В заключение покажем, что пространство $L_1(a, b)$ является пополнением пространства $C_1(a, b)$ непрерывных функций $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с нормой (см. гл. II, § 8)

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Очевидно, что пространство $L_1(a, b)$ содержит пространство $C_1(a, b)$ как подпространство с той же метрикой. Поэтому нам достаточно показать, что $C_1(a, b)$ располагается в L_1 как плотное подмножество, так что каждую функцию $\varphi \in L_1$ можно представить как предел последовательности функций $f_n(x) \in C_1$. Легко убедиться, что каждая ступенчатая функция $h(x)$ обладает этим свойством. С другой стороны, поскольку каждая функция $\varphi \in L_1$ есть разность двух функций из класса C^+, достаточно проверить наше утверждение для функций из класса C^+. Пусть $\varphi \in C^+$ и $h_n \nearrow \varphi$ — последовательность ступенчатых функций. Тогда

$$\|\varphi - h_n\| = I(\varphi - h_n),$$

и так как $\varphi - h_n \searrow 0$, то по теореме Беппо Леви

$$I(\varphi - h_n) \searrow 0,$$

чем теорема и доказана.

Мы видели (гл. II, § 3, п. 3), что множество многочленов всюду плотно в пространстве $C[a, b]$ и множество тригонометрических многочленов $T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ всюду плотно в пространстве $C_1(-\pi, \pi)$. Так как $C(a, b)$ всюду плотно в своем пополнении $L_1(a, b)$, то мы можем заключить, что множество многочленов всюду плотно в пространстве $L_1(a, b)$ при любых a и b; аналогично множество тригонометрических многочленов всюду плотно в пространстве $L_1(-\pi, \pi)$.

1. Если суммируемая функция f равна нулю вне отрезка $[\alpha, \beta]$, внутреннего по отношению к исходному отрезку $[a, b]$, так что функцию $f(x)$ можно «сдвигать», то в пространстве L она «непрерывна в интегральном смысле»: для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что при $|h| < \delta$:

$$\|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Указание. Показать, что множество всех f, для которых (*) выполнено, замкнуто в пространстве L. Затем проверить (*) для непрерывных функций.

§ 4. Мера множеств и теория интегрирования Лебега

1. Мы называем множество A, лежащее на отрезке $[a, b]$, *измеримым*, если измерима (и, следовательно, суммируема) «характеристическая функция» этого множества, т. е. функция $\chi_A(x)$, равная 1 на

A и 0 на дополнении A. Интеграл от характеристической функции мы называем *мерой* множества A и обозначаем μA. Если множество A есть множество меры нуль в смысле определения § 1, то, как было там показано, интеграл от функции $\chi_A(x)$ равен нулю, так что A есть множество меры нуль и в нашем новом определении: $\mu A = 0$. Обратно, если интеграл характеристической функции множества A равен нулю, то, согласно замечанию после леммы Фату, A имеет меру нуль в прежнем смысле. Итак, для множества меры нуль новое определение совпадает с прежним.

Известные уже нам свойства интегралов позволят получить свойства измеримых множеств. Так, объединение A конечной или счетной совокупности измеримых множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ есть измеримое множество, поскольку его характеристическая функция может быть определена формулой

$$\chi_A(x) = \sup\{\chi_{A_1}(x), \ldots, \chi_{A_n}(x), \ldots\}.$$

В случае, если множества $A_1, A_2, \ldots$ не пересекаются, мы имеем:

$$\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x) + \ldots + \chi_{A_n}(x) + \ldots$$

и в силу теоремы Лебега (§ 3)

$$\mu A = \mu A_1 + \ldots + \mu A_n + \ldots \tag{1}$$

Это свойство называют *полной*, или *аддитивностью меры*. Далее, вычитая измеримое множество A_1 из содержащего его измеримого множества A_2, получаем снова измеримое множество A_3, поскольку

$$\chi_{A_3} = \chi_{A_1} - \chi_{A_2}.$$

При этом $\mu A_3 = \mu A_1 - \mu A_2$. Так как отрезок $[a, b]$ измерим, то, в частности, измеримо дополнение любого измеримого множества $A \subset [a, b]$. Отсюда, далее, следует, что последовательность измеримых множеств $A_1, A_2, \ldots$ имеет и измеримое пересечение, так как его дополнение

$$C \prod_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} CA_n$$

есть измеримое множество. Отметим, наконец, следующее предельное соотношение:

Если

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \quad \textit{и} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

то

$$\mu A = \lim_{n \to \infty} \mu A_n. \tag{2}$$

Действительно, мы имеем:

$$A = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \ldots + (A_{n+1} - A_n) + \ldots,$$
$$\mu A = \mu A_1 + \mu(A_2 - A_1) + \ldots + \mu(A_{n+1} - A_n) + \ldots =$$
$$= \mu A_1 + (\mu A_2 - \mu A_1) + \ldots + (\mu A_{n+1} - \mu A_n) + \ldots = \lim_{n \to \infty} \mu A_n.$$

Если же $A_1, A_2, \ldots$ — произвольная система измеримых множеств, то множества $A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_1 + A_2, \ldots, A'_n = A_1 + \ldots + A_n, \ldots$ также измеримы и вложены друг в друга; по доказанному, для $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ имеет место равенство

$$\mu A = \lim \mu A'_n = \lim \mu\,[A_1 + \ldots + A_n].$$

В частности, поскольку всегда $\mu(A' + A'') = \mu(A' + [A'' - A'A'']) = \mu(A') + \mu(A'' - A'A'') \leqslant \mu A' + \mu A''$, мы имеем:

$$\mu A = \lim \mu A'_n \leqslant \lim_{n \to \infty} [\mu A_1 + \ldots + \mu A_n] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n. \tag{3}$$

Для пересечений имеют место аналогичные равенства, которые получаются применением операции дополнения: например, если даны измеримые множества $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ и $A = \prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то

$$\mu A = \mu \prod_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{n \to \infty} \mu \prod_{k=1}^{n} A_k. \tag{4}$$

Любой промежуток (отрезок, интервал и т. п.) является, очевидно, измеримым множеством и имеет меру, равную его длине. Вышеприведенные формулы показывают, что любое открытое множество, как (не более чем) счетная сумма непересекающихся интервалов, измеримо и его мера равна сумме длин составляющих его интервалов. Далее, всякое замкнутое множество измеримо, как дополнение к открытому. Вообще всякое множество, которое получается из интервалов применением последовательных операций объединения и пересечения в счетном числе, а также операции дополнения, измеримо.

2. Естественно поставить вопрос, существуют ли вообще неизмеримые множества. Сказанное выше показывает, что вопрос о построении конкретного неизмеримого множества весьма сложен, так как обычные пути построения, начинающиеся с интервалов и использующие счетные объединения и пересечения, не выводят за пределы совокупности измеримых множеств. До сих пор не построено ни одного индивидуального примера неизмеримого множества. Тем не менее в существовании неизмеримых множеств мы можем не сомневаться. Приведем соответствующие рассуждения, следуя Н. Н. Лузину. Отрезок [0, 1], на котором мы будем производить наши построения, удобнее представить себе свернутым в окружность длины 1, так что точки 0 и 1 оказываются совпадающими. Все расстояния мы будем измерять вдоль этой окружности.

Назовем точки ξ, η *родственными*, если расстояние между ними рационально, и *чуждыми*, если оно иррационально. Очевидно, что если ξ родственно с η, а η родственно с ζ, то ξ родственно с ζ. Счетную совокупность всех точек, находящихся на рациональных расстояниях от данной точки, назовем *семейством*; все члены этого семейства родственны между собой и чужды по отношению ко всякой точке, не входящей в семейство. Семейства A и B, включающие в себя заданные точки α и β, или совпадают (если α и β родственны), или не имеют ни одного общего элемента (если α и β чужды). Вся совокупность точек отрезка $[0, 1]$ есть объединение некоторого множества различных семейств. Множество всех семейств заведомо несчетное, так как несчетно множество всех точек отрезка $[0, 1]$. Представим себе теперь, что каким-то образом из каждого семейства выбрано по одному представителю. Обозначим через Z совокупность всех этих представителей. Мы утверждаем, что, по какому бы принципу ни выбирать представителей, все равно множество Z будет неизмеримым. (Мы не можем указать ни одного возможного правила для выбора представителей, поэтому нельзя сказать, что множество Z построено эффективно.) Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — последовательность всех рациональных чисел; обозначим через Z_n сдвиг множества Z как целого на отрезок r_n, так что Z_n состоит из точек вида $\xi + r_n$, где ξ пробегает все Z. Отсюда ясно, что множества Z_n и Z_m не пересекаются, если $m \neq n$; в противном случае мы имели бы равенство $\xi + r_n = \eta + r_m$, где ξ и η принадлежат Z; но тогда разность $\xi - \eta = r_m - r_n$ была бы рациональной, т. е. точки ξ и η были бы родственными, что по построению исключено. Далее, всякая точка отрезка $[0, 1]$ входит в некоторое Z_n, так как всякая точка λ имеет вид $\xi + r_n$, где ξ есть представитель того семейства, которое содержит точку λ. Таким образом, множества $Z_1, Z_2, \ldots$ не пересекаются и в сумме дают весь отрезок $[0, 1]$. Если бы множество Z было измеримо, то и все множества $Z_1, Z_2, \ldots$ были бы измеримы и имели бы меру, равную мере Z. В силу счетной аддитивности меры мы должны были бы иметь

$$\mu Z_1 + \mu Z_2 + \ldots + \mu Z_n + \ldots = \mu Z + \mu Z + \ldots + \mu Z + \ldots = 1.$$

Но это невозможно ни при каком значении μZ: ни при $\mu Z > 0$, ни при $\mu Z = 0$. Таким образом, множество Z не может быть измеримым.

Задачи. 1. Для любой измеримой функции f и числа c показать, что множество $E = \{x : f(x) \geqslant c\}$ измеримо.

Указание: $E = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \prod\limits_{m=n}^{\infty} \left\{x : h_m(x) > c - \frac{1}{k}\right\}$, где $h_m \to f$ — последовательность ступенчатых функций.

2. Если $f_n \to f$ почти всюду, то при любом $c > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mu \{x : |f - f_n| \geqslant c\} = 0. \tag{5}$$

Указание.

$$\mu \prod_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{x : f - f_n \geqslant c\} = 0.$$

3. Последовательность измеримых функций $f_n(x)$, удовлетворяющих при любом $c > 0$ соотношению (5), называется сходящейся по мере к функции f. Показать, что хотя сама последовательность f_n может не сходиться почти всюду к f, но она заведомо содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к f.

Указание. Для любых натуральных k и m найдется номер $n=n(k, m)$, для которого $\mu\left\{x: |f_{n(k,m)}-f|>\frac{1}{k}\right\}<\frac{\frac{1}{k}}{2m}$. Функции $f_{n(k,m)}$ при $k\to\infty$ сходятся к f на множестве меры $>b-a-\frac{1}{m}$. Искомая последовательность получается из $f_{n(k,m)}$ диагональным процессом по m.

4. Если каждая подпоследовательность данной последовательности измеримых функций f_n содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к фиксированной функции f, то f_n сходится к f по мере.

Указание. Доказательство от противного с использованием результата задачи 2.

5. Если $f\geqslant 0$ — суммируемая функция и $\mu\{x: f(x)\geqslant c\}\geqslant b$, то $If\geqslant bc$.

Указание. Для ступенчатых функций утверждение очевидно. В общем случае из формулы задачи 1 получить неравенство

$$b\leqslant\mu\{x: f(x)\geqslant c\}\leqslant\mu\left\{x: h_m(x)<c-\frac{1}{k}\right\}+\varepsilon$$

при любых k и ε и достаточно большом m. Отсюда

$$Ih_m\geqslant(b-\varepsilon)\left(c-\frac{1}{k}\right).$$

6. Если $f_n\geqslant 0$ и $If_n\longrightarrow 0$, то $f_n\longrightarrow 0$ по мере. (Сходимость почти всюду не вытекает из этих условий.) Условие $f_n\geqslant 0$ нельзя отбросить.

Указание. Использовать задачу 5.

7. В пространстве всех измеримых функций $f(x)$ на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ введена метрика по формуле

$$\rho(f, g)=I\left(\frac{|f-g|}{1+|f-g|}\right). \tag{6}$$

Проверить выполнение аксиом метрического пространства. Показать, что сходимость по метрике (6) совпадает со сходимостью по мере. Показать, что это метрическое пространство полно.

8. Обозначим через $a_k(x)$ функцию, равную в точке $x\in[0, 1]$ k-му знаку двоичного разложения числа x. Показать, что для функции

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k(x)$$

справедливо равенство $\displaystyle\int_0^1\left[\sigma_n(x)-\frac{1}{2}\right]^2 dx=\frac{1}{4n}$.

Указание. $\displaystyle\int_0^1 a_j(x)\,a_k(x)\,dx=\frac{1}{4}$ при любых $j\neq k$.

9. (Продолжение). Последовательность $\sigma_{n^2}(x)$ сходится к $f(x)\equiv\frac{1}{2}$ почти всюду.

Указание. При любом $\varepsilon>0$ $\mu\left\{x: \left|\sigma_n(x)-\frac{1}{2}\right|>\varepsilon\right\}\leqslant\frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

10. (Продолжение). Последовательность $\sigma_n(x)$ сходится к $f(x)\equiv\frac{1}{2}$ почти всюду.

Указание. Если $m^2 < n < (m+1)^2$, то $\frac{1}{n}\sum\limits_{m^2+1}^{n} a_k(x) < \frac{2m+1}{m^2}$.

Примечание. Результат задачи 10 показывает, что почти для каждого вещественного числа отрезка $[0, 1]$ доля нулей и единиц в его двоичном разложении, определяемая, естественно, как предел функции $\sigma_n(x)$, равна $\frac{1}{2}$.

3. Далее мы будем изучать структуру измеримого множества положительной меры. Мы покажем, что *всякое измеримое множество A положительной меры, с точностью до множества произвольно малой меры, можно считать объединением конечного числа отрезков*. Точнее говоря, *для любого заданного $\varepsilon > 0$ мы беремся подобрать такую конечную систему отрезков B, что множество A можно будет получить из B удалением множества a меры $< \varepsilon$ и добавлением множества b также меры $< \varepsilon$.*

Для доказательства представим измеримую функцию $\chi_A(x)$ в виде предела почти всюду сходящейся последовательности ступенчатых функций $h_n(x)$. Если мы заменим каждую функцию h_n на функцию h'_n, равную 0 там, где h_n меньше $\frac{1}{2}$, и равную 1 там, где h_n больше или равна $\frac{1}{2}$, то получим новую, также почти всюду сходящуюся к χ_A последовательность ступенчатых функций, принимающих значения только 0 или 1. Каждая из функций h'_n есть характеристическая функция некоторого множества B_n, представляющего собой конечную систему отрезков. Мы утверждаем, что при достаточно большом n множество B_n удовлетворяет поставленному условию. Для этого рассмотрим функции $(h'_n - \chi_A)^+$ и $(h'_n - \chi_A)^-$. Функция $(h'_n - \chi_A)^+$ есть характеристическая функция множества b_n тех точек, которые принадлежат множеству B_n и не принадлежат множеству A; функция $(h'_n - \chi_A)^-$ есть характеристическая функция множества a_n тех точек, которые принадлежат A и не принадлежат B_n. Множество A получается из множества B_n прибавлением множества b_n и вычитанием множества a_n. С другой стороны,

$$\mu(a_n) + \mu(b_n) = I(h'_n - \chi_A)^- + I(h'_n - \chi_A)^+ = I(|h'_n - \chi_A|) \to 0,$$

что и завершает доказательство.

4. Мера измеримого множества как его верхняя мера. Доказанная теорема позволит нам получить второе, более конструктивное, определение измеримого множества. Покроем произвольное множество A на отрезке $[a, b]$ конечной или счетной системой интервалов и найдем сумму длин этих интервалов. Точная нижняя граница получающихся чисел при всевозможных покрытиях множества A системами интервалов обозначается μ^*A и называется

верхней или *внешней мерой множества* A. Так, множество меры нуль по самому определению имеет и внешнюю меру нуль. Покажем, что *для каждого измеримого множества A его внешняя мера совпадает с числом* μA.

Если B есть система неперекрывающихся интервалов, покрывающая множество A, то, по сказанному выше, B есть измеримое множество с мерой, равной сумме длин интервалов; так как $A \subset B$, то $\mu A \leqslant \mu B$ и, следовательно, внешняя мера множества A

$$\mu^* A = \inf_{B \supset A} \mu B \geqslant \mu A. \tag{5}$$

С другой стороны, используя доказанную выше теорему, мы можем для заданного $\varepsilon > 0$ и любого n построить такую конечную систему интервалов B_n, что

$$A + b_n = B_n + a_n, \tag{6}$$

где каждое из измеримых множеств a_n и b_n имеет меру $< \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Пусть $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $a = \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n$, $b = \bigcup_{n=1}^{\infty} b_n$; очевидно, $\mu a = \lim \mu a_n = 0$, $\mu b \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu b_n < \frac{\varepsilon}{2}$.

Имеют место включения

$$A \subset B + a, \tag{7}$$

$$B \subset A + b. \tag{8}$$

Действительно, если точка $x \in A$ не входит в B, то она не входит ни в одно B_n, а так как $A \subset B_n + a_n$, то x входит во все a_n и, следовательно, входит в a; этим доказано (7).

Далее, рассмотрим точку y, входящую в B и тем самым принадлежащую некоторому B_n. Если при этом $y \overline{\in} A$, то из соотношения (6) следует, что y входит в b_n и тем самым в b; этим доказано (8). Отметим, что из (8) следует $\mu B \leqslant \mu A + \mu b < \mu A + \frac{\varepsilon}{2}$.

Вернемся к включению (7). Множество B в конечном счете есть система интервалов, конечная или счетная. Множество a, как множество меры нуль, можно покрыть системой интервалов с общей длиной $< \frac{\varepsilon}{2}$. В итоге все множество A оказывается покрытым (конечной или) счетной системой интервалов с общей длиной, не большей $\mu B + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \mu A + \varepsilon$. Отсюда $\mu^* A \leqslant \mu A + \varepsilon$. Так как ε произвольно, то $\mu^* A \leqslant \mu A$ и в соединении с неравенством (5) мы получаем, что для всякого измеримого множества

$$\mu^* A = \mu A.$$

Иными словами, *мера всякого измеримого множества может быть определена конструктивно как его внешняя мера.*

5. Естественно возникает вопрос, можно ли определить сами измеримые множества, не привлекая понятия интеграла, в терминах внешней меры. Ответ на этот вопрос следующий: *множество A на отрезке $[a, b]$ измеримо тогда и только тогда, когда сумма внешних мер множества A и его дополнения CA* (до всего отрезка $[a, b]$) *равна длине отрезка* $[a, b]$:

$$\mu^*A + \mu^*CA = b - a. \tag{9}$$

Необходимость этого условия очевидна: если A измеримо, то и его дополнение измеримо и из равенства $\mu A + \mu CA = b - a$ следует равенство (9). Докажем достаточность этого условия. Пусть для множества A выполнено равенство (9). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти покрытие множества A и CA такими системами неперекрывающихся промежутков U и V, общая сумма длин которых

$$\mu U + \mu V < b - a + \varepsilon.$$

Обозначим через h_U и h_V характеристические функции множеств U и V. Функция $1 - h_V$ отлична от нуля только в пределах множества A, и поэтому

$$0 \leqslant 1 - h_V \leqslant \chi_A \leqslant h_U,$$

где χ_A — характеристическая функция множества A.

Отсюда

$$0 \leqslant I(1 - h_V) \leqslant Ih_U.$$

С другой стороны, по условию

$$Ih_U - I(1 - h_V) = Ih_U + Ih_V - (b - a) = \mu U + \mu V - (b - a) < \varepsilon.$$

При $\varepsilon \to 0$ последовательность $h_U (= h_{U(\varepsilon)})$ можно считать монотонно убывающей, а последовательность $1 - h_V$ — монотонно возрастающей. Поэтому последовательность $h_U - (1 - h_V)$ также монотонно убывает. Ее предел f есть неотрицательная измеримая ограниченная функция, интеграл от которой, согласно теореме Беппо Леви, равен нулю; поэтому f почти всюду равна нулю. Но так как

$$h_U - (1 - h_V) \geqslant h_U - \chi_A \geqslant 0,$$

то $\chi_A = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} h_U$ и тем самым есть измеримая и суммируемая функция. Это доказывает и достаточность сформулированного условия.

Замечание. Доказанную теорему можно сформулировать и следующим, по форме несколько более общим образом: *множество A, расположенное на отрезке $[a, b]$, измеримо тогда и только тогда, когда существуют последовательности измеримых множеств U_n и V_n такие, что $U_n \supset A$, $V_n \supset CA$,*

$$b - a \leqslant \mu U_n + \mu V_n \leqslant b - a + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

6. В своем построении теории меры и интеграла творец этой теории А. Лебег отправлялся от определения измеримого множества как раз в форме, установленной в последней теореме. Именно множество A он называл измеримым, если выполнялось соотношение

$$\mu^*A+\mu^*CA=b-a. \tag{10}$$

Иногда это определение высказывается в несколько иной форме, а именно: определяется внутренняя (нижняя) мера множества A по формуле

$$\mu_*A=\sup_{F\subset A}\mu F,$$

где верхняя грань берется по всем замкнутым множествам F, содержащимся в данном множестве A; при этом мерой замкнутого множества F называется число $b-a-\mu CF$, где CF — дополнительное к F открытое множество. Далее, A называется измеримым множеством, если

$$\mu_*A=\mu^*A. \tag{11}$$

Легко проверить, что определения (6) и (7) равносильны. Действительно,

$$\mu_*A=\sup_{F\subset A}\mu F=\sup_{F\subset A}\{b-a-\mu CF\}=b-a-\inf_{F\subset A}\mu CF.$$

Но если множество F заключено в множестве A, то его дополнение CF покрывает множество CA; отсюда непосредственно следует, что

$$\mu_*A=b-a-\mu^*CA,$$

откуда вытекает, что равенства

$$\mu_*A=\mu^*A \text{ и } \mu^*A+\mu^*CA=b-a$$

эквивалентны.

Установив затем на основании определения (10) [или (11)] основные свойства меры, о которых мы говорили в начале параграфа, Лебег переходит к определению измеримых функций. Функцию $\varphi(x)$ он называет *измеримой* (а мы назовем *измеримой по Лебегу*), если всякое множество вида

$$\{x:\varphi(x)\leqslant c\}$$

измеримо, каково бы ни было вещественное число c.

Будем временно называть измеримые функции в том смысле, о котором говорилось в § 1, *измеримыми по Риссу*. Покажем, что определения измеримых функций по Лебегу и по Риссу совпадают.

Пусть $\varphi(x)$ измерима по Риссу; введем функцию

$$\varphi_c(x)=\max\{\varphi(x),\ c\}.$$

Отношение

$$\frac{\varphi_{c+\varepsilon}-\varphi_c}{\varepsilon}$$

есть также измеримая функция по Риссу, равная 0 там, где $\varphi(x) \geqslant c+\varepsilon$, и 1 там, где $\varphi \leqslant c$. При $\varepsilon \to 0$ указанное отношение имеет пределом характеристическую функцию множества $\{x : \varphi(x) \leqslant c\}$, которая, таким образом, также измерима по Риссу. Значит само это множество измеримо по Риссу, а следовательно, и по Лебегу.

Обратно, если функция $\varphi(x)$ измерима по Лебегу, т. е. все множества вида $\{x : \varphi(x) \leqslant c\}$ измеримы, то измеримы при любых c_1 и c_2 и множества вида

$$\{x : c_1 < \varphi(x) \leqslant c_2\} = \{x : \varphi(x) \leqslant c_2\} - \{x : \varphi(x) \leqslant c_1\}.$$

Пусть $\chi_{c_1 c_2}$ — характеристическая функция этого множества. Положим для заданного n функцию φ_n равной $\frac{m}{n}$ в тех точках, где выполняется неравенство

$$\left\{x : \frac{m}{n} < \varphi \leqslant \frac{m+1}{n}\right\} \quad (m = 1,\ 2, \ldots).$$

Функция φ_n есть сумма всюду сходящегося ряда измеримых по Риссу функций

$$\varphi_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{n} \chi_{\frac{m}{n},\ \frac{m+1}{n}}(x)$$

и поэтому сама измерима по Риссу. Очевидно, что выполнено неравенство

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Таким образом, $\varphi(x)$ есть предел при $n \to \infty$ последовательности измеримых по Риссу функций $\varphi_n(x)$ и, следовательно, измерима по Риссу, что и требовалось.

Далее Лебег строит определение интеграла для ограниченной измеримой функции $\varphi(x)$. Для этого он делит область изменения $[m, M]$ функции $\varphi(x)$ на n частей точками деления $m = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = M$ и строит «интегральную сумму»

$$s_{\Pi}(\varphi) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \mu\{x : y_j < \varphi(x) \leqslant y_{j+1}\}, \tag{8}$$

причем, поскольку функция $\varphi(x)$ измерима, числа $\mu\{x : y_j < \varphi(x) \leqslant y_{j+1}\}$ имеют смысл. Когда разбиение Π отрезка $[m, M]$ неограниченно измельчается, суммы $s_{\Pi}(\varphi)$, как доказывает Лебег, стремятся к (единственным образом определяемому) пределу, который и называется интегралом Лебега от функции $\varphi(x)$.

Проверим, что определение Лебега совпадает с определением Рисса, принятым в нашем изложении. Функция $\varphi_{\Pi}(x)$, равная y_j на множестве

$\{x : y_j < \varphi \leqslant y_{j+1}\}$, измерима, и ее интеграл по Риссу как раз равен величине $s_п(\varphi)$ (8). Так как она отличается от функции $\varphi(x)$ не более чем на $\max(y_{j+1} - y_j)$, то при неограниченном измельчении разбиения интервала $[m, M]$ функция $\varphi_п(x)$ равномерно стремится к функции $\varphi(x)$. Отсюда $I\varphi = \lim I\varphi_п$, чем и доказано существование интеграла Лебега и совпадение его с интегралом Рисса. Если $\varphi(x)$ — неограниченная, но неотрицательная функция, то Лебег далее поступает следующим образом. Обрезая функцию φ на высоте N, т. е. рассматривая функцию

$$\varphi_N(x) = \min(\varphi(x),\ N),$$

он получает измеримую неотрицательную ограниченную функцию. Ее интеграл $I\varphi_N$, существующий по предыдущему, неотрицателен и возрастает (точнее, не убывает) с возрастанием N. Если при $N \to \infty$ числа $I\varphi_N$ имеют конечный предел, то функция φ называется *суммируемой по Лебегу* и ее интеграл Лебега полагается равным $\lim I\varphi_N$. В общем случае, когда φ любого знака, она называется суммируемой по Лебегу, если суммируемы по Лебегу ее положительная часть φ^+ и отрицательная часть φ^-; тогда интеграл от φ строится по формуле

$$I\varphi = I\varphi^+ - I\varphi^-.$$

Проверим сейчас, что класс суммируемых функций в принятом у нас определении (суммируемых по Риссу) совпадает с классом функций, суммируемых по Лебегу, и значения соответствующих интегралов совпадают. Достаточно установить это для неотрицательных функций. Если неотрицательная функция $\varphi(x)$ суммируема по Лебегу, то она является пределом возрастающей последовательности ограниченных суммируемых функций φ_N; отсюда, по теореме Беппо Леви, φ суммируема по Риссу и мы имеем $I\varphi = \lim I\varphi_N$, т. е. ее интеграл по Риссу совпадает с интегралом по Лебегу. Обратно, если $\varphi(x) \geqslant 0$ суммируема по Риссу, то все функции φ_N ограничены и измеримы и их интегралы $I\varphi_N$ не превосходят числа $I\varphi$. Так как $I\varphi_N$ ограничены, то они имеют конечный предел, и, следовательно, $\varphi(x)$ суммируема по Лебегу; по предыдущему, ее интеграл Лебега совпадает с числом $I\varphi$. Таким образом, результат построения Лебега полностью совпадает с результатом построения Рисса. Мы предпочли изложить исходное построение по методу Рисса, так как в целом, по технике доказательств, оно несколько проще построения по методу Лебега и позволяет непосредственно строить теорию интеграла, минуя достаточно громоздкую теорию меры Лебега.

7. Интегрирование по измеримому множеству. До сих пор у нас областью интегрирования был отрезок $[a, b]$. Но легко можно определить интеграл и по любому измеримому множеству $E \subset [a, b]$. Пусть $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E; функцию φ

мы назовем суммируемой на множестве E, если произведение $\chi_E \varphi$ суммируемо на $[a, b]$, и полагаем, по определению,

$$\int_E \varphi\, dx = \int_a^b \chi_E \varphi\, dx = I(\chi_E \varphi).$$

Интеграл по множеству E обладает, очевидно, всеми обычными свойствами интеграла. Отметим некоторые специфические свойства.

а) *Если φ суммируема на $E = E_1 + E_2 + \ldots$ и (измеримые) множества $E_1, E_2, \ldots$ взаимно не пересекаются, то φ суммируема на каждом E_n и*

$$\int_E \varphi\, dx = \int_{E_1} \varphi\, dx + \int_{E_2} \varphi\, dx + \ldots \tag{12}$$

Действительно, так как $\chi_{E_n}\chi_E = \chi_{E_n}$, то $\chi_{E_n}\varphi = \chi_{E_n}(\chi_E\varphi)$ есть суммируемая функция на E_n. Далее, $\chi_{E_1} + \chi_{E_2} + \ldots = \chi_E$, откуда

$$\chi_{E_1}\varphi = \chi_{E_2}\varphi + \ldots = \chi_E\varphi,$$

причем частные суммы этого ряда ограничены суммируемой функцией $\chi_E|\varphi|$. Интегрируя ряд почленно, получаем формулу (12).

б) Обратный вывод — о суммируемости функции φ на E при условии суммируемости φ на каждом E_n и сходимости ряда (12) — мы можем сделать лишь при дополнительном условии $\varphi \geqslant 0$ на каждом E_n. В этом случае $\chi_E \varphi$ есть предел неубывающей последовательности частных сумм ряда $\chi_{E_1}\varphi + \chi_{E_2}\varphi + \ldots$, интегралы которых ограничены общей постоянной; применяя теорему Беппо Леви, мы получаем, что $\chi_E\varphi$ суммируема и равенство (12) имеет место.

Свойство б) применяется иногда в следующей эквивалентной форме: *если функция φ неотрицательна, суммируема на каждом из множеств $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ и интегралы $\int_{E_n} \varphi\, dx$ ограничены фиксированной постоянной, то φ суммируема на $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ и*

$$\int_E \varphi\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi\, dx.$$

в) *Абсолютная непрерывность интеграла по множеству.* Оказывается, что *интеграл от суммируемой* (на $[a, b]$) *функции φ, взятый по измеримому множеству E, стремится к нулю вместе с мерой этого множества, независимо от его расположения на* $[a, b]$. Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\mu E < \delta$ следует $\int_E |\varphi|\, dx < \varepsilon$. Для доказательства мы найдем по заданному

$\varepsilon > 0$ ограниченную измеримую функцию $h(x) \geqslant 0$, для которой

$$\int_a^b ||\varphi(x)| - h(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть, например, $h(x)$ ограничена числом M, $0 \leqslant h(x) \leqslant M$. Тогда на любом измеримом множестве E меры меньше $\delta = \frac{1}{2M}$

$$\int_E |\varphi| \, dx \leqslant \int_E ||\varphi(x)| - h(x)| \, dx + \int_E h(x) \, dx < \frac{\varepsilon}{2} + \delta M < \varepsilon,$$

что и требовалось.

8. В заключение остановимся еще на одной важной теореме из теории меры Лебега:

Теорема (Д. Ф. Егоров, 1911). *Пусть дана последовательность* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ *измеримых функций, сходящаяся почти всюду на* $[a, b]$ *к некоторому пределу* $\varphi(x)$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать измеримое (даже замкнутое) множество* A *меры* $> b - a - \varepsilon$, *на котором эта последовательность сходится к своему пределу равномерно.*

Доказательство. Предельная функция $\varphi(x)$ измерима. Рассматривая функции $\varphi - \varphi_n$ вместо φ_n, можно свести задачу к случаю последовательности, сходящейся к нулю; поэтому будем считать с самого начала, что $\varphi(x) \equiv 0$. Далее, можно считать функции φ_n неотрицательными и монотонно стремящимися к нулю; если бы это было не так, то мы заменили бы φ_n на $\sup\{|\varphi_n|, |\varphi_{n+1}|, \ldots\}$.

Обозначим через A_n^m множество точек, где выполняется неравенство $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{m}$. При фиксированном m множество A_n^m расширяется с увеличением индекса n и система всех этих множеств покрывает весь отрезок $[a, b]$. Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n^m = b - a$ и можно найти такой номер $n = n(m)$, что

$$\mu A_{n(m)}^m > b - a - \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Рассмотрим теперь пересечение A всех множеств $A_{n(m)}^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Так как дополнение к A имеет меру

$$\mu CA = \mu C\left\{\prod A_{n(m)}^m\right\} = \mu \cup CA_{n(m)}^m \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon,$$

то мера самого A не меньше $b - a - \varepsilon$. Мы утверждаем, что на множестве A сходимость $\varphi_n \to 0$ равномерна, т. е. для заданного числа $\frac{1}{m}$

существует номер N, начиная с которого всюду на A выполняется неравенство $\varphi_n(x)<\frac{1}{m}$. Действительно, в качестве N можно взять $n(m)$, так как $A\subset A^m_{n(m)}$, и поэтому, если $n>n(m)$, то $\varphi_n(x)\leqslant \leqslant\varphi_{n(m)}x\leqslant\frac{1}{m}$ во всех точках A. Вспоминая, что $\mu A=\sup\mu F$, $F\subset A$, мы можем заменить измеримое множество A на замкнутое сколь угодно близкой меры. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что в формулировке этой теоремы отрезок $[a, b]$ может быть заменен любым измеримым множеством.

Следствием теоремы Егорова является теорема Лузина, устанавливающая новую характеристику измеримых функций:

Теорема (Н. Н. Лузин, 1915[1]). *Функция $\varphi(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, тогда и только тогда измерима, когда при любом $\varepsilon>0$ имеется замкнутое подмножество $A\subset[a, b]$ меры $>b-a-\varepsilon$, на котором $\varphi(x)$ непрерывна.*

Действительно, если $h_n(x)\longrightarrow\varphi(x)$ — последовательность ступенчатых функций, определяющая измеримую функцию $\varphi(x)$, то множество меры нуль, состоящее из точек расходимости последовательности и точек разрыва функций $h_n(x)$, мы можем покрыть системой интервалов с общей длиной $<\frac{\varepsilon}{2}$. Далее, в силу теоремы Егорова из остающегося множества можно удалить еще часть, также меры $<\frac{\varepsilon}{2}$, так что на остатке последовательность $\varphi_n(x)$ будет сходиться равномерно; при этом можно считать, что удаляемая часть представляет собой систему интервалов. На остающемся замкнутом подмножестве F отрезка $[a, b]$, по мере большем, чем $b-a-\varepsilon$, функции $h_n(x)$ непрерывны и сходятся к своему пределу $\varphi(x)$ равномерно; отсюда следует, что на F функция $\varphi(x)$ непрерывна.

Доказательство обратного утверждения мы можем предоставить читателю.

Задачи. 1. Показать, что каждое измеримое множество с точностью до множества меры нуль есть пересечение последовательности открытых множеств и объединение последовательности замкнутых множеств.

2. Доказать, что совокупность измеримых множеств, каждые два из которых различаются более чем на множество меры нуль, имеет мощность не выше континуума.

Указание. Использовать задачу 1 и задачу 5 к § 2 гл. II.

3. Построить измеримое множество, которое на каждом интервале имеет положительную меру, так же как и его дополнение.

---

[1]) Д. Ф. Егоров (1869—1931), Н. Н. Лузин (1883—1950) — московские математики, основатели московской школы теории функций действительного переменного.

4. Пусть A — множество меры $\geqslant \varepsilon$ на отрезке $[0, 1]$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — произвольные числа на этом отрезке, причем $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Показать, что в A имеется пара точек, расстояние между которыми совпадает с расстоянием между некоторой парой точек $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Указание. Показать, что множества $\xi_1 + A, \ldots, \xi_n + A$ (располагающиеся на отрезке $[0, 2]$) не могут не иметь общих точек.

5. Показать, что в каждом множестве положительной меры имеется пара точек с рациональным расстоянием.

Указание. Использовать предыдущую задачу.

6. Множество A точек на отрезке $[a, b]$ имеет меру $> \frac{1}{2}(b-a)$. Доказать, что в A имеется подмножество положительной меры, симметричное относительно середины отрезка.

Указание. Рассмотреть пересечение множества A с его отражением относительно середины отрезка.

7. Измеримые функции f и g называются равноизмеримыми, если для любого c имеем $\mu\{x : f > c\} = \mu\{x : g > c\}$. Показать, что: а) всякая измеримая функция равноизмерима с некоторой неубывающей функцией; б) равноизмеримые неубывающие функции совпадают почти всюду.

8. На отрезке $[a, b]$ дана произвольная последовательность $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ измеримых функций. Показать, что множество E точек, где существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, измеримо.

Указание. $E = \prod\limits_{k} \bigcup\limits_{n} \prod\limits_{m} \left\{x : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}\right\}$.

§ 5. Обобщения

1. Случай бесконечного промежутка. Все предыдущие рассмотрения относились к функциям, определенным на отрезке $[a, b]$ оси x. Но нетрудно рассмотреть и случай бесконечных промежутков $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ или $(-\infty, \infty)$. Во всех этих случаях *ступенчатой функцией* $h(x)$ мы будем называть функцию, принимающую постоянные значения в конечном числе конечных интервалов $\Delta_j = (x_j, x_{j+1})$; в остальной же части бесконечного промежутка функция $h(x)$ предполагается равной нулю. *Измеримой функцией* называется функция $\varphi(x)$, которая является пределом сходящейся почти всюду на всем бесконечном промежутке последовательности ступенчатых функций. Интеграл от ступенчатой функции $h(x)$, принимающей значение b_j на интервале Δ_j длины $|\Delta_j|$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, определяется, естественно, формулой

$$Ih = \sum_{j=1}^{k} b_j |\Delta_j|.$$

Класс C^+ определяется по-прежнему как совокупность функций $f(x)$, каждая из которых является пределом возрастающей последовательности ступенчатых функций $h_n(x)$ с ограниченными интегралами. Класс L суммируемых функций определяется как класс разностей