Полная потенциальная энергия нити выражается интегралом

$$U = \int_a^b \mu(x) y(x) g\, ds = g \int_a^b \mu y \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Условие равновесия есть условие минимума функции U. Нам известна также длина нити:

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx = L.$$

Мы получили задачу на условный экстремум. В случае однородной нити ($\mu(x) = \mathrm{const}$) ее решением (см. § 5) является дуга цепной линии. Итак, гибкая нерастяжимая однородная нить располагается в положении равновесия по цепной линии (откуда и название последней).

§ 6. Функционалы с несколькими независимыми переменными

1. Функционалы вида

$$F(u) = \iint_G f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy \tag{1}$$

рассматриваются в пространстве $D_1(G)$ функций $u(x, y)$, определенных в плоской (ограниченной) области G, непрерывных и обладающих непрерывными производными первого порядка по каждому из аргументов. Норма в этом пространстве задается формулой

$$\|u\| = \max\left\{ |u(x, y)|, \left|\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right| \right\}.$$

Если функция $f(x, y, u, v, w)$ имеет непрерывные производные до второго порядка по аргументам u, v, w, то, как мы видели в § 2 (стр. 86), функционал (1) дифференцируем в пространстве $D_1(G)$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(u, h) = \iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial u} h + \frac{\partial f}{\partial u_x} h_x + \frac{\partial f}{\partial u_y} h_y\right] dx\, dy.$$

Здесь $h = h(x, y)$ есть смещение функции $u(x, y)$. В экстремальной точке вариация функционала $F(y)$ обращается в нуль для любого смещения $h(x, y)$:

$$\iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial u} h + \frac{\partial f}{\partial u_x} h_x + \frac{\partial f}{\partial u_y} h_y\right] dx\, dy = 0.$$

Преобразуем это уравнение интегрированием по частям, считая, что значения функции $u(x, y)$ зафиксированы на границе Γ области G

и, следовательно, значения функции $h(x, y)$ на этой границе равны нулю. Например, для слагаемого $\frac{\partial f}{\partial u_x}$ мы имеем

$$\int_{A_1}^{B_1} \frac{\partial f}{\partial u_x} h_x\,dx = -\int_{A_1}^{B_1} h(x, y) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) dx$$

и, следовательно,

$$\iint_G \frac{\partial f}{\partial u_x} h_x\,dx\,dy = -\iint_G h\,\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x}\,dx\,dy.$$

Аналогичное преобразование производится со следующим слагаемым. В результате мы получаем уравнение

$$\delta F(y, h) = \iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\right] h(x, y)\,dx\,dy = 0.$$

Так как функция $h(x, y)$ произвольна, то имеет место равенство

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right) = 0, \tag{2}$$

называемое уравнением Эйлера — Остроградского. Это — уравнение в частных производных второго порядка; неизвестная функция $u(x, y)$ должна быть определена как решение этого уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям (известна функция $u(x, y)$ на границе Γ области G). Задача определения функции $u(x, y)$ по уравнению (2) с указанным граничным условием называется *задачей Дирихле*. Так же как и для соответствующих задач для одного переменного, задача Дирихле может иметь решение или не иметь; для многих важных уравнений вида (2) существование и единственность решения доказываются в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Совершенно аналогично уравнение Эйлера — Остроградского можно написать в случае трех или более независимых переменных.

2. ***Пример 1.*** Для функционала

$$F(u) = \iint_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$$

уравнение Эйлера — Остроградского имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

его решения называются гармоническими функциями. Как доказывается в теории уравнений с частными производными, решение задачи Дирихле (и притом единственное) в данном случае существует для любой области G с кусочно-гладкой границей Γ и для любой непрерывной функции $u(x, y)$, заданной на Γ. См. также гл. 5, § 8.

Задача. Найти экстремум функционала

$$F(u)=\int_0^1\int_0^1 e^{u_y} \sin u_y \, dx \, dy$$

при условиях $u(x, 0)=0$, $u(x, 1)=1$.

Отв. $u(x, y)=y$.

Примечание. Эта задача имеет единственное решение, хотя граничные условия заданы не на всей границе.

Функция $u(x, y)$ может быть подчинена и иным граничным условиям (не только условиям закрепления). В этих случаях искомое решение снова будет решением уравнения Эйлера (экстремалью), удовлетворяющим заданным граничным условиям, а также — если этими условиями оно еще не определено однозначно — дополнительным условиям на границе, получаемым из требования, чтобы вариация функционала равнялась нулю (как в задаче для простейшего функционала со свободным концом).

3. ***Пример 2.*** Выведем уравнение малых колебаний струны. Струна, располагающаяся в положении равновесия между точками 0 и l на оси x, совершает малые колебания около этого положения. Принимается, что каждая точка движется только в перпендикулярном к оси x направлении. Обозначим через $u(x, t)$ фигуру струны в момент t; предположим для определенности, что концы 0 и l остаются закрепленными, так что $u(0, t)=u(l, t)=0$. Кинетическая энергия струны, как сумма кинетических энергий ее частиц, выражается интегралом

$$T=\int_0^l u_t^2 \frac{1}{2} \mu \, dx,$$

где $\mu \, dx$ есть масса элемента струны, отвечающего интервалу dx на оси x. Величина $\mu=\mu(x)$ есть плотность струны в точке x. Важнейшей характеристикой струны является ее потенциальная энергия; выражение потенциальной энергии, собственно говоря, есть фактическое определение струны с механической точки зрения. *Струна есть одномерная механическая система, потенциальная энергия каждого участка которой пропорциональна его удлинению по сравнению* *с положением равновесия.* Таким образом, мы имеем

$$dU = p(x)\left[\sqrt{1+u_x^2}\,dx - dx\right].$$

Коэффициент $p = p(x)$, фигурирующий в этом равенстве, называется модулем упругости струны (модулем Юнга). Считая, что u_x — настолько малая величина, что четвертой степенью u_x можно пренебречь, получим:

$$\left(\sqrt{1+u_x^2} - 1\right)dx \cong \frac{u_x^2}{2}\,dx$$

$$U = \int_0^l \frac{p(x)}{2}\,u_x^2\,dx.$$

Функция Лагранжа $L = T - U$ имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\mu u_t^2 - p u_x^2\right] dx.$$

Функционал Гамильтона $\int L\,dt$ теперь будет двойным интегралом

$$\frac{1}{2}\int_0^l \int_a^b \left[\mu u_t^2 - p u_x^2\right] dx\,dt.$$

Напишем уравнение Эйлера — Остроградского:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t) + \frac{\partial}{\partial x}(p u_x) = 0. \tag{3}$$

Если μ и p постоянны (т. е. струна однородна по плотности и упругости), то мы получим уравнение

$$\mu u_{tt} - p u_{xx} = 0, \tag{4}$$

которое нас и интересовало.

Граничные условия, естественные с физической точки зрения, здесь можно взять следующие: при $t = 0$ заданы значения функции $u(x, 0)$ (т. е. известна форма начального отклонения) и функции $u_t(x, 0)$ (известна начальная скорость каждой точки). Покажем, что они определяют лишь единственное решение уравнения (3). Если бы имелось два решения уравнения струны $u^{(1)}(x, t)$ и $u^{(2)}(x, t)$, отвечающие одинаковым значениям $u^{(1)}(x, 0) = u^{(2)}(x, 0)$ и $u^{(1)}_{(t)}(x, 0) = u^{(2)}_{(t)}(x, 0)$, то их разность $u(x, t) = u^{(1)}(x, t) - u^{(2)}(x, t)$ была бы также решением, удовлетворяющим нулевым условиям $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$. Мы должны доказать, что $u(x, t) \equiv 0$. Используем для этого следующее соображение. Полная энергия струны

$$E=T+U=\frac{1}{2}\int_a^b [\mu u_t^2+pu_x^2]\,dx$$

так же, как и для системы из конечного числа материальных точек, должна оставаться постоянной во все время процесса (это мы строго докажем ниже). Но в начальный момент, по условию, $u_t(x, 0)=0$, $u(x, 0)=0$, так что и $u_x(x, 0)=0$, откуда при $t=0$ и $E=0$; а тогда в любой момент времени $E=0$ и, следовательно, $u_t=u_x=0$. Отсюда следует, что $u(x, t)$ постоянна; но так как $u(x, 0)=0$, то и $u(x, t)=0$ при каждом t.

Остается проверить для струны закон сохранения энергии. Эта проверка производится аналогично случаю системы из конечного числа точек с заменой сумм на интегралы по x. Именно умножим уравнение струны (3) на u_t и проинтегрируем по x:

$$\int_0^l u_t\left[\frac{\partial}{\partial x}(pu_x)-\frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t)\right]dx=0.$$

Первое слагаемое интегрируем по частям:

$$\int_0^l u_t\frac{\partial}{\partial x}(pu_x)\,dx=u_tku_x\Big|_0^l-\int_0^l u_{tx}pu_x\,dx.$$

Внеинтегральный член обращается в нуль, так как $u_t(0, t)$ и $u_t(l, t)$ равны 0 вместе с $u(0, t)$ и $u(l, t)$. Таким образом, имеет место равенство

$$\int_0^l\left[u_t\frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t)+pu_xu_{tx}\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t^2)+\frac{\partial}{\partial t}(pu_x^2)\right]dx=0,$$

откуда

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\int_0^l[\mu u_t^2+pu_x^2]\,dx=0$$

и, следовательно,

$$E=\mathrm{const},$$

что и требовалось доказать.

Укажем, как построить само решение, по крайней мере для достаточно гладких начальных функций $\varphi(x)=u(x, 0)$ и $\psi(x)=u_t(x, 0)$. Будем для простоты считать, что $p=1$, $\mu=1$, $l=\pi$ (общий случай рассмотрен в гл. V, § 5). Как легко проверить, функции $\sin nx\cos nt$

и $\sin nx \sin nt$ при любом целом n удовлетворяют уравнению

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{5}$$

и условиям закрепления на концах $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{1}^{\infty} \sin nx \, (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{6}$$

коэффициенты которого определим из условий

$$u(x, 0) = \sum_{1}^{\infty} a_n \sin nx = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{1}^{\infty} nb_n \sin nx = \psi(x).$$

При достаточной гладкости функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$[1]) коэффициенты a_n и b_n настолько быстро стремятся к нулю, что ряд (6) оказывается абсолютно сходящимся вместе с формальными первыми и вторыми производными по x и t. Тогда можно вычислить u_{xx} и u_{tt} суммированием ряда из соответствующих производных; так как уравнение выполняется для каждого из слагаемых, то оно будет выполнено и для суммы. Более подробное изложение этого вопроса, а также анализ случаев, когда k и μ не постоянны, выходят за рамки нашего курса[2]).

Задача. Найти закон колебания струны, закрепленной на концах $x = 0$, $x = \pi$, если $k = \mu = 1$ и $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \sin 2x \cos x$.

Отв. $u(x, t) = \frac{1}{2} \sin x \sin t + \frac{1}{6} \sin 3x \sin 3t$.

4. Рассмотрим еще случай вынужденного движения, когда на струну действует внешняя сила.

Пусть на участок Δx нашей струны действует сила $f(x, t)\,\Delta x$. Эта сила обладает потенциальной функцией (работа на пути от 0 до u)

$$U_f = -\int_0^l f(x, t)\, u(x, t)\, dx,$$

и поэтому полная потенциальная энергия в этом случае выражается формулой

$$U = \int_0^l \left[\frac{1}{2} u_x^2 - fu\right] dx;$$

---

[1]) Точнее, при условии, что достаточно гладкими будут нечетные 2π-периодические продолжения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю ось.

[2]) См., например, И. Г. Петровский, Лекции по уравнениям с частными производными, М., 1953; Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. V, М., 1951.

уравнение Эйлера теперь будет иметь вид

$$ku_{xx} - \mu u_{tt} = f(x, t).$$

Из этого уравнения можно получить и форму положения равновесия в случае, когда внешняя сила в действительности не зависит от времени, так что $f(x, t) = f(x)$. В положении равновесия $u_{tt} = 0$ и, следовательно, форма струны $u = u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$ku_{xx} = f(x).$$

Среди всех решений этого уравнения интересующее нас выделяется граничными условиями в точках $x = 0$ и $x = l$.

Так, однородная струна (μ, $k = \text{const}$) прогибается под действием силы тяжести ($f(x) = \mu g$) по параболе, являющейся решением уравнения

$$ku_{xx} = \mu g.$$

5. ***Пример 3.*** Уравнение малых колебаний мембраны. Мембрана есть «двумерный аналог» струны: это механическая система в форме поверхности, потенциальная энергия каждого участка которой пропорциональна увеличению его площади по сравнению с положением равновесия. Таким образом, если функция $u(x, y, t)$, заданная в области G на плоскости (x, y) при $t \geqslant 0$, описывает фигуру мембраны в момент t, то выражение для ее потенциальной энергии примет вид

$$U = \iint\limits_G p\left(\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1\right) dx\,dy \cong \frac{1}{2} \iint\limits_G p\,(u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy.$$

Кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \iint\limits_G \mu(x, y)\,u_t^2\,dx\,dy.$$

Функция Лагранжа

$$L = T - U = \frac{1}{2} \iint\limits_G [p\,(u_x^2 + u_y^2) - \mu u_t^2]\,dx\,dy.$$

Уравнение Эйлера — Остроградского принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(pu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(pu_y) - \frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t) = 0.$$

Для p и μ постоянных получается уравнение вида

$$u_{tt} = c^2 (u_x^2 + u_y^2).$$

В качестве начальных условий, так же как и в случае струны, можно задать $u(x, y, 0)$ и $u_t(x, y, 0)$. Дальнейшая теория проходит в основном параллельно с теорией струны; мы снова отсылаем читателя к указанным выше курсам уравнений с частными производными.

§ 7. Функционалы с высшими производными

1. Функционал вида

$$F(y)=\int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(m)})\,dx \tag{1}$$

определен в пространстве $D_m(a, b)$ функций $y=y(x)$ с m непрерывными производными на отрезке $[a, b]$. Норма в пространстве $D_m(a, b)$, как мы помним, задается формулой

$$\|y\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|y(x)|, |y'(x)|, \ldots, |y^{(m)}(x)|\}.$$

Если функция $f(x, y_0, y_1, \ldots, y_m)$ имеет производные до 2-го порядка по аргументам $y_0, \ldots, y_m$, непрерывные при всех $y_0, \ldots, y_m$, то, как было сказано в § 2 (стр. 85), функционал (1) дифференцируем в $D_m(a, b)$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(y, h)=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial y'}h'+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}h^{(m)}\right]dx. \tag{2}$$

Вектор смещения $h=h(x)$ есть функция из того же пространства $D_m(a, b)$. Экстремальную задачу для функционала $F(y)$ мы будем решать на многообразии функций $y(x)\in D_m(a, b)$ с заданными значениями

$$\left.\begin{aligned} &y(a)=a_0, \quad y'(a)=a_1, \ldots, y^{(m-1)}(a)=a_{m-1};\\ &y(b)=b_0, \quad y'(b)=b_1, \ldots, y^{(m-1)}(b)=b_{m-1}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Тем самым для функции $h(x)$ выполняются условия

$$\left.\begin{aligned} &h(a)=h'(a)=\ldots=h^{(m-1)}(a)=0;\\ &h(b)=h'(b)=\ldots=h^{(m-1)}(b)=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Допустим, что искомая функция $y=y(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $2m$. Тогда все функции $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}$, входящие в выражение вариации (2), как функции от x, будут иметь непрерывные производные до порядка m. Проинтегрируем по частям каждое из слагаемых (начиная со второго) столько раз, чтобы снять с функции $h(x)$ все дифференцирования. В силу (4) все внеинтегральные