в другой — точка $(b, y(b))$. В классе кусочно-гладких кривых $y=y(x)$ с единственной точкой излома на кривой $y=\beta(x)$ найти такую, на которой достигает экстремума функционал

$$\int_a^b f(x, y, y')\,dx, \quad f(x, y, y')=\begin{cases} g(x, y, y') & \text{при} \quad (x, y)\in A, \\ h(x, y, y') & \text{при} \quad (x, y)\in B. \end{cases}$$

*Отв.* Искомая кривая в каждой из областей $A$, $B$ есть решение соответствующего уравнения Эйлера. При переходе через линию раздела выполняется условие

$$g_{y'}(\beta'-y'_A)+g=h_{y'}(\beta'-y'_B)+h.$$

## § 5. Функционалы с несколькими неизвестными функциями

Функционал вида

$$F(y)=\int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\,dx \tag{1}$$

рассматривается в линейном пространстве $D_1^{(n)}(a, b)$ вектор-функций $y=[y_1(x), \ldots, y_n(x)]$, определенных на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и обладающих непрерывными производными 1-го порядка; норма в этом пространстве задается формулой

$$\|y\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|y_1(x)|, \ldots, |y_n(x)|, |y'_1(x)|, \ldots, |y'_n(x)|\}.$$

Если функция $f$ имеет непрерывные производные до второго порядка по всем своим аргументам, то, как мы видели в § 2 (стр. 87), функционал (1) дифференцируем в пространстве $D_1^{(n)}$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(y, h)=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y_1}h_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y_n}h_n+\frac{\partial f}{\partial y'_1}h'_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y'_n}h'_n\right]dx.$$

Здесь вектор смещения $h$ есть вектор-функция $[h_1(x), \ldots, h_n(x)]$ из того же пространства $D_1^{(n)}$.

В искомой экстремальной точке вариация функционала $F$ обращается в нуль для всех $h$. В частности, если все компоненты вектора смещения, кроме одной, $h_j(x)$, положить равными нулю, то мы получим уравнение

$$\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y_j}h_j(x)+\frac{\partial f}{\partial y'_j}h'_j(x)\right]dx=0. \tag{2}$$

Будем решать экстремальную задачу на линейном многообразии вектор-функций $y=[y_1(x), \ldots, y_n(x)]$ с заданными граничными значениями

$$y(a)=[y_1(a), \ldots, y_n(a)] \text{ и } y(b)=[y_1(b), \ldots, y_n(b)].$$

Тогда, предполагая, что искомые функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ дважды дифференцируемы по $x$, и применяя методику § 3, получим из (2) уравнение Эйлера

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_j'}=0. \tag{3}$$

Система уравнений Эйлера (3) при $j=1, 2, \ldots, n$ представляет собой систему $n$ уравнений второго порядка с $n$ неизвестными функциями. Общее решение такой системы содержит $2n$ произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_{2n}$; выбирая их должным образом, мы получаем возможность выделить решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям.

Впрочем, от предположения существования вторых производных можно освободиться, применяя тот же прием с леммой Дю-Буа-Реймонда, что и в § 3. Вместо предположения $\frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial y'} \neq 0$ здесь нужно будет использовать предположение $\det\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial y_j'\partial y_k'}\right\| \neq 0$.

***Пример.*** Уравнения геодезических линий. Предположим, что квадрат дифференциала дуги на $n$-мерной поверхности $L$ задан формулой

$$ds^2=\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(u)\,du_j du_k,$$

так что длина дуги кривой между точками $A$ и $B$ выражается равенством

$$S=\int_A^B \sqrt{\sum a_{jk}(u)\,du_j du_k}.$$

Коэффициенты $a_{jk}(u)$ предполагаются дифференцируемыми по всем аргументам $u_1, \ldots, u_n$, а квадратичная форма $\sum a_{jk}(u)\,du_j du_k$ — положительно определенной.

Найдем линии, на которых этот функционал имеет экстремальное значение. Считая, что $u_j$ выражены как функции параметра $t$, получим систему уравнений Эйлера

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\sum\frac{\partial a_{jk}}{\partial u_l}u_j'u_k'-\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{g}}\sum a_{jl}u_j'=0 \quad (l=1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

где положено $g(u)=\sum_{j,k} a_{jk}u_j'u_k'$. Эта величина обращается в 1, если параметром $t$ служит длина дуги, что мы далее и предположим. Тогда уравнения (4) переходят в

$$\frac{1}{2}\sum\frac{\partial a_{jk}}{\partial u_l}u_j'u_k'-\frac{d}{dt}\sum a_{jl}u_j'=0 \quad (l=1, 2, \ldots, n).$$

Но, с другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\sum_j a_{jl}u_j' = \sum_{j,k}\frac{\partial a_{jl}}{\partial u_k}u_k' u_j' + \sum_j a_{jl}u_j'' =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j,k}\left(\frac{\partial a_{jl}}{\partial u_k}u_k' u_j' + \frac{\partial a_{kl}}{\partial u_j}u_j' u_k'\right)\right] + \sum_j a_{jl}u_j'',$$

и поэтому уравнения могут быть записаны в виде

$$\sum_j a_{jl}u_j'' = \frac{1}{2}\sum_j\sum_k\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial u_l} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial u_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial u_j}\right)u_j' u_k'. \qquad (5)$$

Так как форма $g = \sum a_{jk}u_j' u_k'$ не вырождена, то $\det \| a_{jk} \| \neq 0$, и следовательно, уравнения (5) можно разрешить относительно $u_j''$. Обозначая при этом

$$\Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{jk}}{\partial u_l} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial u_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial u_j}\right],$$

получим систему уравнений вида

$$u_m'' = \sum A_{lm}\Gamma_{jk}^l u_j' u_k'.$$

Применяя общие теоремы о существовании и единственности решения системы второго порядка, мы заключаем, что *через каждую точку поверхности $L$* (точнее через каждую неособенную точку, т. е. такую, в которой форма $g$ не вырождается) *в каждом направлении проходит единственная геодезическая линия.*

Уравнения движения системы материальных точек. Пусть дана система из $n$ материальных точек с массами $m_1, \ldots, m_n$. Координаты $j$-й точки обозначим через $x_j, y_j, z_j$. Движение системы описывается, как известно, системой уравнений Ньютона

$$m_j\ddot{x}_j = F_{jx}, \quad m_j\ddot{y}_j = F_{jy}, \quad m_j\ddot{z}_j = F_{jz} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (6)$$

где точка, поставленная над буквой, означает дифференцирование по времени, а $F_{jx}, F_{jy}, F_{jz}$ суть составляющие силы $F_j$, действующей на $j$-ю точку. Предположим, что силы $F_j$ обладают потенциальной функцией $U = U(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$; это означает, что выполняются равенства

$$F_{jx} = -\frac{\partial U}{\partial x_j}, \quad F_{jy} = -\frac{\partial U}{\partial y_j}, \quad F_{jz} = -\frac{\partial U}{\partial z_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Существование потенциальной функции $U$ позволяет вычислять работу сил, действующих на систему, на перемещениях $dx_1, dy_1, \ldots, dz_n$, как «разность потенциалов»:

$$\sum F_{jx}dx_j + F_{jy}dy_j + F_{jz}dz_j =$$
$$= -\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial z_n}dz_n\right) = -dU.$$

Функция

$$T=\sum \frac{m_j}{2}(\dot{x}_j^2+\dot{y}_j^2+\dot{z}_j^2)=T(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n),$$

как известно, называется кинетической энергией системы. Введем два важных функционала

$$J_1=\int_a^b T(\dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_n)\,dt \quad \text{и} \quad J_2=\int_a^b U(t, x_1, \ldots, z_n)\,dt.$$

Считая, что начальное положение системы $x_1(a), \ldots, z_n(a)$ и конечное положение $x_1(b), \ldots, z_n(b)$ фиксированы, найдем вариации обоих функционалов $J_1$ и $J_2$. Обозначая компоненты вектора смещения соответственно через $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, будем иметь

$$\delta J_1=\int_a^b \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\delta\dot{x}_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_n}\delta\dot{z}_n\right]dt$$

или, интегрируя каждое слагаемое по частям и учитывая, что

$$\delta x_1(a)=\delta x_1(b)=\ldots=\delta z_n(a)=\delta z_n(b)=0,$$

$$\delta J_1=-\int_a^b \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\delta x_1+\ldots+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_n}\delta z_n\right]dt=$$

$$=-\int_a^b [m_1\ddot{x}_1\delta x_1+\ldots+m_n\ddot{z}_n\delta z_n]\,dt.$$

Далее

$$\delta J_2=\int_a^b \left[\frac{\partial U}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots+\frac{\partial U}{\partial z_n}\delta z_n\right]dt=-\int_a^b [F_{1x}\delta x_1+\ldots+F_{nz}\delta z_n]\,dt.$$

В силу уравнений Ньютона (6) имеем

$$\delta J_1=\delta J_2,$$

откуда

$$\delta(J_1-J_2)=0.$$

Мы видим, что *на функциях $x_1(t), \ldots, z_n(t)$, описывающих действительное движение системы в промежутке времени $a \leqslant t \leqslant b$, функционал*

$$J_1-J_2=\int_a^b (T-U)\,dt$$

*имеет стационарное значение.*

Основная задача механики системы материальных точек, таким образом, оказывается задачей вариационного исчисления.

Впервые этот факт обнаружил У. Гамильтон (в 1835 г.), поэтому указанный результат носит название вариационного принципа Гамильтона.

Функция $L=T-U=L(x_1, \ldots, z_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_n)$ называется *функцией Лагранжа* для рассматриваемой системы.

Движение системы часто можно записывать с помощью не $3n$ функций $x_1, \ldots, z_n$, а меньшего числа переменных, в соответствии с числом степеней свободы (т. е. числом, меньшим $3n$ на число независимых связей). Если $r$ — число степеней свободы, то положение системы определяется $r$ параметрами — «обобщенными координатами» $q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_r$. При этом, в частности, через параметры $q_1, \ldots, q_r$ выражаются и все прямоугольные координаты точек системы

$$\left.\begin{aligned} x_j&=x_j(q_1, \ldots, q_r),\\ y_j&=y_j(q_1, \ldots, q_r),\\ z_j&=z_j(q_1, \ldots, q_r), \end{aligned}\right\} \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда

$$\dot{x}_j=\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k, \qquad \dot{y}_j=\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial y_j}{\partial q_k}\dot{q}_k, \qquad \dot{z}_j=\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial z_j}{\partial q_k}\dot{q}_k,$$

и, следовательно, кинетическая энергия

$$T=\sum\frac{m_j}{2}(\dot{x}_j^2+\dot{y}_j^2+\dot{z}_j^2)$$

есть некоторая квадратичная форма от «обобщенных скоростей» $\dot{q}_j$:

$$T=\sum_{j,\,k}a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k,$$

коэффициенты которой — функции от обобщенных координат. Потенциальная функция $U(x_1, \ldots, z_n)$ таким же образом есть функция от обобщенных координат

$$U=U(q_1, \ldots, q_r).$$

Функция Лагранжа $L=T-U$ оказывается теперь функцией от $q_1, \ldots, q_r, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_r$.

Условия стационарности функционала

$$\int_a^b L\,dt,$$

описываемые, как и всегда, уравнениями Эйлера, получают теперь вид

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n); \tag{7}$$

это — так называемая *система уравнений Лагранжа 2-го рода*.

Из уравнений движения можно легко получить условия равновесия, считая, что в положении равновесия кинетическая энергия системы равна нулю. Так как потенциальная функция не зависит от обобщенных скоростей, то для положения равновесия мы получим условия

$$\frac{\partial U}{\partial q_j}=0,$$

т. е. положение равновесия отвечает стационарному значению потенциальной энергии.

Уравнения (7) допускают первый интеграл, называемый *интегралом энергии*. Мы получим его, умножив каждое из уравнений на $dq_j=\dot{q}_j\,dt$ и сложив уравнения

$$\sum\frac{\partial T}{\partial q_j}dq_j-\sum\frac{\partial U}{\partial q_j}dq_j-\sum\dot{q}_j d\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right]=0.$$

Так как

$$\dot{q}_j d\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)=d\left(\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}d\dot{q}_j$$

и в силу однородности формы $T$ относительно величин $\dot{q}_j$

$$\sum\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}=2T,$$

то получаем:

$$\sum\frac{\partial T}{\partial q_j}dq_j-\sum\frac{\partial U}{\partial q_j}dq_j-2dT+\sum\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}d\dot{q}_j=$$
$$=dT-dU-2dT=-(dU+dT)=0,$$

откуда

$$U+T=\text{const}.$$

Таким образом, *полная энергия системы* (сумма потенциальной и кинетической) *остается неизменной во все время движения.*

Последний факт позволяет легко доказать следующую теорему об устойчивом равновесии системы:

Теорема (Лиувилля). *Если в точке* $q^0=(q_1^0,\ldots,q_r^0)$ *потенциальная функция имеет строгий минимум, то для любого* (достаточно малого) $\varepsilon>0$ *найдется такое* $\delta>0$, *что если системе, находящейся в покое в положении* $q_1^0,\ldots,q_r^0$, *придать кинетическую энергию, меньшую* $\delta$, *то во всем дальнейшем движении системы точка* $q=(q_1,\ldots,q_r)$ *не выйдет за пределы окрестности* $|q-q^0|<\varepsilon$.

Доказательство. Так как по условию в точке $q^0$ функция $U(q_1,\ldots,q_r)$ имеет строгий минимум, то найдется шар $|q-q^0|\leqslant\varepsilon$, на границе которого всюду выполняется неравенство

$$U(q_1,\ldots,q_r)>U(q_1^0,\ldots,q_r^0)+\delta,$$

где $\delta$ — положительное фиксированное число. Если системе, находящейся в покое в точке $q^0$, придать кинетическую энергию $T \leqslant \delta$, то в дальнейшем движении полная энергия системы $T+U$ будет постоянной и не будет превосходить $U(q_1^0, \ldots, q_r^0)+\delta$. Но так как при $|q-q^0|=\varepsilon$ уже $U(q_1, \ldots, q_r)$ больше указанной величины, то, какова бы ни была $T(\geqslant 0)$, полная энергия не сможет остаться не превосходящей $U(q_1^0, \ldots, q_r^0)+\delta$. Поэтому точка $q_1, \ldots, q_r$ не выйдет за пределы указанной окрестности.

Более точный анализ, которого мы здесь не приводим[1]), показывает, что в достаточно малой окрестности $|q-q^0| \leqslant \varepsilon$ можно от координат $(q_1, \ldots, q_r)$ перейти (линейным преобразованием) к новым координатам $(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ так, что в новых координатах уравнения движения (с точностью до малых высшего порядка) будут иметь вид

$$\tau_k = \varepsilon_k \cos(\omega_k t + \alpha_k),$$

где $\varepsilon_k$, $\omega_k$, $\alpha_k$ — фиксированные числа ($k=1, 2, \ldots, n$).

Замечание 1. Интересно отметить, что задачу о движении механической системы с $n$ степенями свободы можно трактовать как движение точки по геодезической линии на $n$-мерной поверхности $E=\mathrm{const}$, взятой с некоторой специальной метрикой.

Действительно, функционал, отвечающий кинетической энергии, можно записать в форме

$$\int T\,dt = \int \sqrt{E-U}\sqrt{T}\,dt = \int \sqrt{(E-U)\sum a_{jk}(q)\,\dot{q}_j\dot{q}_k}\,dt,$$

и при условии $E=\mathrm{const}$ экстремум этого функционала и функционала Гамильтона достигается на одной и той же линии.

Замечание 2. Принцип Гамильтона имеет ту характерную особенность, что в его формулировке отсутствует предположение о конечности числа степеней свободы. Поэтому его можно применять и в задачах механики систем с бесконечным числом степеней свободы, в частности в задачах механики сплошных масс, если у этих систем можно вычислить потенциальную и кинетическую энергию. (Применимость принципа Гамильтона и в этом случае следует из того эвристического соображения, что сплошную среду можно рассматривать и как систему из весьма большого, но конечного числа отдельных частичек.) Мы будем рассматривать такие задачи в § 8. Здесь мы рассмотрим только одну задачу о равновесии, именно задачу о форме равновесия гибкой нерастяжимой нити заданной длины $L$, подвешенной за два конца. Элемент нити имеет массу $\mu(x)\,ds$, где $ds$ — элемент длины дуги и $\mu(x)$ — плотность. Сила тяжести $\mu(x)\,ds \cdot g$, действующая на этот элемент, имеет потенциальную функцию $\mu y g\,ds$.

[1]) См., например, Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, изд. 2-е, М., 1956, § 76, стр. 215.

Полная потенциальная энергия нити выражается интегралом

$$U=\int_a^b \mu(x)\,y(x)\,g\,ds=g\int_a^b \mu y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Условие равновесия есть условие минимума функции $U$. Нам известна также длина нити:

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=L.$$

Мы получили задачу на условный экстремум. В случае однородной нити ($\mu(x)=\mathrm{const}$) ее решением (см. § 5) является дуга цепной линии. Итак, гибкая нерастяжимая однородная нить располагается в положении равновесия по цепной линии (откуда и название последней).

## § 6. Функционалы с несколькими независимыми переменными

1. Функционалы вида

$$F(u)=\iint_G f\left(x,\,y,\,u,\,\frac{\partial u}{\partial x},\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy \tag{1}$$

рассматриваются в пространстве $D_1(G)$ функций $u(x,y)$, определенных в плоской (ограниченной) области $G$, непрерывных и обладающих непрерывными производными первого порядка по каждому из аргументов. Норма в этом пространстве задается формулой

$$\|u\|=\max\left\{|u(x,y)|,\ \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|\right\}.$$

Если функция $f(x,y,u,v,w)$ имеет непрерывные производные до второго порядка по аргументам $u$, $v$, $w$, то, как мы видели в § 2 (стр. 86), функционал (1) дифференцируем в пространстве $D_1(G)$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(u,h)=\iint_G\left[\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial u_x}h_x+\frac{\partial f}{\partial u_y}h_y\right]dx\,dy.$$

Здесь $h=h(x,y)$ есть смещение функции $u(x,y)$. В экстремальной точке вариация функционала $F(y)$ обращается в нуль для любого смещения $h(x,y)$:

$$\iint_G\left[\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial u_x}h_x+\frac{\partial f}{\partial u_y}h_y\right]dx\,dy=0.$$

Преобразуем это уравнение интегрированием по частям, считая, что значения функции $u(x,y)$ зафиксированы на границе $\Gamma$ области $G$