В качестве начальных условий, так же как и в случае струны, можно задать $u(x, y, 0)$ и $u_t(x, y, 0)$. Дальнейшая теория проходит в основном параллельно с теорией струны; мы снова отсылаем читателя к указанным выше курсам уравнений с частными производными.

§ 7. Функционалы с высшими производными

1. Функционал вида

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(m)})\, dx \tag{1}$$

определен в пространстве $D_m(a, b)$ функций $y = y(x)$ с m непрерывными производными на отрезке $[a, b]$. Норма в пространстве $D_m(a, b)$, как мы помним, задается формулой

$$\|y\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{|y(x)|, |y'(x)|, \ldots, |y^{(m)}(x)|\}.$$

Если функция $f(x, y_0, y_1, \ldots, y_m)$ имеет производные до 2-го порядка по аргументам $y_0, \ldots, y_m$, непрерывные при всех $y_0, \ldots, y_m$, то, как было сказано в § 2 (стр. 85), функционал (1) дифференцируем в $D_m(a, b)$ и его вариация имеет вид

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} h^{(m)}\right] dx. \tag{2}$$

Вектор смещения $h = h(x)$ есть функция из того же пространства $D_m(a, b)$. Экстремальную задачу для функционала $F(y)$ мы будем решать на многообразии функций $y(x) \in D_m(a, b)$ с заданными значениями

$$\left.\begin{aligned} &y(a) = a_0, \quad y'(a) = a_1, \ldots, y^{(m-1)}(a) = a_{m-1}; \\ &y(b) = b_0, \quad y'(b) = b_1, \ldots, y^{(m-1)}(b) = b_{m-1}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Тем самым для функции $h(x)$ выполняются условия

$$\left.\begin{aligned} &h(a) = h'(a) = \ldots = h^{(m-1)}(a) = 0; \\ &h(b) = h'(b) = \ldots = h^{(m-1)}(b) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Допустим, что искомая функция $y = y(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $2m$. Тогда все функции $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}$, входящие в выражение вариации (2), как функции от x, будут иметь непрерывные производные до порядка m. Проинтегрируем по частям каждое из слагаемых (начиная со второго) столько раз, чтобы снять с функции $h(x)$ все дифференцирования. В силу (4) все внеинтегральные члены обратятся в нуль, и мы будем иметь

$$\delta F(y, h) = \\ = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\right] h(x)\,dx.$$

Так как $h(x)$ произвольна, то искомая функция y должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2m$, которое также называется уравнением Эйлера. Общее его решение содержит $2m$ произвольных постоянных, которые можно употребить для выделения интересующего нас решения, подчиненного условиям (3).

Задача. Найти экстремали функционала

$$F(y) = \int_a^b (y'')^n\,dx.$$

Отв. $y = (\alpha x + \beta)^{\frac{2n-1}{n-1}} + \gamma x + \delta\left(\text{при } n \neq 1,\ n \neq \frac{1}{2}\right)$. При $n = \frac{1}{2}$ имеем $\alpha y = \ln(\alpha x + \beta) + \gamma x + \delta$; при $n = 1$ значение функционала не зависит от y.

2. Иногда встречаются задачи, в которых заданы на границе не все условия (3), а меньшее число, так что в общем решении уравнения Эйлера после подчинения его граничным условиям еще остаются свободные константы. Такие задачи аналогичны задачам со свободными концами для простейшего функционала (§ 5). При решении такой задачи нужно преобразовать выражение вариации (2) с учетом имеющихся граничных условий и, приравняв ее нулю, получить дополнительные условия на границе.

Пример. Найти кривую $y = y(x)$, реализующую экстремальное значение функционала

$$F(y) = \frac{1}{2}\int_a^b (y'')^2\,dx$$

при условиях $y(a) = y(b) = 0$.

Решение. Вариация функционала $F(y)$ имеет вид

$$\delta F(y, h) = \int_a^b y'' h''\,dx.$$

При первом интегрировании по частям граничные члены сохранятся ввиду того, что функция $h'(x)$ не обязана на границе обращаться в нуль. При вторичном интегрировании новых граничных членов не появится ($h(a) = h(b) = 0$) В результате мы получим:

$$\delta F(y, h) = y''(x) h'(x) \Big|_a^b - \int_a^b y'''(x) h'(x) \, dx =$$

$$= [y''(b) h'(b) - y''(a) h'(a)] + \int_a^b y^{\mathrm{IV}}(x) h(x) \, dx.$$

Указанное выражение для экстремальной функции $y(x)$ должно обратиться в нуль, какова бы ни была функция $h(x) \in D_2(a, b)$ с условиями $h(a) = h(b) = 0$. Если при этом и $h'(a) = h'(b) = 0$, то мы получаем, что

$$\int_a^b y^{\mathrm{IV}}(x) h(x) \, dx = 0,$$

откуда $y^{\mathrm{IV}}(x) = 0$, и, следовательно, $y(x)$ есть парабола 3-го порядка:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Таким образом, в выражении вариации интегральный член исчезает, и мы получаем для общего случая

$$\delta F(y, h) = y''(b) h'(b) - y''(a) h'(a) = 0.$$

Так как $h'(a)$ и $h'(b)$ независимы, то должны быть выполнены условия $y''(a) = y''(b) = 0$. Эти два условия вместе с двумя остальными $y(a) = y(b) = 0$ однозначно выделяют искомое решение.

Задача. Найти кривую $y = y(x)$, реализующую экстремальное значение функционала

$$F(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 (y'')^2 \, dx$$

при условиях $y(0) = y'(0) = 0$, $\quad y'(1) = 1$.

Отв. $y = \dfrac{1}{2} x^2$.

3. Совершенно аналогичные соображения имеют место и для случая нескольких независимых переменных. Мы ограничимся для простоты рассмотрением функционала

$$F(u) = \iint_G f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \, dx \, dy$$

с интегрированием по области G в плоскости переменных x, y. Этот функционал определен в пространстве $D_2(G)$ функций $u(x, y)$, имеющих в области G непрерывные производные до второго порядка. Относительно функции f предполагается, что она имеет непрерывные производные по всем аргументам до второго порядка включительно.

Тогда первая вариация функционала F будет иметь вид

$$\delta F(u, h) = \\ = \iint\limits_G [f_u h + f_{u_x} h_x + f_{u_y} h_y + f_{u_{xx}} h_{xx} + f_{u_{xy}} h_{xy} + f_{u_{yy}} h_{yy}]\, dx\, dy.$$

Вектор смещения $h = h(x, y)$ есть функция из того же пространства $D_2(G)$. В экстремальной точке $u = u(x, y)$ пространства $D_2(G)$ вариация $\delta F(u, h)$ обращается в нуль при любом $h(x, y)$, так что

$$\iint\limits_G [f_u h + f_{u_x} h_x + f_{u_y} h_y + f_{u_{xx}} h_{xx} + f_{u_{xy}} h_{xy} + f_{u_{yy}} h_{yy}]\, dx\, dy = 0. \tag{5}$$

Будем считать, что значения функций $u(x, y)$, u_x, u_y закреплены на границе Γ области G и, следовательно, величины h, h_x, h_y обращаются на Γ в нуль; относительно же искомой функции $u(x, y)$ предположим, что она имеет непрерывные производные до 4-го порядка включительно. Каждое из слагаемых под знаком интеграла имеет по x и y производные до 2-го порядка включительно. Интегрируем каждое из слагаемых, начиная со второго, один или два раза с тем, чтобы снять с функции $h(x, y)$ все дифференцирования; при этом в силу условий на границе все внеинтегральные члены обратятся в нуль и уравнение (5) перейдет в уравнение

$$\iint\limits_G \left[f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} f_{u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{u_{yy}}\right] h\, dx\, dy = 0.$$

Так как $h(x, y)$ в остальном произвольна, то функция u удовлетворяет уравнению 4-го порядка (уравнение Эйлера — Остроградского)

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} f_{u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{u_{yy}} = 0. \tag{6}$$

Неизвестная функция $u(x, y)$ должна быть определена как решение этого уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям. Вопросы о существовании и единственности решения такого уравнения рассматриваются в теории уравнений с частными производными. Вместо условий закрепления в задаче могут фигурировать и иные условия, так же как и в случае функционалов с производными первого порядка (§ 5).

4. ***Пример.*** Уравнение малых колебаний стержня. Стержень, расположенный в состоянии равновесия между точками 0 и l на оси x, совершает поперечные колебания в плоскости (x, u). Обозначим через $u(x, t)$ профиль стержня в момент t и предположим, что концы 0 и l «наглухо заделаны», так что

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,$$
$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0.$$

Кинетическая энергия стержня, как и струны, выражается интегралом

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l \mu(x)\,u_t^2\,dx,$$

где $\mu(x)\,dx$ — масса элемента, соответствующего интервалу dx. Потенциальная энергия стержня определяется — в противоположность потенциальной энергии струны — не удлинением, а искривлением профиля; точнее, стержень как механическая система определяется тем, что *потенциальная энергия каждого его участка пропорциональна квадрату кривизны профиля:*

$$dU=\frac{k(x)}{2}\,\frac{u_{xx}^2}{1+u_x^2}\,dx.$$

Считая, что u_x и u_{xx} малы, мы пренебрегаем членом $u_x^2u_{xx}^2$, что дает возможность записать dU в более простом виде:

$$dU=\frac{k(x)}{2}\,u_{xx}^2\,dx,$$

откуда потенциальная энергия

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l ku_{xx}^2\,dx.$$

Функция Лагранжа $L=T-U$ имеет вид

$$L=T-U=\frac{1}{2}\int_0^l \left[\mu u_t^2-ku_{xx}^2\right]dx.$$

Функционал Гамильтона изображается двойным интегралом

$$\int_{t_0}^{t_1} L\,dt=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[\mu u_t^2-ku_{xx}^2\right]dx\,dt.$$

Напишем для данного случая уравнение Эйлера — Остроградского (6):

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ku_{xx})=0.$$

При постоянных μ и k получается уравнение

$$\mu u_{tt}+ku_{xxxx}=0,$$

которое и является уравнением свободных колебаний стержня. Начальные условия, естественные с физической точки зрения, можно взять следующие: при $t=0$ заданы значения функций $u(x, 0)$ (форма начального отклонения) и $u_t(x, 0)$ (начальные скорости точек стержня). Единственность решения задачи при указанных начальных и граничных условиях следует из рассмотрения интеграла энергии, как и для струны. Как построить само решение при тех или иных граничных условиях, разъясняется в курсах уравнений с частными производными [1]).

По тем же соображениям, что и для струны, уравнение вынужденных колебаний стержня будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu u_t)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k u_{xx})=f(x, t),$$

где $f(x, t)\,dx$ — сила, действующая на элемент dx. В случае, когда внешняя сила не зависит от времени, $f(x, t)=f(x)$, фигура равновесия стержня определяется из условия

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k u_{xx})=f(x).$$

В частности однородный стержень (μ, $k=\text{const}$) прогибается под действием силы тяжести ($f(x)=\mu g$) по некоторой кривой четвертого порядка.

Задача. Найти фигуру равновесия однородного стержня: а) наглухо заделанного; б) свободно подпертого на двух опорах (рис. 8) в точках $x_{1,2}=\pm l$.

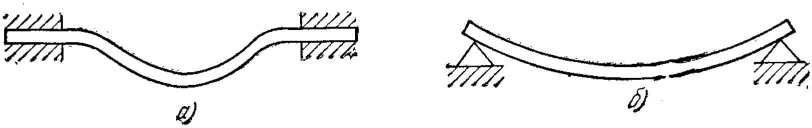

Рис. 8.

Указание. В случае б) граничные условия суть $u(-l)=u(l)=0$, производные $u'(-l)$ и $u'(l)$ остаются свободными.

Отв. (для $k=\mu=1$):

а) $$u(x)=\frac{g}{24}\left(x^2-l^2\right)^2;$$

б) $$u(x)=\frac{g}{24}\left(x^2-l^2\right)\left(x^2-5l^2\right).$$

---

[1]) См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.

Заключительное замечание. Первый общий метод решения вариационных задач, выделивший вариационное исчисление в самостоятельную область математики, был найден около 1744 г. Леонардом Эйлером (1707—1783; швейцарец по рождению, бо́льшую часть жизни работал в Петербургской Академии наук). Метод Эйлера является родоначальником современных «прямых методов» вариационного исчисления. Метод вариаций, который мы излагали, был предложен впервые в 1755 г. Ж. Лагранжем (франц. математик, 1736—1813) в письме к Эйлеру. В разработке классического вариационного исчисления принимали участие крупнейшие математики XIX века: Гаусс, Пуассон, Остроградский, Вейерштрасс и др. Мы описали здесь только начальные элементы этой большой и богатой приложениями области математики. Для дальнейшего ознакомления можно рекомендовать книгу Н. И. Ахиезера «Лекции по вариационному исчислению» (Гостехиздат, 1955), а также И. М. Гельфанда и С. В. Фомина «Вариационное исчисление», Физматгиз, 1961.