Указание. Если $s_n(x)\nearrow f(x)$ и $S_n(x)\searrow f(x)$ и x_0 есть точка непрерывности всех ступенчатых функций $s_n(x)$ и $S_n(x)$, то x_0 есть точка непрерывности $f(x)$. Обратно, во всякой точке непрерывности x_0 справедливы соотношения $s_n(x_0)\nearrow f(x_0)$, $S_n(x_0)\searrow f(x_0)$.

§ 3. Суммируемые функции

1. В этом параграфе мы завершим построение интеграла, распространив его с класса C^+ на некоторый более широкий класс L, в котором уже можно будет производить все естественные для функций операции.

Будем называть *суммируемой* (или *интегрируемой по Лебегу*) функцией всякую функцию $\varphi(x)\,(a\leqslant x\leqslant b)$, которая может быть представлена как разность

$$\varphi=f-g$$

двух функций из класса C^+. Совокупность всех суммируемых функций обозначим через L. В классе суммируемых функций можно производить следующие операции:

а) Сложение. Если $\varphi=f-g$ и $\varphi_1=f_1-g_1$ — суммируемые функции, f, g, f_1, g_1 — функции класса C^+, то

$$\varphi+\varphi_1=(f+f_1)-(g+g_1),$$

и так как $f+f_1\in C^+$, $g+g_1\in C^+$, то $\varphi+\varphi_1$ есть функция класса L.

б) Умножение на любое вещественное число α. Если $\alpha\geqslant 0$, то из $\varphi=f-g$, $f\in C^+$, $g\in C^+$ следует $\alpha\varphi=\alpha f-\alpha g$, $\alpha f\in Cg$, $\alpha g\in C^+$ и, следовательно, $\alpha\varphi\in L$; если же $\alpha<0$, то $-\alpha>0$ и равенство $\alpha\varphi=(-\alpha)g-(-\alpha)f$ показывает, что по-прежнему $\alpha\varphi\in L$.

Из а) и б) вытекает, что любые линейные комбинации функций класса L суть также функции класса L.

в) Взятие модуля функции. Пусть $\varphi=f-g$, $f\in C^+$, $g\in C^+$, тогда $\max(f,\ g)$ и $\min(f,\ g)$ также принадлежат классу C^+; отсюда $|\varphi|=\max(f,\ g)-\min(f,\ g)$ принадлежит классу L. Решая уравнения

$$\varphi=\varphi^+-\varphi^-,$$
$$|\varphi|=\varphi^++\varphi^-,$$

мы видим, что функции φ^+ и φ^- также принадлежат классу L вместе с функцией φ.

Далее, равенства

$$\max(\varphi,\ \psi)=(\varphi+\psi)^+-\psi,$$
$$\min(\varphi,\ \psi)=-\max(-\varphi,\ -\psi)$$

показывают, что вместе с функциями φ и ψ в класс L входят их максимум и минимум.

2. Введем теперь в класс L определение интеграла. Для этого, имея разложение

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = f - g, \\ &f \in C^+, \\ &g \in C^+, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

положим

$$I\varphi = If - Ig.$$

Проверим, что при этом $I\varphi$ определен единственным образом. Пусть наряду с разложением (1) имеется второе разложение

$$\varphi = f_1 - g_1, \quad f_1 \in C^+, \quad g_1 \in C^+.$$

Докажем, что $If - Ig = If_1 - Ig_1$. Это равенство эквивалентно равенству

$$If + Ig_1 = Ig + If_1. \tag{2}$$

Но так как $f + g_1 = f_1 + g$, то в силу единственности интеграла в классе C^+ мы имеем:

$$I(f + g_1) = I(g + f_1),$$

откуда и вытекает (2).

Покажем далее, что полученный интеграл обладает в классе L обычными линейными свойствами. Пусть $\varphi = f - g$, $\varphi_1 = f_1 - g_1$, где f, g, f_1, g_1 входят в класс C^+. Тогда $\varphi + \varphi_1 = (f + f_1) - (g + g_1)$, и согласно определению

$$\begin{aligned} I(\varphi + \varphi_1) &= I(f + f_1) - I(g + g_1) = If + If_1 - Ig - Ig_1 = \\ &= (If - Ig) + (If_1 - Ig_1) = I\varphi + I\varphi_1. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл суммы равен сумме интегралов. Далее, при $\alpha > 0$ $I(\alpha\varphi) = I(\alpha f - \alpha g) = I(\alpha f) - I(\alpha g) = \alpha If - \alpha Ig = \alpha(If - Ig) = \alpha I\varphi$; с другой стороны, $I(-\varphi) = I(g - f) = Ig - If = -I\varphi$, и следовательно, при $\alpha < 0$ мы имеет $I(\alpha\varphi) = I(-|\alpha|\varphi) = -I(|\alpha|\varphi) = -|\alpha| I(\varphi) = \alpha I\varphi$, так что число α можно выносить за знак интеграла, каков бы ни был знак α.

Заметим далее, что если $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in L$, то $I\varphi \geqslant 0$. Действительно, если $\varphi = f - g$, $f \in C^+$, $g \in C^+$ и $\varphi \geqslant 0$, то $f \geqslant g$ и $If \geqslant Ig$; поэтому $I\varphi = If - Ig \geqslant 0$. Отсюда получаем далее, что из $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ следует $I\varphi_1 \leqslant I\varphi_2$.

3. Теперь докажем важную теорему о почленном интегрировании рядов с положительными слагаемыми.

Теорема (Бéппо Лéви, 1906). *Если для ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$, $\varphi_k \in L$, $\varphi_k \geqslant 0$, *интегралы от частных сумм ограничены в совокупности,* *так что*

$$I\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right) \leqslant C,$$

то $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ *есть суммируемая функция и* $I\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} I\varphi_k$.

Доказательство. Отметим сначала, что в разложении суммируемой функции $\varphi = f - g$, $f \in C^+$, $g \in C^+$, можно подчинять f и g дальнейшим условиям. Например, всегда можно выбрать g так, чтобы иметь $g \geqslant 0$, $Ig < \varepsilon$, где ε — заданное число. Для этого нужно рассмотреть последовательность ступенчатых функций $h_n \nearrow g$, так что $Ig = \lim Ih_n$, и затем написать

$$\varphi = f - g = (f - h_n) - (g - h_n) = f_n - g_n.$$

Очевидно, что при достаточно большом n требуемое условие для функции $g_n = g - h_n$ заведомо выполняется. Заметим при этом, что если $\varphi \geqslant 0$, то и функция $f_n = f - h_n \geqslant f - g = \varphi$ также получается неотрицательной.

Теперь для каждой из функций φ_k, участвующих в формулировке теоремы, построим разложение

$$\varphi_k = f_k - g_k,$$

где $f_k \geqslant 0$, $g_k \geqslant 0$, $Ig_k < \frac{1}{2^k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. При этом ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ удовлетворяет условиям следствия из теоремы § 2 $\left(g_k \geqslant 0,\ I\left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right) < 1\right)$. Поэтому $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ принадлежит классу C^+ и $Ig = \sum_{k=1}^{\infty} Ig_k$. Покажем, что и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ также удовлетворяет условиям этого следствия; действительно, мы имеем $f_k \geqslant 0$ и

$$I\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) = I\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right) + I\left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right) \leqslant C + 1.$$

Поэтому и $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ принадлежит классу C^+ и $If = \sum_{k=1}^{\infty} If_k$. Отсюда $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{\infty} g_k = f - g$ принадлежит классу L и

$$I\varphi = If - Ig = \sum_{k=1}^{\infty} If_k - \sum_{k=1}^{\infty} Ig_k = \sum_{k=1}^{\infty} I(f_k - g_k) = \sum_{k=1}^{\infty} I\varphi_k.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если суммируемые функции ψ_n, монотонно возрастая, стремятся к пределу ψ и $I\psi_n \leqslant C$, то ψ — суммируемая функция и*

$$I\psi = \lim I\psi_n.$$

Для доказательства достаточно положить $\varphi_1 = \psi_2 - \psi_1, \ldots, \varphi_n = \psi_{n+1} - \psi_n$ и применить предыдущую теорему. Аналогичный результат справедлив, разумеется, и для убывающих последовательностей $\psi_n \searrow \psi$, если только $I\psi_n \geqslant C$.

4. В дальнейшем мы будем рассматривать произвольные (немонотонные) предельные переходы. Классические примеры показывают, что нельзя ожидать теоремы вида «*из* $\varphi_n \to \varphi$ *следует* $I\varphi_n \to I\varphi$» без дополнительных предположений о характере сходимости последовательности φ_n к своему пределу. Например, функции

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n \sin nx & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n}, \\ 0 & \text{при } \frac{\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

сходятся к нулю при каждом $x \in [0, \pi]$, в то время как интегралы от них остаются постоянными (равными 2) и не стремятся к интегралу от предельной функции.

Рассмотрим совокупность $L(\varphi_0)$ всех суммируемых функций φ, удовлетворяющих неравенству

$$-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0, \tag{3}$$

где φ_0 — фиксированная неотрицательная суммируемая функция. Очевидно, что для каждой функции $\varphi \in L(\varphi_0)$ выполнено неравенство

$$-I\varphi_0 \leqslant I\varphi \leqslant I\varphi_0.$$

Если имеется монотонная последовательность функций φ_n — убывающая или возрастающая,— принадлежащих совокупности $L(\varphi_0)$, то предельная функция φ, разумеется, удовлетворяет неравенству (3) вместе с функциями φ_n; эта функция является, согласно предыдущему следствию, и суммируемой. Следовательно, совокупность $L(\varphi_0)$ замкнута относительно монотонных предельных переходов. Заметим далее, что для *любой* последовательности $\varphi_n \in L(\varphi_0)$ можно утверждать, что функции

$$\sup_n \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\}$$

и

$$\inf_n \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\}$$

также принадлежат совокупности $L(\varphi_0)$: первая из них является пределом при $n \to \infty$ возрастающей последовательности функций

$$\max\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\} \in L(\varphi_0),$$

а вторая — пределом убывающей последовательности функций

$$\min\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\} \in L(\varphi_0).$$

Пусть теперь $\varphi_n \in L(\varphi_0)$ — любая последовательность, сходящаяся почти всюду к некоторой функции ψ; покажем, что ψ также принадлежит классу $L(\varphi_0)$. Достаточно показать, что ψ представляется в виде предела некоторой монотонной последовательности функций из класса $L(\varphi_0)$. Положим

$$\psi_n(x) = \sup\{\varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \ldots\},$$
$$\psi_n'(x) = \inf\{\varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \ldots\}.$$

По доказанному, эти функции суммируемы и принадлежат классу $L(\varphi_0)$. Если рассмотреть только те значения x, где функции $\varphi_n(x)$ имеют предел $\psi(x)$, то очевидно, что при каждом таком значении

$$\psi_n(x) \geqslant \lim_{p\to\infty} \varphi_{n+p}(x) = \psi(x),$$
$$\psi_n''(x) \leqslant \lim_{p\to\infty} \varphi_{n+p}(x) = \psi(x).$$

Далее, убирая функцию φ_n из совокупности $\varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots$, мы можем только уменьшить верхнюю грань этой совокупности и только увеличить нижнюю грань; поэтому

$$\psi_{n+1}(x) \leqslant \psi_n(x),$$
$$\psi_{n+1}''(x) \geqslant \psi_n'(x).$$

Следовательно, $\psi_n(x)$ — убывающая, а $\psi_n''(x)$ — возрастающая последовательность. Далее, ясно, что из $\varphi_n(x) \to \psi(x)$ следует $\psi_n(x) \searrow \psi(x)$ и $\psi_n''(x) \nearrow \psi(x)$. Таким образом, функция $\psi(x)$ оказывается пределом возрастающей последовательности функций класса $L(\varphi_0)$ (и одновременно пределом убывающей последовательности функций этого класса). Отсюда $\psi \in L(\varphi_0)$, что и утверждалось. При этом мы имеем $I\psi_n'' \nearrow I\psi$, $I\psi_n \searrow I\psi$ и $I\psi_n'' \leqslant I\varphi_n \leqslant I\psi_n$, откуда $I\varphi_n \to I\psi$. Мы доказали следующую теорему:

Теорема (Лебег, 1902). *Если последовательность суммируемых функций φ_n сходится почти всюду к функции φ и удовлетворяет условию*

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \varphi_0(x) \in L,$$

то φ — суммируемая функция и $I\varphi = \lim I\varphi_n$. В частности, равенство $I\varphi = \lim I\varphi_n$ справедливо, если функции φ_n ограничены в совокупности.

Из этой теоремы мы можем получить важный результат относительно состава класса $L(\varphi_0)$. Именно покажем, что *если некоторая измеримая функция φ удовлетворяет (почти всюду) неравенству*

$$-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 \in L,$$

то она суммируема (и принадлежит тем самым классу $L(\varphi_0)$). Действительно, пусть h_n — последовательность ступенчатых функций, определяющая измеримую функцию φ. Обрезая ее сверху по уровню φ_0 и снизу по уровню $-\varphi_0$, т. е. заменяя ее функцией

$$\varphi_n = \max\{-\varphi_0,\ \min(h_n,\ \varphi_0)\},$$

мы получим последовательность суммируемых функций, принадлежащих классу $L(\varphi_0)$, сходящуюся почти всюду к функции φ. Значит, $\varphi = \lim \varphi_n$ является суммируемой функцией, что и требовалось.

В частности, *всякая ограниченная измеримая функция суммируема.*

С другой стороны, доказанная нами теорема о суммируемых функциях позволит сделать дальнейшие заключения об измеримых функциях. Покажем, что *предел $\varphi(x)$ сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций $\varphi_n(x)$ — если он конечен почти всюду — есть функция измеримая.* Достаточно рассмотреть случай $\varphi_n(x) \geqslant 0$, так как в противном случае можно отдельно рассмотреть последовательности φ_n^+ и φ_n^-. Но если почти всюду φ_n сходятся к φ, то также почти всюду последовательность функций $\psi_n = \frac{1}{1+\varphi_n}$ сходится к $\psi = \frac{1}{1+\varphi}$. Функции ψ_n заключены между 0 и 1 и измеримы. Поэтому они суммируемы, а их предел ψ, по доказанному,— также суммируемая и, следовательно, измеримая функция. Заметим, что функция ψ может принимать значение 0 только там, где $\varphi(x) = \infty$, т. е. на множестве меры 0. Поэтому, обращая полученное равенство, находим, что и

$$\varphi = \frac{1-\psi}{\psi}$$

есть функция измеримая, так как числитель и знаменатель полученного отношения измеримы и знаменатель отличен от нуля почти всюду.

5. В одном случае можно утверждать суммируемость предельной функции последовательности φ_n, заменив предположение об ограниченности функций $|\varphi_n|$ суммируемой функцией некоторыми другими предположениями:

Лемма (Фату, 1906). *Если* $\varphi_n \geqslant 0$ *— суммируемые функции,* $\varphi_n \to \varphi$ *почти всюду и* $I\varphi_n \leqslant C$, то φ *— суммируемая функция и*

$$0 \leqslant I\varphi \leqslant C.$$

Доказательство. Положим

$$\psi_n = \inf\{\varphi_n,\ \varphi_{n+1},\ \ldots\} \geqslant 0.$$

Как и выше, функции ψ_n образуют возрастающую последовательность, сходящуюся почти всюду к функции φ. Далее, $\psi_n \leqslant \varphi_n$, $I\psi_n \leqslant I\varphi_n \leqslant C$; в силу теоремы Беппо Леви функция φ суммируема и $I\psi_n \nearrow I\varphi$. В частности, $0 \leqslant I\varphi = \lim I\psi_n \leqslant C$, что и требовалось.

Пусть, в частности, функция $\varphi_0 \geqslant 0$ суммируема и $I\varphi_0 = 0$; покажем, что $\varphi_0 = 0$ почти всюду. Положим $\varphi_n = n\varphi_0$; функция φ_n стремится к пределу φ, равному 0 там, где φ_0 равна нулю, и ∞ там, где $\varphi_0 > 0$. Но так как, по лемме Фату, предельная функция должна быть суммируемой, в частности измеримой, то множество тех x, где $\varphi(x) = \infty$, есть множество меры 0. Вместе с тем и множество тех x, где $\varphi_0(x) > 0$, есть множество меры 0. Мы получаем: *если у неотрицательной суммируемой функции $\varphi_0(x)$ интеграл равен нулю, то эта функция $\varphi_0(x)$ сама почти всюду равна нулю.*

6. В этом пункте мы не будем считать различными две суммируемые функции, совпадающие на множестве полной меры.

Точнее говоря, от самих суммируемых функций мы перейдем к классам эквивалентных функций: две функции считаются эквивалентными, если они совпадают на множестве полной меры. В частности, функция $f(x)$ эквивалентна нулю, если она отлична от нуля самое большее на множестве меры 0. Функции, эквивалентные нулю, образуют, очевидно, подпространство L_0 в линейном пространстве L всех суммируемых функций, что мы сейчас делаем, по сути дела, есть переход от пространства L к его фактор-пространству L/L_0 (гл. II, § 8, п. 4). В пространстве L имеется квазинорма $\|\varphi\| = I(|\varphi|)$ (напомним, что квазинорма отличается от нормы тем, что могут существовать ненулевые элементы с квазинормой, равной нулю). Подпространство L_0 состоит из тех и только тех функций, у которых квазинорма равна нулю. Поэтому в совокупность классов эквивалентных суммируемых функций можно ввести норму, считая ее равной $I(|\varphi|)$, где φ — любая из функций класса. В соответствии с п. 4 § 8 гл. II мы получим линейное нормированное пространство классов эквивалентных суммируемых функций, которое будем называть *пространством Лебега*. Впрочем, в дальнейшем мы откажемся от излишнего педантизма и будем говорить просто «суммируемая функция» вместо «класс эквивалентных суммируемых функций», а пространство Лебега будем обозначать по-прежнему через L, или, точнее, через $L_1(a, b)$.

Теорема (Э. Фишер и Ф. Рисс, 1907). *Пространство Лебега — полное пространство: всякая фундаментальная по норме $\|\varphi\| = I(|\varphi|)$ последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ имеет в смысле этой нормы предел в пространстве L.*

Прежде чем переходить к доказательству этого утверждения, отметим два простых факта. Во-первых, элементы всякой фундаментальной последовательности ограничены по норме, так как, начиная с некоторого номера, все эти элементы содержатся в шаре радиуса ε

с центром в некоторой точке φ_n. Во-вторых, для доказательства существования предела фундаментальной последовательности φ_n достаточно показать, что имеется предел φ некоторой последовательности φ_{n_k} $(k=1, 2, \ldots)$; этот элемент φ будет пределом и всей последовательности φ_n в силу неравенства

$$\|\varphi-\varphi_n\| \leqslant \|\varphi-\varphi_{n_k}\|+\|\varphi_{n_k}-\varphi_n\|,$$

причем второе слагаемое справа стремится к нулю в силу фундаментальности последовательности φ_n.

Теперь переходим к доказательству теоремы.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — фундаментальная последовательность в пространстве L. Всегда можно выбрать последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots$ так, чтобы при $n > n_k$ выполнялись неравенства

$$\|\varphi_n-\varphi_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

В частности, $\|\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$; это означает, что

$$I(|\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}|) < \frac{1}{2^k}.$$

Но тогда ряд суммируемых функций $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}|$, согласно теореме Беппо Леви, сходится почти всюду. Отсюда следует, что сходится почти всюду и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k})$ с частными суммами

$$\sum_{k=1}^{N} (\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}) = \varphi_{n_{N+1}}-\varphi_{n_1}.$$

Это означает существование предела (почти всюду) при $k \to \infty$ у функции φ_{n_k}. Обозначим этот предел через φ. Функция φ измерима как предел измеримых функций. Так как нормы функций φ_{n_k}, т. е. числа $I(|\varphi_{n_k}|)$, ограничены, то, по лемме Фату, функция $|\varphi|$ суммируема. Следовательно, суммируема и измеримая функция φ. Далее, по той же лемме, примененной к функциям $\varphi-\varphi_{n_k}$, мы имеем:

$$\|\varphi-\varphi_{n_k}\| = I(|\varphi-\varphi_{n_k}|) \leqslant \sup_{p>k} I(|\varphi_{n_p}-\varphi_{n_k}|) =$$
$$= \sup_{p>k} \|\varphi_{n_p}-\varphi_{n_k}\|.$$

Но последний интеграл по условию может быть сделан при достаточно большом k сколь угодно малым. Следовательно, φ_{n_k} сходится к φ по норме пространства L, и теорема доказана.

В заключение покажем, что пространство $L_1(a, b)$ является пополнением пространства $C_1(a, b)$ непрерывных функций $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с нормой (см. гл. II, § 8)

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Очевидно, что пространство $L_1(a, b)$ содержит пространство $C_1(a, b)$ как подпространство с той же метрикой. Поэтому нам достаточно показать, что $C_1(a, b)$ располагается в L_1 как плотное подмножество, так что каждую функцию $\varphi \in L_1$ можно представить как предел последовательности функций $f_n(x) \in C_1$. Легко убедиться, что каждая ступенчатая функция $h(x)$ обладает этим свойством. С другой стороны, поскольку каждая функция $\varphi \in L_1$ есть разность двух функций из класса C^+, достаточно проверить наше утверждение для функций из класса C^+. Пусть $\varphi \in C^+$ и $h_n \nearrow \varphi$ — последовательность ступенчатых функций. Тогда

$$\|\varphi - h_n\| = I(\varphi - h_n),$$

и так как $\varphi - h_n \searrow 0$, то по теореме Беппо Леви

$$I(\varphi - h_n) \searrow 0,$$

чем теорема и доказана.

Мы видели (гл. II, § 3, п. 3), что множество многочленов всюду плотно в пространстве $C[a, b]$ и множество тригонометрических многочленов $T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ всюду плотно в пространстве $C_1(-\pi, \pi)$. Так как $C(a, b)$ всюду плотно в своем пополнении $L_1(a, b)$, то мы можем заключить, что множество многочленов всюду плотно в пространстве $L_1(a, b)$ при любых a и b; аналогично множество тригонометрических многочленов всюду плотно в пространстве $L_1(-\pi, \pi)$.

1. Если суммируемая функция f равна нулю вне отрезка $[\alpha, \beta]$, внутреннего по отношению к исходному отрезку $[a, b]$, так что функцию $f(x)$ можно «сдвигать», то в пространстве L она «непрерывна в интегральном смысле»: для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что при $|h| < \delta$:

$$\|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Указание. Показать, что множество всех f, для которых (*) выполнено, замкнуто в пространстве L. Затем проверить (*) для непрерывных функций.

§ 4. Мера множеств и теория интегрирования Лебега

1. Мы называем множество A, лежащее на отрезке $[a, b]$, *измеримым*, если измерима (и, следовательно, суммируема) «характеристическая функция» этого множества, т. е. функция $\chi_A(x)$, равная 1 на