4. Пусть A — множество меры $\geqslant \varepsilon$ на отрезке $[0, 1]$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — произвольные числа на этом отрезке, причем $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Показать, что в A имеется пара точек, расстояние между которыми совпадает с расстоянием между некоторой парой точек $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Указание. Показать, что множества $\xi_1 + A, \ldots, \xi_n + A$ (располагающиеся на отрезке $[0, 2]$) не могут не иметь общих точек.

5. Показать, что в каждом множестве положительной меры имеется пара точек с рациональным расстоянием.

Указание. Использовать предыдущую задачу.

6. Множество A точек на отрезке $[a, b]$ имеет меру $> \frac{1}{2}(b-a)$. Доказать, что в A имеется подмножество положительной меры, симметричное относительно середины отрезка.

Указание. Рассмотреть пересечение множества A с его отражением относительно середины отрезка.

7. Измеримые функции f и g называются равноизмеримыми, если для любого c имеем $\mu\{x: f > c\} = \mu\{x: g > c\}$. Показать, что: а) всякая измеримая функция равноизмерима с некоторой неубывающей функцией; б) равноизмеримые неубывающие функции совпадают почти всюду.

8. На отрезке $[a, b]$ дана произвольная последовательность $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ измеримых функций. Показать, что множество E точек, где существует $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, измеримо.

Указание. $E = \prod\limits_{k} \bigcup\limits_{n} \prod\limits_{m} \left\{x : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}\right\}$.

§ 5. Обобщения

1. Случай бесконечного промежутка. Все предыдущие рассмотрения относились к функциям, определенным на отрезке $[a, b]$ оси x. Но нетрудно рассмотреть и случай бесконечных промежутков $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ или $(-\infty, \infty)$. Во всех этих случаях *ступенчатой функцией* $h(x)$ мы будем называть функцию, принимающую постоянные значения в конечном числе конечных интервалов $\Delta_j = (x_j, x_{j+1})$; в остальной же части бесконечного промежутка функция $h(x)$ предполагается равной нулю. *Измеримой функцией* называется функция $\varphi(x)$, которая является пределом сходящейся почти всюду на всем бесконечном промежутке последовательности ступенчатых функций. Интеграл от ступенчатой функции $h(x)$, принимающей значение b_j на интервале Δ_j длины $|\Delta_j|$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, определяется, естественно, формулой

$$Ih = \sum_{j=1}^{k} b_j |\Delta_j|.$$

Класс C^+ определяется по-прежнему как совокупность функций $f(x)$, каждая из которых является пределом возрастающей последовательности ступенчатых функций $h_n(x)$ с ограниченными интегралами. Класс L суммируемых функций определяется как класс разностей

$\varphi = f - g$, $f \in C^+$, $g \in C^+$. Все теоремы § 2—4 сохраняются без всяких изменений, за единственным исключением: в рассматриваемом случае ограниченные измеримые функции, вообще говоря, уже не являются суммируемыми. Поэтому, в частности, равенство $I\varphi = \lim I\varphi_n$ перестает быть справедливым, если суммируемые функции φ_n сходятся почти всюду к функции φ_0, оставаясь ограниченными в совокупности; для справедливости этого равенства остается достаточным первоначальное условие $|\varphi_n| \leqslant \varphi_0$, где φ_0 — суммируемая функция. В доказательстве теоремы о том, что предел последовательности измеримых функций есть измеримая функция (§ 3, п. 4), нужно будет в связи с этим заменить функцию $\psi_n = \frac{1}{1+\varphi_n}$ на $\hat{\psi}_n = \frac{h}{h+\varphi_n}$, где h — строго положительная суммируемая функция. Остальные результаты переносятся на случай бесконечного промежутка без изменений. В частности, на бесконечном промежутке Δ можно определить линейное нормированное пространство $L_1(\Delta)$ (пространство Лебега), состоящее из всех суммируемых функций и снабженное нормой

$$\|\varphi\| = \int_{\Delta} |\varphi(x)|\, dx.$$

Так же как и для конечного промежутка, доказывается, что и в общем случае пространство L полно и что ступенчатые функции составляют в нем всюду плотное множество.

2. Случай нескольких независимых переменных. Ограничимся рассмотрением случая двух переменных x и y и функций $\varphi(x, y)$, определенных в прямоугольнике $D = \{a_1 \leqslant x \leqslant b_1, a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$.

Множеством меры нуль в прямоугольнике D будем называть такое множество, которое при любом $\varepsilon > 0$ может быть покрыто конечной или счетной системой прямоугольников $D_j = \{a_1^{(j)} \leqslant x \leqslant b_1^{(j)}, a_2^{(j)} \leqslant y \leqslant b_2^{(j)}\}$, сумма площадей которых не превосходит ε. Так, любой отрезок или ломаная являются множествами меры нуль.

Если прямоугольник D разбит на конечное число прямоугольников $D_1, \ldots, D_m$, то функция, постоянная на каждом из D_j, называется *ступенчатой функцией*. Интеграл от ступенчатой функции $h(x, y)$, принимающей в прямоугольнике D_j значение b_{j_m}, определяется формулой

$$Ih = \sum_{j=1}^{m} b_j |D_j|,$$

где $|D_j|$ есть площадь прямоугольника D_j.

Класс C^+, как и раньше, есть совокупность функций f, каждая из которых есть предел возрастающей последовательности ступенчатых функций h_n с ограниченными интегралами Ih_n. Класс L — пространство Лебега — есть класс разностей $\varphi = f - g$, $f \in C^+$, $g \in C^+$. Теоремы §§ 2—4 переносятся на случай двух переменных без всяких изменений, исключая форму записи [вместо $f(x)$ пишем $f(x, y)$, вместо слова «интервал» пишем «прямоугольник» и т. д.].

Но здесь появляется новая важная задача — именно задача о повторном интегрировании.

В классическом анализе двойной интеграл (определенный первоначально как предел римановых интегральных сумм), например от непрерывной функции $f(x, y)$, сводится к двум обычным интегралам по одному переменному по формуле

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1}\left\{\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dy\right\}dx.$$

В теории интеграла Лебега также имеет место аналогичная формула. Соответствующая теорема формулируется следующим образом:

Теорема (Дж. Фубини, 1907). *Пусть $\varphi(x, y)$ — суммируемая функция в прямоугольнике $D\{a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$. Тогда: 1) рассматриваемая как функция аргумента x при фиксированном y, эта функция является суммируемой функцией от x почти при всех значениях y; 2) ее интеграл по отрезку $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, который мы обозначим через $I_x\varphi(x, y)$,*

как функция от y, является суммируемой функцией на отрезке $a_2 \leqslant y \leqslant b_2$; 3) имеет место равенство

$$I_y\{I_x\varphi(x, y)\} = I\varphi.$$

Меняя x и y ролями, получим аналогичную формулу:

$$I_x\{I_y\varphi(x, y)\} = I\varphi.$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для функции $\varphi \in C^+$. Пусть $h_n(x, y)$ — монотонно возрастающая последовательность ступенчатых функций, сходящаяся к функции $\varphi(x, y)$ на множестве E полной плоской меры. Образуем функции

$$g_n(y) = I_x h_n(x, y).$$

Функции $g_n(y)$ определены, во всяком случае, при всех y, которые не соответствуют линиям разрыва $h_n(x, y)$. Последовательность $g_n(y)$ монотонно возрастает при $n \to \infty$, и интегралы от $g_n(y)$ ограничены в совокупности:

$$I_y g_n(y) = I_y[I_x h_n(x, y)] = Ih_n(x, y) \nearrow I\varphi\ ^{1)}.$$

---

[1]) Для ступенчатых функций формула повторного интегрирования, конечно допустима.

В силу теоремы Беппо Леви функции $g_n(y)$ сходятся почти при всех y к некоторой суммируемой функции $g(y)$, и при этом

$$I_y g(y) = \lim_{n\to\infty} I_y g_n(y) = I\varphi.$$

Пусть y — одна из точек того множества E_y полной меры, на котором функция $g(y)$ определена и конечна. При этом значении y функции $h_n(x, y)$ как функции от x образуют монотонно возрастающую последовательность и интегралы от них ограничены:

$$I_x h_n(x, y) = g_n(y) \nearrow g(y).$$

Поэтому в силу той же теоремы Беппо Леви функции $h_n(x, y)$ почти при всех x, т. е. на некотором множестве E_{yx} полной меры по x, стремятся к некоторой функции $\varphi_0(x, y)$, причем

$$\lim_{n\to\infty} I_x h_n(x, y) = g(y) = I_x\varphi_0(x, y).$$

В результате получаем формулу

$$I\varphi = I_y g(y) = I_y\{I_x\varphi_0(x, y)\}. \qquad (1)$$

Функция $\varphi_0(x, y)$ совпадает с функцией $\varphi(x, y)$ во всякой точке (x, y), которая принадлежит одновременно множеству E и множеству E_{yx}, поскольку на первом из них предел последовательности $h_n(x, y)$ есть $\varphi(x, y)$, а на втором $\varphi_0(x, y)$.

В частности, если $h_n(x, y)$ *всюду* сходится к функции $\varphi(x, y)$, то на множестве E_{yx} имеет место равенство $\varphi_0(x, y) = \varphi(x, y)$ и в этом случае утверждение нашей теоремы оказывается справедливым.

Последнее условие реализуется, например, в случае, когда функции $h_{n+1} - h_n = e_n$ являются характеристическими функциями непересекающихся прямоугольников D_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Интеграл $I\varphi$ представляет собой в этом случае (счетную) сумму площадей этих прямоугольников. Функция $g_n(y) = I_x h_n(x, y)$ есть сумма длин интервалов, полученных в пересечении соответствующей горизонтальной прямой с первыми n прямоугольниками; функция $g(y) = \lim g_n(y)$ есть (счетная) сумма длин всех аналогичных интервалов.

Формула (1) позволит нам сейчас установить одно важное свойство любого плоского множества Z полной меры. Именно мы утверждаем, что *почти всеми горизонтальными прямыми* (*т. е. всеми, кроме множества y-в линейной меры нуль*) *множество Z пересекается по множеству x-в полной линейной меры.*

Действительно, образуем для заданного $\varepsilon > 0$ покрытие дополнения CZ множества Z системой непересекающихся прямоугольников

$D_1, \ldots, D_n, \ldots$ с общей площадью $< \varepsilon$, и пусть $\varphi_\varepsilon(x, y)$ — характеристическая функция этой системы прямоугольников. По доказанному

$$I\varphi_\varepsilon(x, y) = I_y\{I_x\varphi_\varepsilon(x, y)\} = I_y g_\varepsilon(y).$$

Устремим ε к нулю; тогда можно считать, что функции $\varphi_\varepsilon(x, y)$ образуют убывающую последовательность; поэтому и функции $g_\varepsilon(y) = I_x\varphi_\varepsilon(x, y)$ также образуют убывающую последовательность. Так как $I\varphi_\varepsilon \to 0$, то $I_y g_\varepsilon(y) \to 0$, откуда следует, что почти при всех y также $g_\varepsilon(y) \to 0$.

Множество всех y, для которых $g_\varepsilon(y) \to 0$, обозначим через E_0; это множество имеет полную меру. Но каждое значение функции $g_\varepsilon(y)$, как мы уже указали, есть сумма длин интервалов, получающихся в пересечении соответствующей горизонтальной прямой $y = y_0$ с прямоугольниками $D_1, \ldots, D_n, \ldots$, покрывающими множество CZ. Мы видим, что пересечение множества CZ с прямой $y = y_0 \in E_0$ может быть покрыто (счетной) системой интервалов с общей длиной произвольно малой. Таким образом, это пересечение имеет меру нуль, а пересечение множества Z с этой же прямой имеет полную меру, что и требовалось.

Вернемся теперь к общему случаю.

Последовательность h_n сходится к φ на множестве E полной (плоской) меры; на оси y можно указать множество E'_y полной (линейной) меры так, что для $y_0 \in E'_y$ функции $h_n(x, y_0)$ сходятся к $\varphi(x, y_0)$ на множестве E'_{yx} полной меры по x. При построении множества E_y, где сходится последовательность $g_n(y)$, можно заранее исключить точки, не входящие в E'_y (они образуют множество меры нуль), и поэтому можно считать, что $E_y \subset E'_y$. Далее, при фиксированном $y_0 \in E_y$ для построения множества E_{y_0x}, где сходится последовательность $h(x, y_0)$ к функции $\varphi_0(x, y_0)$, мы можем исключить точки, не входящие в E'_{y_0x}, так что можно считать, что $E_{y_0x} \subset E'_{y_0x}$. Но на множестве E'_{y_0x} мы имеем $h_n(x, y_0) \nearrow \varphi(x, y)$. Поэтому всюду на E_{y_0x} имеем $\varphi(x, y_0) = \varphi_0(x, y_0)$. Мы находим, таким образом, что функция $\varphi(x, y)$ при $y \in E_y$ суммируема по x, ее интеграл $I_x\varphi(x, y) = g(y)$ — суммируемая функция от y и имеет место равенство

$$I_y\{I_x\varphi(x, y)\} = I\varphi.$$

Тем самым теорема Фубини полностью доказана.

Замечание. Из существования интегралов

$$I_y\{I_x\varphi(x, y)\} \quad \text{и} \quad I_x\{I_y\varphi(x, y)\} \tag{2}$$

не следует, вообще говоря, их равенства и суммируемости функции $\varphi(x, y)$ на множестве E. Но *если функция $\varphi(x, y)$ измерима и неотрицательна, то существование одного из интегралов* (2) *уже влечет суммируемость функции $\varphi(x, y)$ на множестве E и равенство*

$$I\varphi = I_y\{I_x\varphi\} = I_x\{I_y\varphi\}. \tag{3}$$

Действительно, пусть существует, например, $I_y\{I_x\varphi(x, y)\} = A$ и $\varphi_n(x, y) = \min\{\varphi(x, y), n\}$. Функция $\varphi_n(x, y)$ измерима, ограничена и поэтому суммируема на E; по теореме Фубини

$$I\varphi_n = I_y\{I_x\varphi_n\} \leqslant A.$$

С возрастанием n функции φ_n, монотонно возрастая, стремятся к функции φ; так как $I\varphi_n \leqslant A$, то по теореме Беппо Леви функция φ суммируема. Но тогда можно применить теорему Фубини, и мы получим соотношение (3), что и требуется.

Пример. Если $\varphi(x)$ суммируема при $a \leqslant x \leqslant b$, $\psi(y)$ суммируема при $a \leqslant y \leqslant b$, то $\varphi(x)\psi(y)$ суммируема на множестве $E = (a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b)$ и

$$I(\varphi\psi) = I\varphi I\psi. \tag{4}$$

Действительно, функция $|\varphi||\psi|$, очевидно, измерима, и существует интеграл $I_y\{I_x(|\varphi||\psi|)\} = I_y(|\psi|)I_x(|\varphi|) = I_y(|\psi|)I_x(|\varphi|)$; поэтому функция $|\varphi\psi|$ суммируема на E, а вместе с ней суммируема и $\varphi\psi$. Применяя (3), приходим к (4), что и требуется.

3. Пространство L_p. Пусть p — положительное число. Класс L_p образуется, по определению, из всех функций $f(x)$, определенных в области G, для которых

$$I(|f|^p) = \int_G |f|^p\,dx < \infty.$$

Этот класс функций при любом $p > 0$ есть линейное пространство. Действительно, очевидно, что вместе с f принадлежит L_p и αf при любом α. Далее, если $f \in L_p$, $g \in L_p$, то и $f + g \in L_p$, так как

$$|f+g|^p \leqslant (|f| + |g|)^p \leqslant$$
$$\leqslant [2\sup(|f|, |g|)]^p = 2^p[\sup(|f|, |g|)]^p.$$

Мы покажем далее, что при $p \geqslant 1$ это линейное пространство может быть превращено в полное линейное нормированное пространство с введением нормы

$$\|f\|_p = [I(|f|^p)]^{\frac{1}{p}}. \tag{1'}$$

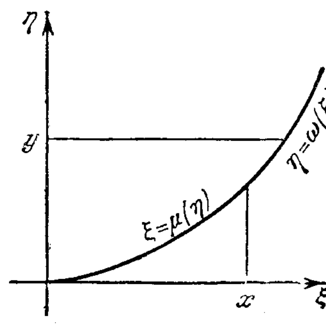

Рис. 10.

Это утверждение для $p = 1$ уже было установлено ранее (§ 3). Поэтому ограничимся теперь случаем $p > 1$. Очевидно, что норма (1') удовлетворяет условию $\|f\|_p \geqslant 0$, и $\|f\|_p = 0$ влечет $f(x) = 0$ почти всюду; далее, очевидно, $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$ при любом вещественном p.

Неравенство треугольника устанавливается сложнее. Рассмотрим сначала следующую лемму:

Лемма. *Если* $\eta = \omega(\xi)$ — *возрастающая непрерывная функция*, $\omega(0) = 0$, и $\xi = \mu(\eta)$ — *обратная функция (также, очевидно, непрерывная и возрастающая), то при любых* $x > 0$, $y > 0$

$$xy \leqslant \int_0^x \omega(\xi)\,d\xi + \int_0^y \mu(\eta)\,d\eta.$$

Доказательство немедленно получается, если рассмотреть рис. 10.

Положим в частности, $\omega(\xi) = \xi^{p-1}$ $(p > 1)$, $\mu(\eta) = \eta^{\frac{1}{p-1}}$; мы получим тогда, что

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{1}$$

Здесь число q определено равенством

$$q = \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}, \tag{2}$$

так что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Применяя неравенство (1) к функциям $f(x)$ и $g(x)$, получим

$$|f(x)||g(x)| \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}. \tag{3}$$

Допустим на момент, что $\|f\|_p = I^{\frac{1}{p}}(|f|^p) = 1$, $\|g\|_q = I^{\frac{1}{q}}(|g|^q) = 1$; тогда, интегрируя неравенство (3), мы получим, что

$$I(|fg|) \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если же $f \in L_p$ и $g \in L_q$ — любые функции, то для функций $f_0 = \frac{f}{\|f\|_p}$ и $g_0 = \frac{g}{\|g\|_q}$ выполняются условия $\|f_0\|_p = \|g_0\|_q = 1$; отсюда

$$I(|f_0 g_0|) = \frac{I(|fg|)}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant 1,$$

и, следовательно, для любых $f \in L_p$, $g \in L_q$ справедливо неравенство

$$I(|fg|) \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

(неравенство Гёльдера).

Предположим теперь, что $f \in L_p$, $g \in L_p$; оценим $\|f+g\|_p$. Имеем:

$$|f+g|^p \leqslant (|f|+|g|)^p = |f|(|f|+|g|)^{p-1} + |g|(|f|+|g|)^{p-1}. \quad (4)$$

Число $p-1$ равно $\frac{p}{q}$ [как видно из (2)]; поэтому

$$(|f|+|g|)^{p-1} = (|f|+|g|)^{\frac{p}{q}} \in L_q,$$

причем

$$\|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q = I^{\frac{1}{q}}[(|f|+|g|)^p].$$

Интегрируя (4) и применяя неравенство Гёльдера, получаем:

$$I(|f|+|g|)^p \leqslant \|f\|_p \|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q =$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p)\, I^{\frac{1}{q}}[(|f|+|g|)^p].$$

Разделяя на $I^{\frac{1}{q}}[(|f|+|g|)^p]$ и вспоминая, что $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, находим:

$$\|f+g\|_p = I^{\frac{1}{p}}(|f+g|)^p \leqslant I^{\frac{1}{p}}(|f|+|g|)^p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Таким образом, при $p>1$ выполняется неравенство треугольника.

Остается проверить, что пространство L_p полное. Это делается аналогично проверке полноты пространства $L_1 = L$. Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — фундаментальная последовательность в пространстве L_p, то из нее можно выбрать подпоследовательность $\varphi_{n_k} = \psi_k$, удовлетворяющую условиям

$$\|\psi_{k+1} - \psi_k\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Если область G ограничена, то по неравенству Гёльдера

$$I(|\psi_{k+1} - \psi|) \leqslant \|1\|_q \|\psi_{k+1} - \psi_k\|_p \leqslant C \cdot 2^{-k},$$

откуда следует также, как и при $p=1$, сходимость (почти всюду) ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_k)$$

и существование (почти всюду) предельной функции $\varphi = \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k$. В случае бесконечной области G следует интегрировать по любой ограниченной области, что также обеспечит существование предельной функции почти всюду на G.

Так как $|\varphi|^p \doteq \lim |\varphi_k|^p$ и $I(|\varphi_k|^p)$ ограничены, например, числом M, то $\varphi \in L_p$, причем $I(|\varphi|^p) \leqslant M$. Таким же образом, как в § 3, для $I(|\varphi - \varphi_n|^p)$ получаем оценку

$$I(|\varphi - \varphi_n|^p) \leqslant \sup_{k \geqslant n} I(|\varphi_k - \varphi_n|^p) \leqslant \varepsilon$$

при достаточно большом n, откуда следует, что $\|\varphi - \varphi_n\|_p \to 0$, чем и завершается доказательство.

Точно так же, как и в § 3, доказывается, что совокупность непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ плотна в пространстве L_p по метрике этого пространства.

Заключительное замечание. Первые работы А. Лебега (франц. математик, 1875—1941) по теории меры и интеграла относятся к 1902 г. Созданная вначале для решения внутренних задач теории функций действительного переменного (проблема о первообразной, сходимость тригонометрических рядов), лебеговская теория очень скоро вышла за эти узкие рамки. Теорема Фишера и Ф. Рисса о полноте пространства суммируемых функций (1907) и введенные Ф. Риссом пространства L_p в конечном итоге сделали интеграл Лебега необходимым в современных общих проблемах анализа и математической физики. Ф. Рисс (венгерский математик, 1880—1956) предложил и ту схему построения теории интеграла, которая принята в нашем изложении. Рекомендуемая литература: А. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных функций, ГТТИ, 1934; Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.