ГЛАВА IV

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛА

Мы переходим теперь к расширению понятия интеграла. Классическое определение интеграла, данное Коши и Риманом, вполне достаточное в применении к отдельным непрерывным или кусочно-непрерывным функциям, оказывается недостаточным с более общих точек зрения. Так, мы видели, что пространство $C_1(a, b)$ непрерывных функций $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с метрикой

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \tag{1}$$

не является полным: существуют фундаментальные последовательности, не имеющие предела в этом пространстве. Ничего не спасло бы присоединение к пространству $C_1(a, b)$ разрывных функций, интегрируемых по Риману. Только новая конструкция интеграла, более широкая, чем римановская, позволит нам указать класс функций, дающий пополнение пространства $C_1(a, b)$ по метрике (1).

Другая задача, для решения которой недостаточно старого определения интеграла,— это задача об описании достаточно широкого класса пар функций $\varphi(x)$ и $F(x)$, для которых формулы

$$F(x) = F(a) + \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

$$F'(x) = \varphi(x) \tag{3}$$

являются эквивалентными. Точная постановка и решение этой второй задачи будут даны в гл. VI.

§ 1. Множества меры нуль и измеримые функции

Мы начнем теорию интеграла с изучения одного класса множеств на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, называемых множествами меры нуль.

Как мы увидим далее, это будут те множества, которыми можно пренебрегать при вычислении интегралов; точнее говоря; интеграл от функции $f(x)$ не будет изменяться, если значения функции $f(x)$ изменить произвольно на множестве меры нуль.

Определение. Множество A, расположенное на отрезке $[a, b]$, называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной или счетной системой интервалов, сумма длин которых не превосходит ε.

Примерами множеств меры нуль служат множества из одной точки, из двух точек, вообще, любая конечная или счетная совокупность точек. Докажем последнее. Пусть $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество и $\varepsilon > 0$ — заданное число; тогда система интервалов с длинами $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots$, последовательно покрывающих точки $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, покрывает все множество A и имеет общую сумму длин, не большую чем $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \ldots = \varepsilon$. В частности, множество рациональных чисел и множество алгебраических чисел — множества меры нуль.

С другой стороны, весь отрезок $[a, b]$ заведомо не есть множество меры нуль. Действительно, если отрезок покрыт счетной системой интервалов, то по известной лемме анализа можно из указанного покрытия выбрать конечное покрытие; сумма длин даже этих интервалов заведомо превосходит число $b - a$, т. е. длину всего отрезка $[a, b]$.

Уже теперь можно объяснить, почему значения функции на множестве меры нуль несущественны при вычислении интеграла от нее. Достаточно убедиться, что интеграл от функции $f(x)$, равной 1 на множестве A меры 0 и равной нулю на дополнении A, должен быть равен нулю. Покроем множество A системой интервалов с общей длиной $< \varepsilon$. Ясно, что интеграл от функции $f(x)$, если он определен разумно, не должен превосходить суммы площадей прямоугольников высоты 1 с основаниями на указанных интервалах. А эта сумма равна сумме длин самих интервалов и по условию меньше ε, т. е. может быть сделана как угодно малой. Отсюда необходимо следует, что функция $f(x)$ должна иметь интеграл, равный 0.

Отметим, что в приведенном определении множества меры нуль можно заменить покрытие множества интервалами покрытием из отрезков или любых промежутков (с включенными или исключенными концами). Действительно, если имеется покрытие множества A промежутками с общей длиной $< \varepsilon$, то, заменяя n-й промежуток содержащим его интервалом длины, не больше чем на $\frac{\varepsilon}{2^n}$ превосходящей длину n-го промежутка, мы получим и покрытие множества A интервалами, общая длина которых не превосходит 2ε; поэтому, если множество A можно покрыть системой каких-то промежутков с общей длиной как угодно малой, то можно покрыть и системой интервалов с общей длиной также как угодно малой, т. е. множество A имеет меру нуль.

Укажем простую конструкцию замкнутых множеств меры нуль. Предположим, что замкнутое множество F на отрезке $[a, b]$ получается выбрасыванием из этого отрезка открытого множества, состоящего из счетной совокупности непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$ с общей длиной, равной $b-a$. Тогда мы можем утверждать, что множество F имеет заведомо меру нуль. Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое n, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\Delta_k| < \varepsilon.$$

Через $|\Delta|$ мы здесь и в дальнейшем обозначаем длину интервала Δ. Оставшиеся n интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ не пересекаются и вместе с промежуточными отрезками $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$ (число которых m может быть равным $n-1$, n или $n+1$, включая тот случай, когда Δ_k и Δ_{k+1} имеют общий конец и, следовательно, Δ'_k вырождается в точку) дают конечное покрытие (промежутками) всего отрезка $[a, b]$. Так как сумма длин $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ больше, чем $b-a-\varepsilon$, то система $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_m$ имеет общую длину заведомо $< \varepsilon$; а так как она, очевидно, покрывает все множество F, то мы и получаем, что F есть множество меры нуль.

Казалось бы, трудно ожидать, что после выбрасывания из отрезка длины $b-a$ системы непересекающихся интервалов с общей длиной также $b-a$ может остаться сколько-нибудь богатое точками множество. Оказывается, что тем не менее остаток может быть даже эквивалентен (по мощности) всему исходному отрезку.

Примером может служить уже известное нам канторово множество (гл. II, § 4, п. 4) на отрезке $[0, 1]$. Напомним, как оно строится. Сначала из отрезка $[0, 1]$ выбрасывается интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ длины $\frac{1}{3}$, составляющий среднюю из трех третей всего отрезка. Затем подобная операция производится с каждым из двух оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, т. е. из каждого из них выбрасывается его средняя третья часть, именно интервал $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ из отрезка $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и интервал $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ из отрезка $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Далее аналогичная процедура производится с каждым из четырех оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ и $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$, и процесс продолжается неограниченно. Оставшееся в результате замкнутое множество и называется канторовым. Нетрудно подсчитать полную сумму длин выброшенных интервалов: первый выброшенный интервал имел длину $\frac{1}{3}$, два следующих имели сумму длин $\frac{2}{9}$, следующие четыре — сумму длин $\frac{4}{27}$ и т. д.; общая сумма длин равна сумме ряда

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots+\frac{2^n}{3^{n+1}}+\ldots=1.$$

Поэтому согласно сказанному выше канторово множество имеет меру нуль.

Далее, канторово множество не имеет изолированных точек, поскольку интервалы, выброшенные при его построении, не имели общих концов. Поэтому в силу теоремы 1 § 4 гл. II канторово множество несчетно; более того, в силу теоремы 2 того же параграфа оно имеет мощность континуума

В дальнейшем мы часто будем использовать следующее свойство множеств меры нуль:

Лемма. *Объединение конечной или счетной совокупности множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

Доказательство. Рассмотрим сразу случай счетной совокупности $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ множеств меры 0. Для заданного $\varepsilon > 0$ и для каждого n покроем множество A_n счетной системой интервалов с общей длиной меньше $\frac{\varepsilon}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда все множество $A = A_1 + \ldots + A_n + \ldots$ окажется покрытым счетной системой интервалов (сумма счетного множества счетных множеств) с общей длиной, меньшей ε. Следовательно, A имеет меру 0, что и требовалось.

Множество на отрезке $[a, b]$, дополнительное к множеству меры нуль, называется множеством *полной меры*. Таковыми являются, например, множество иррациональных чисел и множество трансцендентных чисел.

Пересечение конечной или счетной совокупности множеств полной меры есть снова множество полной меры. Действительно, если $Q_1, Q_2, \ldots$ — множества полной меры и $A_1 = CQ_1$, $A_2 = CQ_2, \ldots$ — дополнительные множества меры нуль, то

$$C\prod Q_j = \sum CQ_j = \sum A_j$$

в силу леммы имеет меру нуль; отсюда следует, что $\prod Q_j$ есть множество полной меры, что и утверждалось.

Если некоторым свойством обладают все точки некоторого множества полной меры на отрезке $[a, b]$, то мы говорим, что это свойство выполняется *почти для всех точек* отрезка $[a, b]$. Например, почти для всех точек $\xi \in [a, b]$ выполнено то свойство, что ξ иррационально. Бывают функции, почти всюду непрерывные, т. е. непрерывные в каждой точке, кроме, может быть, множества меры нуль. Для функций, которым разрешается принимать и бесконечные значения, имеет смысл название «конечная почти всюду»; это значит, что множество, на котором функция бесконечна, самое большее есть множество меры нуль.

Мы можем описать теперь класс функций, в котором будет происходить наша дальнейшая работа по определению интеграла. Функции, входящие в этот класс, называются *измеримыми* функциями. Измеримая функция, по определению, есть такая функция, которая определена и конечна почти всюду на $[a, b]$ и может быть представлена как предел почти всюду сходящейся последовательности *ступен-*

чатых функций. В свою очередь ступенчатая функция есть функция, принимающая некоторое постоянное значение в каждом из интервалов некоторого разбиения отрезка $[a, b]$ на части с помощью точек деления $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. В самих точках деления мы можем не интересоваться значениями ступенчатой функции, поскольку этих точек конечное число — и тем самым множество меры нуль.

Совокупность ступенчатых функций есть линейное пространство с обычными операциями сложения и умножения на числа; если h и k — ступенчатые функции, то их линейная комбинация $\alpha h + \beta k$ есть также ступенчатая функция. Отсюда мы легко выведем, что и измеримые функции образуют линейное пространство. Действительно, если ступенчатые функции h_n сходятся к функции f всюду, кроме множества A меры нуль, а ступенчатые функции k_n — к функции g всюду, кроме множества B меры нуль, то ступенчатые функции $\alpha h_n + \beta k_n$ сходятся к функции $\alpha f + \beta g$ всюду, кроме множества $A + B$, которое, по доказанному выше, также есть множество меры нуль; следовательно, функция $\alpha f + \beta g$ также измерима.

И многие другие свойства, которыми обладает класс ступенчатых функций, можно подобным предельным переходом перенести на класс измеримых функций. Перечислим некоторые из них.

Произведение двух ступенчатых функций есть ступенчатая функция; в соответствии с этим и произведение двух измеримых функций есть функция измеримая.

Частное двух ступенчатых функций есть ступенчатая функция, если знаменатель не обращается в нуль. В соответствии с этим частное двух измеримых функций есть измеримая функция, если знаменатель почти всюду отличен от нуля. Действительно, если $h_n \to f$ всюду, кроме множества A меры нуль, $k_n \to g$ всюду, кроме множества B меры нуль, то, заменив у функций k_n, если это требуется, нулевые значения на значения $\frac{1}{n}$, мы получим новую последовательность ступенчатых функций k'_n, не обращающихся в нуль, и также сходящуюся к g всюду, кроме множества B; но тогда ступенчатые функции $\frac{h_n}{k_n}$ сходятся к $\frac{f}{g}$ всюду, кроме множества $A + B + C$, где C — множество меры нуль, на котором g обращается в нуль. Множество $A + B + C$ имеет меру нуль, и, следовательно, функция $\frac{f}{g}$ также измерима.

Абсолютная величина $|h(x)|$ ступенчатой функции $h(x)$ есть ступенчатая функция. Отсюда легко получить, что и абсолютная величина любой измеримой функции есть функция измеримая.

Если даны две ступенчатые функции $h(x)$ и $k(x)$, то

$$h_1(x) = \max\{h(x),\ k(x)\} \quad \text{и} \quad k_1(x) = \min\{h(x),\ k(x)\}$$

суть также ступенчатые функции. Предельным переходом получаем, что для двух измеримых функций f и g (рис. 9)

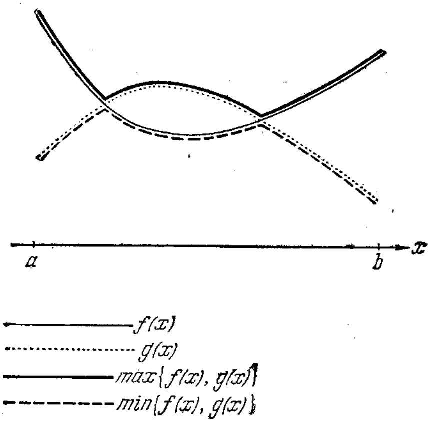

Рис. 9.

$$\max\{f(x),\ g(x)\}$$

и

$$\min\{f(x),\ g(x)\}$$

суть также измеримые функции.

В частности, вместе с функцией $f(x)$ измеримыми являются ее положительная часть $f^+(x)=\max\{f(x),\ 0\}$ и отрицательная часть $f^-(x)=\max\{0, -f(x)\}$.

Отметим часто встречающиеся соотношения

$$f=f^+-f^-, \quad |f|=f^++f^-,$$

имеющие место для всякой функции $f(x)$.

Задача. Известно, что сумма длин смежных интервалов к замкнутому множеству $F\subset[a, b]$ меньше $b-a$. Показать, что множество F не есть множество меры нуль.

§ 2. Класс C^+

Теперь мы приступаем к построению понятия интеграла. Рассмотрим сначала *ступенчатую функцию* $h(x)$, т. е. функцию, принимающую постоянные значения $b_1, b_2, \ldots, b_k$ в каждом из конечного числа промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$, на которые отрезок $[a, b]$ разбивается точками деления $a=x_0<x_1<\ldots<x_k=b$. Интеграл от этой функции естественно положить равным

$$\int_b^a h(x)\,dx=\sum_{j=1}^{k} b_j|\Delta_j|.$$

Для сокращения записи будем в дальнейшем выражение вида $\int_a^b h(x)\,dx$ заменять на Ih. Как легко проверить, интеграл от ступенчатых функций обладает следующими свойствами:

а) $I(h_1+h_2)=Ih_1+Ih_2$ для любых двух степенчатых функций h_1 и h_2;

б) $I(\alpha h)=\alpha Ih$ для любого числа α;

в) если $h_1\leqslant h_2$, то $Ih_1\leqslant Ih_2$; в частности, если $h\geqslant 0$, то $Ih\geqslant 0$.