суть также ступенчатые функции. Предельным переходом получаем, что для двух измеримых функций f и g (рис. 9)

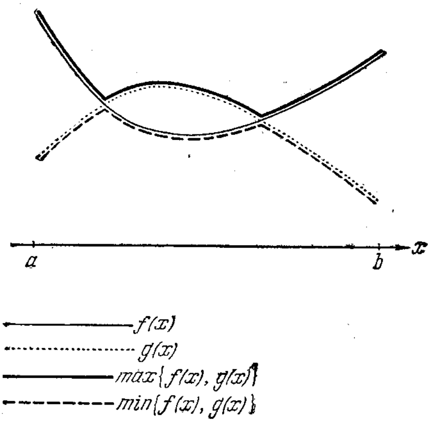

Рис. 9.

$$\max\{f(x),\ g(x)\}$$

и

$$\min\{f(x),\ g(x)\}$$

суть также измеримые функции.

В частности, вместе с функцией $f(x)$ измеримыми являются ее положительная часть $f^+(x) = \max\{f(x),\ 0\}$ и отрицательная часть $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$.

Отметим часто встречающиеся соотношения

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-,$$

имеющие место для всякой функции $f(x)$.

Задача. Известно, что сумма длин смежных интервалов к замкнутому множеству $F \subset [a, b]$ меньше $b - a$. Показать, что множество F не есть множество меры нуль.

§ 2. Класс C^+

Теперь мы приступаем к построению понятия интеграла. Рассмотрим сначала *ступенчатую функцию* $h(x)$, т. е. функцию, принимающую постоянные значения $b_1, b_2, \ldots, b_k$ в каждом из конечного числа промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$, на которые отрезок $[a, b]$ разбивается точками деления $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$. Интеграл от этой функции естественно положить равным

$$\int_b^a h(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k} b_j\,|\Delta_j|.$$

Для сокращения записи будем в дальнейшем выражение вида $\int_a^b h(x)\,dx$ заменять на Ih. Как легко проверить, интеграл от ступенчатых функций обладает следующими свойствами:

а) $I(h_1 + h_2) = Ih_1 + Ih_2$ для любых двух степенчатых функций h_1 и h_2;

б) $I(\alpha h) = \alpha Ih$ для любого числа α;

в) если $h_1 \leqslant h_2$, то $Ih_1 \leqslant Ih_2$; в частности, если $h \geqslant 0$, то $Ih \geqslant 0$.

Следующие два свойства менее очевидны; далее будут даны их доказательства:

г) если последовательность $h_n \geqslant 0$ монотонно убывает (так что $h_1(x) \geqslant h_2(x) \geqslant \ldots$) и стремится к нулю почти всюду, то $Ih_n \to 0$;

д) если последовательность $h_n \geqslant 0$ монотонно убывает и при этом $Ih_n \to 0$, то эта последовательность стремится к нулю почти всюду.

В дальнейшем для обозначения предельного перехода при монотонном убывании будем употреблять знак $\searrow$, так что, например, запись $f_n \searrow f$ означает, что последовательность функций $f_n(x)$, монотонно убывая, стремится почти всюду к функции $f(x)$. Аналогичный смысл будет иметь знак $\nearrow$.

Докажем свойство г). Нам дано, что $h_n \searrow 0$, и требуется доказать, что $Ih_n \searrow 0$. Классическую теорему о почленном интегрировании сходящейся последовательности функций здесь применить нельзя, так как эта теорема предполагает равномерность сходимости последовательности функций к своему пределу. Для доказательства поступим следующим образом. Объединение множества, на котором последовательность h_n не сходится к нулю, и счетного множества всех точек разрыва всех h_n обозначим через A; это — множество меры нуль. Покроем его системой интервалов $\{\Delta_k\}$ с общей длиной, меньшей заданного $\varepsilon > 0$. Каждой из оставшихся точек x' сопоставим номер $n = n(x')$, для которого выполняется неравенство $h_n(x') < \varepsilon$, и интервал $\Delta(x')$, содержащий эту точку, в котором функция h_n сохраняет свое значение. Интервалы $\{\Delta_k\}$ вместе с интервалами $\{\Delta(x')\}$ образуют покрытие отрезка $[a, b]$, из которого мы можем выбрать конечное покрытие. Обозначим эти интервалы через $\Delta_1, \ldots, \Delta_m, \Delta'_1, \ldots, \Delta'_p$, снабжая штрихом те интервалы, которые построены по точкам x'. Если r — наибольший из номеров, отвечающих соответствующим точкам x', то функция h_r и все последующие на интервалах $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_p$ не превосходят ε. На интервалах $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$, сумма длин которых по построению меньше ε, эти функции не превосходят числа M — максимума функции $h_1(x)$. Теперь ясно, что для интеграла от функции $h_r(x)$ по отрезку $[a, b]$ и для интеграла от всех последующих функций мы получаем оценку вида

$$Ih_r < M\varepsilon + \varepsilon(b - a).$$

Так как ε можно было взять произвольно малым, то мы приходим к выводу, что $Ih_r \to 0$, что и требовалось.

Докажем теперь свойство д), обратное свойству г). Нам дано, что функции h_n неотрицательны, монотонно убывают и что $Ih_n \searrow 0$. Очевидно, что функции h_n, убывая и оставаясь положительными, имеют при $n \to \infty$ некоторый предел $g(x) \geqslant 0$. Мы должны доказать, что функция $g(x)$ почти всюду равна нулю.

Для всякой функции $g(x) \geqslant 0$ множество F всех точек, где она отлична от нуля, есть счетная сумма множеств

$$F_m = \left\{x : g(x) \geqslant \frac{1}{m}\right\}.$$

Запись в правой части равенства показывает, что множество F_m есть множество всех точек x, где $g(x) \geqslant \frac{1}{m}$. Если мы покажем, что в нашем случае каждое из множеств F_m имеет меру нуль, то и их сумма F также будет иметь меру нуль. Поэтому ограничимся изучением множества F_m.

Достаточно рассмотреть ту часть F'_m множества F_m, где все функции h_n непрерывны (остающаяся часть счетна и имеет поэтому меру нуль). Так как $h_n(x) \geqslant g(x)$, то в каждой из точек множества F'_m также и $h_n(x) \geqslant \frac{1}{m}$. Фиксируем номер n; тогда участки постоянства функции $h_n(x)$, соответствующие ее значениям, большим или равным $\frac{1}{m}$, образуют покрытие множества F'_m. Пусть δ_n означает сумму длин этих участков. Так как заведомо

$$Ih_n \geqslant \delta_n \frac{1}{m},$$

то мы получаем, что

$$\delta_n \leqslant m\, Ih_n \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Таким образом, при достаточно большом n множество F'_m покрывается системой интервалов с общей длиной как угодно малой. Следовательно, F'_m есть множество меры нуль, что и требовалось.

Теперь мы переходим к расширению определения интеграла с класса ступенчатых функций на более широкий класс.

Предварительно напомним схему построения интеграла Римана. В этой схеме для построения интеграла от функции $f(x)$ поступают следующим образом. Разбивают отрезок $[a, b]$ точками деления $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ на частные интервалы $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, обозначают

$$m_j = \inf_{x \in \Delta_j} f(x), \quad M_j = \sup_{x \in \Delta_j} f(x) \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

и составляют две суммы (зависящие, естественно, от совокупности Π точек разбиения отрезка $[a, b]$ на части):

$$\left.\begin{aligned} s_\Pi &= \sum m_j |\Delta_j|, \\ S_\Pi &= \sum M_j |\Delta_j|. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Первая сумма называется нижней, вторая — верхней. Если, добавив новые точки деления, заменить разбиение П разбиением П′, то

$$s_{\Pi} \leqslant s_{\Pi'}, \qquad S_{\Pi'} \leqslant S_{\Pi}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $s_{\Pi_1} \leqslant S_{\Pi_2}$, каковы бы ни были подразбиения Π_1 и Π_2. Далее рассматривается произвольная последовательность разбиений $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$, каждое из которых получается добавлением к предыдущему новых точек деления; тогда соответствующие нижние и верхние суммы образуют монотонные последовательности, идущие навстречу друг другу:

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant \ldots \quad \ldots \leqslant S_n \leqslant \ldots \leqslant S_2 \leqslant S_1.$$

Каждая из последовательностей имеет поэтому свой предел: $s_n \nearrow s$, $S_n \searrow S$, причем $s \leqslant S$. Доказывается, что числа s и S не зависят от выбора последовательности разбиений $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$, если только длина максимального интервала в разбиении Π_n неограниченно уменьшается с возрастанием n. Функция $f(x)$ считается интегрируемой по Риману, если $s = S$; общее значение этих пределов и полагают равным значению интеграла от $f(x)$. Если же $s < S$, то функцию $f(x)$ считают неинтегрируемой по Риману.

Рассмотрим теперь этот процесс с точки зрения действий со ступенчатыми функциями. Каждому разбиению П отрезка $[a, b]$ с точками деления $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отвечают две ступенчатые функции $h_{\Pi}(x)$ и $H_{\Pi}(x)$; первая из них в интервале Δ_j принимает значение m_j, а вторая — значение M_j. Нижняя и верхняя суммы (1) представляют собой интегралы от этих ступенчатых функций. Последовательности разбиений $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ отвечают две последовательности функций $h_n(x)$ и $H_n(x)$, первая из которых возрастает, а вторая убывает. Пусть, далее, $s(x)$ и $S(x)$ — предельные функции этих последовательностей:

$$h_n(x) \nearrow s(x), \qquad H_n(x) \searrow S(x).$$

Так как, кроме того, $h_n(x) \leqslant f(x) \leqslant H_n(x)$, то имеем $s(x) \leqslant f(x) \leqslant S(x)$. Мы утверждаем, что если функция $f(x)$ интегрируема по Риману, то эти три функции почти везде совпадают. Действительно, разность $S(x) - s(x)$ есть предел последовательности неотрицательных ступенчатых функций $H_n(x) - h_n(x)$. Эта последовательность монотонно убывает, и в случае интегрируемости $f(x)$ интегралы от $H_n(x) - h_n(x)$ стремятся к нулю. Но тогда, по свойству д), последовательность $H_n(x) - h_n(x)$ стремится почти всюду к нулю. Поэтому в случае интегрируемости $f(x)$ функции $s(x)$ и $S(x)$ почти всюду совпадают друг с другом и с функцией $f(x)$. Мы видим, что функция, интегрируемая по Риману, есть одновременно предел (почти всюду) возрастающей последовательности ступенчатых функций $s_n(x)$ и убывающей последовательности ступенчатых функций $S_n(x)$; интеграл же этой функции есть предел интегралов ступенчатых функций, участвующих в указанных последовательностях.

И обратно, если функции $s_n(x)$ и $S_n(x)$ почти всюду сходятся к $f(x)$, то разность $S_n(x)-s_n(x)$, убывая, почти всюду стремится к нулю. Поэтому, согласно свойству г), мы имеем $I(S_n(x)-s_n(x)) \searrow 0$. Отсюда следует, что числовые последовательности $s_n = I(s_n(x)) \nearrow s$, $S_n = I(S_n(x)) \searrow S$ имеют общий предел. А это и означает, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману.

Таким образом, функция $f(x)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она является пределом (в смысле сходимости почти всюду) некоторой возрастающей последовательности ступенчатых функций $s_n(x) \leqslant f(x)$ и одновременно пределом некоторой убывающей последовательности ступенчатых функций $S_n(x) \geqslant f(x)$; при этом интеграл от f есть общее значение пределов интегралов от функций $s_n(x)$ и $S_n(x)$.

Это наблюдение послужит нам опорой при расширении определения интеграла на более широкий класс функций.

Введем класс функций, который будем обозначать C^+: функция $f(x)$ принадлежит, по определению, классу C^+, если она может быть представлена как предел (в смысле сходимости почти всюду) монотонно возрастающей последовательности ступенчатых функций

$$h_n \nearrow f,$$

причем интегралы от этих функций ограничены в совокупности:

$$Ih_n \leqslant C.$$

Покажем прежде всего, что всякая функция f из класса C^+ почти всюду конечна. Пусть E — множество точек, где $f(x) = \infty$. Можно считать заранее, что в каждой точке множества E все функции $h_n(x)$ непрерывны и выполняется соотношение $h_n(x) \to \infty$. Выберем произвольно число N; в каждой из точек множества E, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство

$$h_n(x) > N,$$

так что E покрывается счетной суммой множеств вида $\{x: h_n(x) > N\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Каждое из этих множеств представляет собой конечное число интервалов; поэтому их объединение не более, чем счетная сумма интервалов:

$$U = \Delta_1^{(1)} + \ldots + \Delta_{n_1}^{(1)} + \Delta_1^{(2)} + \ldots + \Delta_{n_2}^{(2)} + \ldots + \Delta_1^{(k)} + \ldots + \Delta_{n_k}^{(k)} + \ldots$$

Здесь через $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_{n_1}^{(1)}$ обозначены составляющие интервалы множества $\{x: h_1(x) > N\}$; через $\Delta_1^{(2)}, \ldots, \Delta_{n_2}^{(2)}$ обозначены составляющие интервалы множества $\{x: h_2(x) > N\} - \{x: h_1(x) > N\}$, так что $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_{n_1}^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \ldots, \Delta_{n_2}^{(2)}$ составляют множество $\{h_2(x) > N\}$ и т. д. Оценим сумму длин всех этих интервалов. Для этого обозначим

$$\delta_k = |\Delta_1^{(1)}| + \ldots + |\Delta_{n_1}^{(1)}| + |\Delta_1^{(2)}| + \ldots + |\Delta_{n_k}^{(k)}|;$$

δ_k есть сумма длин интервалов, составляющих множество $\{x : h_k(x) > N\}$. Мы имеем по условию

$$\delta_k N < Ih_k \leqslant C.$$

Отсюда $\delta_k < \frac{C}{N}$; так как это верно для любого k, то мы заключаем, что полная сумма длин всех интервалов, составляющих U, не превосходит $\frac{C}{N}$. Так как N можно было взять произвольно большим, то мы видим, что E можно покрыть счетной системой интервалов с общей длиной, произвольно малой, Значит, E есть множество меры нуль, что и утверждалось.

В частности, всякая функция $f \in C^+$ измерима (§ 1). Определим теперь интеграл от функции f класса C^+ формулой

$$If = \lim_{n\to\infty} Ih_n, \tag{2}$$

где h_n — последовательность ступенчатых функций, участвующая в определении функции f. Так как последовательность чисел Ih_n монотонна, возрастает и ограничена, то предел справа существует; но мы должны еще доказать, что он не зависит от выбора последовательности h_n, определяющей функцию f. Для этого мы докажем следующий более общий факт: если h_n и k_n — ступенчатые функции с ограниченными в совокупности интегралами и почти всюду

$$h_n \nearrow f, \; k_n \nearrow g, \; f \leqslant g,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} Ih_n \leqslant \lim_{n\to\infty} Ik_n. \tag{3}$$

Для доказательства фиксируем номер m и рассмотрим убывающую последовательность ступенчатых функций

$$h_m - k_n.$$

Ее предел $h_m - g \leqslant f - g \leqslant 0$; но тогда $(h_m - k_n)^+ \searrow 0$, откуда, по свойству г), $I(h_m - k_n)^+ \searrow 0$; так как $I(h_m - k_n) \leqslant I(h_m - k_n)^+$, то $I(h_m - k_n) = Ih_m - Ik_n$, убывая, стремится к некоторому неположительному пределу. Отсюда мы делаем вывод, что $Ih_m \leqslant \lim_{n\to\infty} Ik_n$.

Так как это неравенство верно при любом m, то, переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем (3), что и требовалось. Полагая $g = f$, получаем $If \leqslant Ig$; но в силу полной симметрии f и g мы имеем также $Ig \leqslant If$, откуда следует $If = Ig$. Таким образом, определение интеграла функции $f \in C^+$ по формуле (2) однозначно. Если же $f \in C^+$, $g \in C^+$, $f \leqslant g$, то имеет место неравенство $If \leqslant Ig$.

В частности, всякая функция f, интегрируемая в смысле Римана, принадлежит классу C^+, а ее интеграл Римана, как предел нижних сумм, совпадает с определенным нами интегралом If, как пределом интегралов от ступенчатых функций s_n, соответствующих тем же нижним суммам.

Мы видим, что введенное нами определение интеграла не менее широко, чем определение интеграла Римана. В действительности новое определение интеграла значительно более широко, чем определение интеграла Римана. Например, функция Дирихле $\chi(x)$, равная 0 при x иррациональном и 1 при x рациональном, не была интегрируемой по Риману; с нашей же новой точки зрения она почти всюду равна нулю, поэтому интегрируема и имеет интеграл, равный нулю. Можно привести и более сложные примеры, когда интегрируемая в новом смысле функция не интегрируема по Риману и не может быть превращена в интегрируемую по Риману изменением на множестве меры нуль.

Теперь предельным переходом мы можем перенести свойства интегралов от ступенчатых функций — не все, но некоторые — на интегралы от функций класса C^+. Именно легко проверить, что:

а) Класс C^+ вместе с функциями f и g содержит $f+g$ и

$$I(f+g) = If + Ig.$$

б) Класс C^+ вместе с функцией f содержит ее произведение на любое число $\alpha \geqslant 0$ и

$$I(\alpha f) = \alpha If.$$

Заметим, что в классе C^+ нельзя вычитать функции и умножать на отрицательные числа, поскольку мы все время должны иметь в виду возрастающие последовательности ступенчатых функций.

в) Класс C^+ вместе с функциями f и g содержит

$$\min(f, g) \text{ и } \max(f, g).$$

В частности, функция $f^+ = \max(f, 0)$ принадлежит классу C^+ вместе с функцией f. (Этого нельзя сказать о функциях f^- и $|f|$.)

Следующее свойство показывает, что класс C^+ замкнут относительно предельного перехода по возрастающим последовательностям функций с ограниченными интегралами:

Теорема. *Если* $f_n \in C^+$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \nearrow f$ *и* $If_n < C$, *то* $f \in C^+$ *и* $If = \lim If_n$.

Доказательство. Для каждой из функций f_n построим определяющую ее последовательность ступенчатых функций:

$$\begin{array}{ll}
h_{11} \leqslant h_{12} \leqslant \ldots \leqslant h_{1n} \leqslant \ldots, & h_{1n} \nearrow f_1, \\
h_{21} \leqslant h_{22} \leqslant \ldots \leqslant h_{2n} \leqslant \ldots, & h_{2n} \nearrow f_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
h_{k1} \leqslant h_{k2} \leqslant \ldots \leqslant h_{kn} \leqslant \ldots, & h_{kn} \nearrow f_k, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots
\end{array}$$

Положим далее $h_n = \max(h_{1n}, \ldots, h_{nn})$. Очевидно, что h_n — также ступенчатая функция и последовательность $h_n (n = 1, 2, \ldots)$ монотонно возрастает. Далее, $h_n \leqslant \max(f_1, \ldots, f_n) = f_n$, откуда $Ih_n \leqslant \geqslant If_n \geqslant C$.

Обозначим $f^* = \lim h_n$; согласно определению класса C^+ мы имеем $f^* \in C^+$ и $If^* = \lim Ih_n$. Но так как $h_{kn} \leqslant h_n \leqslant f_n$ при любом фиксированном k и $n \geqslant k$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, находим $f_k \leqslant f^* \leqslant f$, откуда $f^* = f$ (почти всюду). Таким образом, $f \in C^+$. Далее, $Ih_{kn} \leqslant Ih_n \leqslant If_n \leqslant If$; так как $Ih_n \nearrow If^* = If$, то и $If_n \nearrow If$, чем доказательство и завершается.

Следствие. *Если для ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$, $g_k \in C^+$, $g_k \geqslant 0$, *интегралы от частных сумм ограничены в совокупности, так что*

$$I\left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right) \leqslant C,$$

то $f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ *есть функция класса* C^+ *и* $If = \sum_{k=1}^{\infty} Ig_k$.

Для доказательства достаточно положить $f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$ и применить предыдущую теорему.

Задачи. 1. Если функция $f(x)$ отличается от функции $f_0(x)$ из класса C^+ лишь на множестве меры 0, то $f(x)$ также входит в C^+.

Указание. Последовательность $h_n(x) \nearrow f_0(x)$ является сходящейся почти всюду и к $f(x)$.

2. Показать, что функция Дирихле, равная 0 при x иррациональном и 1 при x иррациональном, входит в класс C^+.

3. Функция, равная 0 на замкнутом множестве F и 1 на его дополнении, входит в класс C^+.

4. Существует замкнутое множество F такое, что функция, равная 1 на F и 0 на его дополнении, не входит в C^+.

Указание. Взять F нигде не плотным и не являющимся множеством меры 0. См. задачу к § 1.

5. Доказать, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману или отличается от таковой на множестве меры 0 тогда и только тогда, когда $f \in C^+$, $-f \in C^+$.

6. Доказать, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва имеет меру 0.

Указание. Если $s_n(x) \nearrow f(x)$ и $S_n(x) \searrow f(x)$ и x_0 есть точка непрерывности всех ступенчатых функций $s_n(x)$ и $S_n(x)$, то x_0 есть точка непрерывности $f(x)$. Обратно, во всякой точке непрерывности x_0 справедливы соотношения $s_n(x_0) \nearrow f(x_0)$, $S_n(x_0) \searrow f(x_0)$.

§ 3. Суммируемые функции

1. В этом параграфе мы завершим построение интеграла, распространив его с класса C^+ на некоторый более широкий класс L, в котором уже можно будет производить все естественные для функций операции.

Будем называть *суммируемой* (или *интегрируемой по Лебегу*) функцией всякую функцию $\varphi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, которая может быть представлена как разность

$$\varphi = f - g$$

двух функций из класса C^+. Совокупность всех суммируемых функций обозначим через L. В классе суммируемых функций можно производить следующие операции:

а) Сложение. Если $\varphi = f - g$ и $\varphi_1 = f_1 - g_1$ — суммируемые функции, f, g, f_1, g_1 — функции класса C^+, то

$$\varphi + \varphi_1 = (f + f_1) - (g + g_1),$$

и так как $f + f_1 \in C^+$, $g + g_1 \in C^+$, то $\varphi + \varphi_1$ есть функция класса L.

б) Умножение на любое вещественное число α. Если $\alpha \geqslant 0$, то из $\varphi = f - g$, $f \in C^+$, $g \in C^+$ следует $\alpha\varphi = \alpha f - \alpha g$, $\alpha f \in Cg$, $\alpha g \in C^+$ и, следовательно, $\alpha\varphi \in L$; если же $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$ и равенство $\alpha\varphi = (-\alpha) g - (-\alpha) f$ показывает, что по-прежнему $\alpha\varphi \in L$.

Из а) и б) вытекает, что любые линейные комбинации функций класса L суть также функции класса L.

в) Взятие модуля функции. Пусть $\varphi = f - g$, $f \in C^+$, $g \in C^+$, тогда $\max(f, g)$ и $\min(f, g)$ также принадлежат классу C^+; отсюда $|\varphi| = \max(f, g) - \min(f, g)$ принадлежит классу L. Решая уравнения

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-,$$
$$|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-,$$

мы видим, что функции φ^+ и φ^- также принадлежат классу L вместе с функцией φ.

Далее, равенства

$$\max(\varphi, \psi) = (\varphi + \psi)^+ - \psi,$$
$$\min(\varphi, \psi) = -\max(-\varphi, -\psi)$$

показывают, что вместе с функциями φ и ψ в класс L входят их максимум и минимум.