ГЛАВА V

ГЕОМЕТРИЯ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Основные определения и примеры

1. Линейное пространство H (с умножением на вещественные числа) называется (вещественным) *гильбертовым пространством,* если 1) указано правило, которое позволяет сопоставить каждой паре точек (векторов) x, y пространства H вещественное число, называемое скалярным произведением векторов x и y и обозначаемое (x, y); 2) это правило удовлетворяет следующим требованиям:

а) $(y, x) = (x, y)$ (переместительный закон);
б) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$ (распределительный закон);
в) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого вещественного числа λ;
г) $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ и $(x, x) = 0$ при $x = 0$.

Из аксиом а) — в) легко получается общая формула

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \quad \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (x_i, y_j), \tag{1}$$

справедливая для произвольных векторов $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m$ и произвольных вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, a_k, \beta_1, \ldots, \beta_m$.

Примеры. *1.* В n-мерном пространстве R_n, элементами которого являются вещественные числовые комплексы $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, мы введем скалярное произведение векторов $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ по формуле

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \ldots + \xi_n \eta_n. \tag{2}$$

Это определение обобщает известную формулу выражения скалярного произведения векторов в трехмерном пространстве через координаты сомножителей в ортогональной системе координат.) Читатель легко проверит, что требования а) — г) удовлетворяются. Конечномерное (вещественное) гильбертово пространство обычно называют *евклидовым* пространством.

2. Следующий пример представляет собой бесконечномерный аналог предыдущего.

Пространство l_2. Элементом этого пространства является любая последовательность чисел $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ со сходящейся суммой квадратов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty.$$

Линейные операции определяются естественным образом:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)+(\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots)=(\xi_1+\eta_1, \ldots, \xi_n+\eta_n, \ldots),$$
$$\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)=(\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n, \ldots).$$

Скалярное произведение векторов $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ и $y=(\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots)$ задается по формуле

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\eta_n. \tag{3}$$

Необходимо проверить корректность этих определений. Прежде всего, из элементарного неравенства

$$\xi_n\eta_n \leqslant \frac{1}{2}(\xi_n^2+\eta_n^2)$$

следует, что ряд (3) для $x \in l_2$, $y \in l_2$ всегда является сходящимся. Далее, равенства

$$\sum_{k=n}^{n+m} (\alpha\xi_k)^2 = \alpha^2 \sum_{k=n}^{n+m} \xi_k^2,$$

$$\sum_{k=n}^{n+m} (\xi_k+\eta_k)^2 = \sum_{k=n}^{n+m} \xi_k^2 + 2\sum_{k=n}^{n+m} \xi_k\eta_k + \sum_{k=n}^{n+m} \eta_k^2$$

показывают, что для $x \in l_2$ и $y \in l_2$ сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\xi_k)^2 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k+\eta_k)^2,$$

и, следовательно, определенные нами операции сложения векторов и умножения на число выполнимы в пределах пространства l_2.

Остается проверить выполнение аксиом а) — г); но достаточно одного взгляда, чтобы убедиться в их справедливости.

3. Пространство $L_2(a, b)$ функций $\varphi(x)$ с суммируемым квадратом на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, как мы видели (гл. IV, § 5), есть линейное пространство; введем в него скалярное произведение по формуле

$$(\varphi, \psi)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx.$$

Выполнение аксиом скалярного произведения непосредственно следует здесь из свойств интеграла Лебега. Заметим, что интегрируемость произведения $\varphi\psi$ следует, например, из неравенства

$$|\varphi(x)\psi(x)| \leqslant \frac{1}{2}(|\varphi(x)|^2 + |\psi(x)|^2).$$

2. Изоморфизм гильбертовых пространств. Определение изоморфизма гильбертовых пространств строится по аналогии с определениями эквивалентности множеств, изометричности метрических пространств и изоморфизма линейных пространств, знакомыми нам по первой и второй главам. Именно два гильбертовых пространства H' и H'' называются *изоморфными,* если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие со следующими свойствами:

1) Если векторам x' и y' пространства H' отвечают векторы x'' и y'' пространства H'', то вектору $x'+y' \in H'$ отвечает вектор $x''+y'' \in H''$ и вектору $\alpha x' \in H'$ отвечает вектор $\alpha x'' \in H''$ при любом вещественном α.

2) В тех же предположениях число (x', y') равно числу (x'', y'').

В дальнейшем (§ 2, п. 3) мы покажем, что всякие два конечномерных гильбертовых пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу (и изоморфны, следовательно, пространству R_n примера 1). Пространства $L_2(a, b)$ и l_2 в действительности также изоморфны друг другу (§ 2, п. 6).

3. Длина вектора и угол между векторами. Наличие скалярного произведения позволяет ввести в гильбертовом пространстве понятие длины (нормы) вектора и угла между векторами по формулам

$$\|x\| = +\sqrt{(x, x)}, \tag{1}$$

$$\cos(\widehat{x, y}) = \frac{(x, y)}{\|x\|\,\|y\|}; \tag{2}$$

эти определения согласуются с обычными формулами аналитической геометрии. Вместо $\|x\|$ часто пишут просто $|x|$.

Рассмотрим эти определения в общем гильбертовом пространстве. Докажем, что отношение в правой части (2) по абсолютной величине не превосходит единицы, каковы бы ни были векторы x и y.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим вектор $\lambda x - y$, где λ — вещественное число. В силу аксиомы г) при любом λ имеем

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geqslant 0. \tag{3}$$

Используя формулу (1) п. 1, мы можем написать это неравенство в виде

$$\lambda^2 (x, x) - 2\lambda (x, y) + (y, y) \geqslant 0. \tag{4}$$

В левой части неравенства стоит квадратный трехчлен относительно λ с постоянными коэффициентами. Трехчлен этот не может иметь различных вещественных корней, так как тогда он не мог бы сохранять знака для всех значений λ. Поэтому дискриминант $(x, y)^2 - (x, x)(y, y)$ этого трехчлена не может быть положительным. Следовательно, $(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$, откуда, извлекая квадратный корень, получаем

$$|(x, y)| \leqslant |x|\,|y|, \tag{5}$$

что и требовалось.

Выясним, когда в неравенстве (5) возможен знак равенства. Если имеет место равенство

$$|(x, y)| = |x|\,|y|,$$

то дискриминант квадратного трехчлена (4) равен нулю и, следовательно, трехчлен имеет один вещественный корень λ_0. Мы получаем, таким образом,

$$\lambda_0^2(x, x) - 2\lambda_0(x, y) + (y, y) = (\lambda_0 x - y,\ \lambda_0 x - y) = 0,$$

откуда в силу аксиомы г) находим, что $\lambda_0 x - y = 0$, или $y = \lambda_0 x$. Наш результат можно сформулировать в геометрических терминах: *если скалярное произведение двух векторов по абсолютной величине равно произведению их длин, то эти векторы коллинеарны.*

Неравенство (5) называют *неравенством Коши — Буняковского.*

Примеры. *1.* В евклидовом пространстве R_n неравенство Коши — Буняковского имеет вид

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \eta_j^2}; \tag{6}$$

оно справедливо для любой пары векторов $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, или, что то же самое, для любых двух систем вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. (Это неравенство найдено Коши в 1821 г.)

2. В пространстве $L_2(a, b)$ неравенство Коши — Буняковского имеет вид

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b \psi^2(x)\,dx}; \tag{7}$$

оно справедливо для любой пары суммируемых в квадрате функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. (Это неравенство для функций, интегрируемых по Риману, нашел В. Я. Буняковский в 1859 г.)

Переходим теперь к выяснению свойств нормы.

Из аксиомы г) вытекает, что у каждого вектора x гильбертова пространства H существует норма: у всякого вектора $x \neq 0$ норма положительна, у нуль-вектора норма равна нулю. Равенство

$$|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = |\alpha| \sqrt{(x, x)} = |\alpha| |x| \tag{8}$$

показывает, что *абсолютную величину числового множителя можно выносить за знак нормы вектора.* Наконец, норма удовлетворяет неравенству треугольника:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \tag{9}$$

Действительно, в силу неравенства Коши — Буняковского

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant$$
$$\leqslant (x, x) + 2|x||y| + (y, y) = (|x| + |y|)^2,$$

откуда, извлекая корень, и получаем (9).

Таким образом, норма в пространстве H удовлетворяет аксиомам линейного нормированного пространства (гл. II, § 8). *Все метрические понятия и свойства, связанные с существованием нормы, имеют место в гильбертовом пространстве.* Но так как гильбертово пространство — лишь очень частный случай нормированного пространства, то есть основания ожидать, что норма в гильбертовом пространстве обладает и свойствами, специфическими лишь для гильбертовых пространств. К числу таких свойств относится следующая лемма:

Лемма о параллелограмме. *Для любых двух векторов x и y гильбертова пространства H имеет место равенство*

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$$

(сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон).

Доказательство получается простой выкладкой:

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = (x + y, x + y) + (x - y, x - y) =$$
$$= 2(x, x) + 2(y, y) = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Задача. Известно, что в некотором нормированном пространстве R справедлива для любой пары векторов x, y лемма о параллелограмме. Рассмотреть функцию

$$(x, y) = \frac{1}{4}(|x + y|^2 - |x - y|^2) \qquad (\text{так что } (x, x) = |x|^2)$$

и доказать, что она удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения п. 1.

Указание. Для проверки выполнения аксиомы б) применить лемму о параллелограмме к параллелограммам, построенным на векторах: 1) $x + z$, y; 2) $x - z$, y; 3) $y + z$, x; 4) $y - z$, x. Аксиому в) проверить вначале для целых λ, затем для дробных, затем перейти к пределу.

4. Предельный переход в гильбертовом пространстве. Вместе с метрикой в гильбертовом пространстве появляются понятия, связанные с предельным переходом. Мы говорим, что последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ элементов гильбертова пространства H сходится к элементу x (или имеет пределом элемент x), если

$$\lim_{n\to\infty} |x - x_n| = 0.$$

Функция $f(x)$, определенная на пространстве H, называется *непрерывной* в точке x_0, если из $x \longrightarrow x_0$ следует $f(x) \longrightarrow f(x_0)$. Аналогично определяются непрерывные функции двух и более переменных.

Проверим для примера, что скалярное произведение (x, y) есть непрерывная функция от обеих переменных x и y, т. е. если $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$, то $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$.

Положим $y - y_n = h_n$, $x - x_n = k_n$; по условию $h_n \longrightarrow 0$, $k_n \longrightarrow 0$. По неравенству Коши — Буняковского

$$|(x, y) - (x_n, y_n)| = |(x, y) - (x - k_n, y - h_n)| =$$
$$= |(x, h_n) + (y, k_n) - (k_n, h_n)| \leqslant |x||h_n| + |y||k_n| + |k_n||h_n|;$$

при возрастании n эта величина стремится к нулю. Отсюда следует, что $(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n)$, что и требовалось.

Последовательность $\{x_n\} \in H$ называется *фундаментальной*, если

$$\lim_{n,\, m\to\infty} |x_n - x_m| = 0.$$

Пространство H называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность имеет предел.

Все три рассмотренные выше конкретные пространства: R_n, l_2, L_2 — полные.

Полнота пространства R_n доказывается элементарно (ср. гл. II, § 4). Полноту пространства L_2 мы доказали в гл. IV, § 5, п. 3. Проверим, что пространство l_2 также полно.

Пусть $x_m = (\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)}, \ldots)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ — фундаментальная последовательность векторов пространства l_2. Так как для m и p, стремящихся к бесконечности, по условию

$$\| x_m - x_p \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n^{(m)} - \xi_n^{(p)} |^2 \longrightarrow 0,$$

то, в частности, каждое слагаемое $|\xi_n^{(m)} - \xi_n^{(p)}|^2$ (при фиксированном n) стремится к нулю, когда m и p неограниченно увеличиваются, поэтому при каждом фиксированном n последовательность координат $\xi_n^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ в силу классического критерия Коши является сходящейся. Обозначим $\xi_n = \lim\limits_{m\to\infty} \xi_n^{(m)}$ и покажем, что вектор $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ принадлежит пространству l_2.

Так как элементы фундаментальной последовательности в совокупности ограничены, то

$$\|x_m\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^{(m)}|^2 \leqslant K,$$

где K не зависит от m. Поэтому для любого фиксированного N

$$\sum_{n=1}^{N} \xi_n^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |\xi_n^{(m)}|^2 \leqslant K;$$

отсюда непосредственно вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$.

Остается показать, что $\|x - x_m\|$ стремится к нулю, когда $m \to \infty$. Для этого в неравенстве

$$\sum_{n=1}^{N} |\xi_n^{(m)} - \xi_n^{(p)}|^2 \leqslant \varepsilon,$$

справедливом для заданного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших m и p и любом N, перейдем к пределу при $p \to \infty$.

В результате получим неравенство

$$\sum_{n=1}^{N} |\xi_n^{(m)} - \xi_n|^2 \leqslant \varepsilon,$$

из которого после перехода к пределу при $N \to \infty$ получается неравенство

$$\|x_m - x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^{(m)} - \xi_n|^2 \leqslant \varepsilon,$$

справедливое для всех достаточно больших m, что и требуется.

Если пространство H неполно, то, как мы видели в гл. II, можно построить пополнение пространства H. Элементами пополнения служат всевозможные классы эквивалентных фундаментальных последовательностей. В гл. II было доказано, что в пополнение линейного нормированного пространства можно естественно ввести линейные операции и норму так, что оно будет снова линейным нормированным пространством. Если H — гильбертово пространство, то в пополнение можно ввести естественно и скалярное произведение. Именно пусть даны классы X и Y. Возьмем любые последовательности $\{x_n\} \in X$ и $\{y_n\} \in Y$. Мы утверждаем, что существует предел выражения (x_n, y_n) при $n \to \infty$.

Действительно, мы имеем:

$$|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)| = |(x_n, y_n - y_m)| + |(x_n - x_m, y_m)| \leqslant \\ \leqslant |x_n||y_n - y_m| + |x_n - x_m||y_m|.$$

Числа $|x_n|$ и $|y_m|$ ограничены, поскольку соответствующие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальны в H. Поэтому последовательность (x_n, y_n) удовлетворяет обычному критерию Коши и, следовательно, имеет предел, что и утверждалось. Этот предел не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в классах X и Y. Действительно, если $\{x'_n\} \in X$, $\{y'_n\} \in Y$, то

$$|(x'_n, y'_n) - (x_n, y_n)| = |(x'_n - x_n, y'_n) + (x_n, y'_n - y_n)| \leqslant$$
$$\leqslant |x'_n - x_n| |y'_n| + |x_n| |y'_n - y_n| \to 0,$$

поскольку y'_n и x'_n ограничены, $\{x'_n\}$ конфинальна с $\{x_n\}$ и $\{y'_n\}$ конфинальна с $\{y_n\}$.

Легко проверить выполнение аксиом а) — г), на чем мы уже не останавливаемся.

Таким образом, *пополнение гильбертова пространства есть снова гильбертово пространство.*

Задачи. 1. Пусть $d_1, d_2, \ldots$ — фиксированная последовательность чисел и $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n d_n$ сходится при любой последовательности $(\xi_n) \in l_2$; показать, что $(d_n) \in l_2$.

Указание. Сначала показать, что $d_n \to 0$. Далее, предположив, что $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$, рассмотреть отрезки $(d_{n_k}, \ldots, d_{n_{k+1}})$, для которых $1 \leqslant \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} d_n^2 \leqslant 2$. Положить $\xi_n = \frac{d_n}{k}$ при $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ и показать, что $(\xi_n) \in l_2$, но $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n d_n = \infty$.

2. Пусть $c_1, c_2, \ldots$ — фиксированная последовательность положительных чисел; доказать, что множество M всех элементов $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in l_2$ с $|\xi_n| \leqslant c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ компактно тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$.

Указание. Если $\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2 < \varepsilon$, то множество элементов $(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$ с $|\xi_n| \leqslant c_n$ образует компактную ε-сеть для M. При $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \infty$ рассмотреть отрезки $(c_{n_k}, \ldots, c_{n_{k+1}})$, для которых $\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} c_n^2 > 1$; соответствующие элементы $(0, \ldots, 0, c_{n_k}, \ldots, c_{n_{k+1}-1}, 0, \ldots)$ входят в M и имеют взаимные расстояния, большие $\sqrt{2}$.

3. Доказать, что множество M элементов $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in l_2$ компактно тогда и только тогда, когда: 1) все числа $|\xi_n|$ ограничены фиксированной по-

стоянной; 2) все ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ сходятся на M равномерно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер N так, что $\sum_{N}^{\infty} \xi_n^2 < \varepsilon$ для всех $(\xi_n) \in M$.

Указание. Использовать метод решения задачи 2.

§ 2. Ортогональные разложения

1. Ортогональность. Векторы x и y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то это определение, в соответствии с общим определением угла между двумя векторами (§ 1, п. 3), означает, что x и y образуют угол в $90°$. Нулевой вектор оказывается ортогональным любому вектору $x \in H$.

В пространстве $L_2(a, b)$ условие ортогональности векторов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеет вид

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

Читатель легко проверит, вычислив соответствующие интегралы, что в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ любые два вектора «тригонометрической системы»

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

взаимно ортогональны.

Отметим несколько простых свойств, связанных с понятием ортогональности.

1) Если вектор x ортогонален векторам $y_1, y_2, \ldots, y_k$, то он ортогонален и любой линейной комбинации $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_k y_k$ этих векторов. Действительно, мы имеем

$$(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_k y_k, x) = \alpha_1 (y_1, x) + \ldots + \alpha_k (y_k, x) = 0.$$

2) Если векторы $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ ортогональны вектору x и $y = \lim_{n \to \infty} y_n$, то вектор y также ортогонален вектору x.

Действительно, в силу непрерывности скалярного произведения

$$(y, x) = \lim_{n \to \infty} (y_n, x) = 0,$$

что и требовалось.

Из свойств 1) и 2) следует, что совокупность всех векторов, ортогональных вектору x (или произвольному фиксированному множеству X векторов), образует замкнутое подпространство — *ортогональное дополнение к вектору x (к множеству X)*.

3) Теорема Пифагора и ее обобщение. Пусть векторы x и y ортогональны; тогда по аналогии с элементарной геометрией