y(0)=1$.

Отв. $\delta F(y,\ h)=\int_0^1[3y^2y'^2h+2y^3y'h']\,dx=$

$$=\int_0^1[3y^2y'^2-2(y^3y')']\,h\,dx+2y^3(1)\,y'(1)\,h(1).$$

3. Написать вариацию функционала

$$F(y)=\int\limits_0^{x_0}[y^2+y'^2]\,dx$$

при условиях $y(0)=0$, $y(x_0)=e^{2x_0}$.

Отв.

$$\delta F(y,\ h)=\int\limits_0^{x_0}[2y-2y'']\,h(x)\,dx+\frac{y^2(x_0)+y'^2(x_0)}{2e^{2x_0}-y'(x_0)}\,h(x_0).$$

4. Написать вариацию функционала

$$F(y)=\int\limits_{x_0}^{x_1}[y^2+y'^2]\,dx$$

при условиях $y(x_0)=\varphi(x_0)$, $y(x_1)=\psi(x_1)$.

Отв.

$$\delta F(y,\ h)=2\int\limits_{x_0}^{x_1}(y-y'')\,h\,dx+\frac{y^2(x_0)+y'^2(x_0)}{\varphi'(x_0)-y'(x_0)}\,h(x_0)+\frac{y^2(x_1)+y'^2(x_1)}{\psi'(x_1)-y'(x_1)}\,h(x_1).$$

5. Ломаные экстремали. Допустим, что в классе всех кусочно-гладких кривых $y=y(x)$ с фиксированными значениями $y(a)$ и $y(b)$ и одной угловой точкой при некотором $x=\xi$ экстремум функционала $F(y)=\int\limits_a^b f(x,\ y,\ y')\,dx$ реализуется на кривой $y_0(x)$. Доказать, что $y_0(x)$ при $x<\xi$ и при $x>\xi$ есть решение уравнения Эйлера и при переходе через угловую точку выражения $f_{y'}(x,\ y_0(x),\ y_0'(x))$ и $f(x,\ y_0,\ y_0')-y_0'f_{y'}(x,y_0,y_0')$ остаются непрерывными (правило Вейерштрасса — Эрдмана).

Указание. Если угловая точка $(\xi,\ y(\xi))$ перемещается по кривой $\beta=\beta(\xi)$, то вариации слагаемых $\int\limits_a^\xi$ и $\int\limits_\xi^b$ должны компенсироваться. Учесть соотношение

$$\frac{h(\xi-0)}{h(\xi+0)}=\frac{\beta'(\xi)-y'(\xi-0)}{\beta'(\xi)-y'(\xi+0)},$$

ясное из геометрических соображений.

6. Закон отражения экстремалей. В предположениях предыдущей задачи найти условие, необходимое для того, чтобы ломаная экстремаль имела точку излома на заданной линии $y=\beta(x)$, располагаясь по одну сторону от этой линии.

Отв. Непрерывность выражения $f_{y'}(\beta'-y')+f$.

7. Закон преломления экстремалей. Кривая $y=\beta(x)$ делит плоскость на две части A и B, в одной из которых находится точка $(a,\ y(a))$,

в другой — точка $(b, y(b))$. В классе кусочно-гладких кривых $y=y(x)$ с единственной точкой излома на кривой $y=\beta(x)$ найти такую, на которой достигает экстремума функционал

$$\int_a^b f(x, y, y')\,dx, \quad f(x, y, y')=\begin{cases} g(x, y, y') & \text{при} \quad (x, y)\in A, \\ h(x, y, y') & \text{при} \quad (x, y)\in B. \end{cases}$$

Отв. Искомая кривая в каждой из областей A, B есть решение соответствующего уравнения Эйлера. При переходе через линию раздела выполняется условие

$$g_{y'}(\beta'-y'_A)+g=h_{y'}(\beta'-y'_B)+h.$$

§ 5. Функционалы с несколькими неизвестными функциями

Функционал вида

$$F(y)=\int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\,dx \tag{1}$$

рассматривается в линейном пространстве $D_1^{(n)}(a, b)$ вектор-функций $y=[y_1(x), \ldots, y_n(x)]$, определенных на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и обладающих непрерывными производными 1-го порядка; норма в этом пространстве задается формулой

$$\|y\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|y_1(x)|, \ldots, |y_n(x)|, |y'_1(x)|, \ldots, |y'_n(x)|\}.$$

Если функция f имеет непрерывные производные до второго порядка по всем своим аргументам, то, как мы видели в § 2 (стр. 87), функционал (1) дифференцируем в пространстве $D_1^{(n)}$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(y, h)=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y_1}h_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y_n}h_n+\frac{\partial f}{\partial y'_1}h'_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial y'_n}h'_n\right]dx.$$

Здесь вектор смещения h есть вектор-функция $[h_1(x), \ldots, h_n(x)]$ из того же пространства $D_1^{(n)}$.

В искомой экстремальной точке вариация функционала F обращается в нуль для всех h. В частности, если все компоненты вектора смещения, кроме одной, $h_j(x)$, положить равными нулю, то мы получим уравнение

$$\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y_j}h_j(x)+\frac{\partial f}{\partial y'_j}h'_j(x)\right]dx=0. \tag{2}$$