стоянной; 2) все ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ сходятся на M равномерно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер N так, что $\sum_{N}^{\infty} \xi_n^2 < \varepsilon$ для всех $(\xi_n) \in M$.

Указание. Использовать метод решения задачи 2.

§ 2. Ортогональные разложения

1. Ортогональность. Векторы x и y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то это определение, в соответствии с общим определением угла между двумя векторами (§ 1, п. 3), означает, что x и y образуют угол в $90°$. Нулевой вектор оказывается ортогональным любому вектору $x \in H$.

В пространстве $L_2(a, b)$ условие ортогональности векторов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеет вид

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

Читатель легко проверит, вычислив соответствующие интегралы, что в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ любые два вектора «тригонометрической системы»

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

взаимно ортогональны.

Отметим несколько простых свойств, связанных с понятием ортогональности.

1) Если вектор x ортогонален векторам $y_1, y_2, \ldots, y_k$, то он ортогонален и любой линейной комбинации $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_k y_k$ этих векторов. Действительно, мы имеем

$$(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_k y_k, x) = \alpha_1 (y_1, x) + \ldots + \alpha_k (y_k, x) = 0.$$

2) Если векторы $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ ортогональны вектору x и $y = \lim_{n \to \infty} y_n$, то вектор y также ортогонален вектору x.

Действительно, в силу непрерывности скалярного произведения

$$(y, x) = \lim_{n \to \infty} (y_n, x) = 0,$$

что и требовалось.

Из свойств 1) и 2) следует, что совокупность всех векторов, ортогональных вектору x (или произвольному фиксированному множеству X векторов), образует замкнутое подпространство — *ортогональное дополнение к вектору x (к множеству X)*.

3) Теорема Пифагора и ее обобщение. Пусть векторы x и y ортогональны; тогда по аналогии с элементарной геометрией

вектор $x+y$ можно называть гипотенузой прямоугольного треугольника, построенного на векторах x и y. Умножая $x+y$ скалярно на себя и используя ортогональность векторов x и y, мы получаем:

$$|x+y|^2=(x+y,\ x+y)=(x, x)+2(x, y)+(y, y)=$$
$$=(x, x)+(y, y)=|x|^2+|y|^2.$$

Мы доказали тем самым в общем гильбертовом пространстве теорему Пифагора: *квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.* Нетрудно обобщить эту теорему на случай любого конечного числа слагаемых. Именно пусть векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ взаимно ортогональны и $z=x_1+x_2+\ldots+x_k$; тогда

$$|z|^2=(x_1+\ldots+x_k,\ x_1+\ldots+x_k)=|x_1|^2+\ldots+|x_k|^2.$$

2. Метод ортогонализации. Для получения ортогональной системы векторов часто используется метод ортогонализации данной неортогональной системы. Этот метод состоит в следующем. Пусть дана последовательность векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, в которой каждая конечная подсистема $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независима. Утверждается, что по формулам

$$\left.\begin{aligned} y_1&=x_1,\\ y_2&=x_2+a_{21}x_1,\\ y_3&=x_3+a_{32}x_2+a_{31}x_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n&=x_n+a_{n,\,n-1}x_{n-1}+\ldots+a_{n1}x_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

со специальным образом подобранными коэффициентами a_{jk} можно построить систему векторов $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, ненулевых и взаимно ортогональных. Система формул (1) с соответствующими коэффициентами a_{jk} называется *формулами ортогонализации.*

Существование решения этой системы, подчиненного требуемым условиям ортогональности, легко доказать по индукции. Действительно, предположим, что построены ненулевые и взаимно ортогональные векторы $y_1, \ldots, y_{n-1}$, удовлетворяющие первым $n-1$ уравнениям системы (1), и покажем, что можно найти вектор y_n, удовлетворяющий n-му уравнению системы (1) и ортогональный векторам $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Будем искать вектор y_n в форме линейной комбинации от $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ следующего специального вида:

$$y_n=b_{n1}y_1+\ldots+b_{n,\,n-1}\,y_{n-1}+x_n,\qquad(2)$$

где $y_1, \ldots, y_{n-1}$ — найденные уже векторы, а $b_{n1}, \ldots, b_{n,\,n-1}$ — коэффициенты, подлежащие определению.

Умножая уравнение (2) скалярно на y_k $(k<n)$ и пользуясь предположенной ортогональностью y_k к $y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{n-1}$,

получаем

$$(y_n, y_k) = (x_n, y_k) + b_{nk}(y_k, y_k).$$

Приравнивая правую часть нулю, получаем уравнение относительно коэффициента b_{nk}, которое разрешимо, поскольку по предположению $(y_k, y_k) \neq 0$. Когда все коэффициенты b_{nk} $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ таким образом найдены, уравнение (2) позволяет построить вектор y_n. Он по построению будет ортогонален каждому из векторов $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_{n-1}$; нам остается только показать, что $y_n \neq 0$. Для этого вставим выражения $y_1, \ldots, y_{n-1}$ из первых $n-1$ уравнений (1) в n-е уравнение; мы получим линейное выражение y_n через $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, причем коэффициент при x_n равен 1. Если бы y_n был нулем, то мы получили бы линейную зависимость между $x_1, \ldots, x_n$, что по предположению не имеет места. Отсюда $y_n \neq 0$, что и требовалось; тем самым корректность метода ортогонализации обоснована.

Можно далее еще «улучшить» полученную ортогональную систему векторов $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, разделив каждый из векторов y_n на его норму $|y_n|$; полученная система векторов $e_n = \frac{y_n}{|y_n|}$ не только ортогональна, но и нормирована, так что каждый из векторов имеет норму, равную единице. Такие системы векторов называют *ортонормальными*.

Задачи. 1. Пусть задана система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Доказать, что существует лишь единственная (с точностью до числовых множителей) система векторов $y_1, \ldots, y_n, \ldots$, удовлетворяющая условиям: а) $(x_j, y_k) = 0$ при $j < k$; б) при любом n вектор y_n линейно выражается через $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Многочлены, получающиеся при ортогонализации функций $1, x, x^2, \ldots$ в пространстве $L_2(-1, 1)$, называются многочленами Лежандра. Показать, что n-й многочлен Лежандра имеет вид

$$P_n(x) = C_n[(x^2-1)^n]^{(n)}.$$

Указание. Использовать задачу 1.

3. Функции, получающиеся при ортогонализации выражений $e^{-x^2}, xe^{-x^2}, \ldots$ $\ldots, x^n e^{-x^2}, \ldots$ в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$, называются функциями Эрмита. Показать, что n-я функция Эрмита имеет вид

$$\mathcal{E}_n(x) = C_n e^{x^2}[e^{-2x^2}]^{(n)}.$$

4. Функции, получающиеся при ортогонализации выражений $e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}, \ldots$ в пространстве $L_2(0, \infty)$, называются функциями Лагерра. Показать, что n-я функция Лагерра имеет вид

$$L_n(x) = C_n e^x (x^n e^{-2x})^{(n)}.$$

3. Изоморфизм между двумя n-мерными евклидовыми пространствами. Мы можем теперь доказать теорему об изоморфизме любых двух евклидовых пространств одинаковой размерности. Для доказательства этой теоремы построим в каждом из двух данных евклидовых пространств R_n' и R_n'' по ортогональному и нормированному базису: $e_1', \ldots, e_n'$ в R_n' и $e_1'', \ldots, e_n''$ в R_n'', ортогонализируя по методу п. 2 произвольную линейно независимую систему в каждом из пространств R_n' и R_n''. Далее произвольному вектору $x' \in R_n'$, имеющему относительно базиса $e_1', \ldots, e_n'$ разложение, например,

$$x' = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j',$$

поставим в соответствие вектор $x'' \in R_n''$, имеющий относительно базиса $e_1'', \ldots, e_n''$ разложение с теми же самыми коэффициентами $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$x'' = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j''.$$

Ясно, что это соответствие взаимно однозначно и сохраняет линейные операции. Покажем, что скалярные произведения соответствующих векторов в R_n' и R_n'' совпадают. Положим

$$y' = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k',$$

$$y'' = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k'';$$

тогда, поскольку базисы $\{e_j'\}$ и $\{e_j''\}$ ортонормальны,

$$(x', y') = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j', \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k'\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j,$$

$$(x'', y'') = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j'', \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k''\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j = (x', y'),$$

что и утверждалось. Теорема доказана.

4. Ортонормальные системы в бесконечномерном гильбертовом пространстве H. В бесконечномерном пространстве заведомо имеются бесконечные ортонормальные системы. Мы будем называть ортонормальную систему $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ *полной* в пространстве H, если в пространстве H не существует ни одного ненулевого вектора, ортогонального всем векторам этой системы. Иначе говоря, система $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ полна, если из условий

$$x \in H, \quad (e_n, x) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

вытекает, что $x = 0$.

Мы покажем, что *полная* ортонормальная система в *полном* гильбертовом пространстве является базисом в том смысле, что для каждого вектора $f \in H$ существует разложение в сходящийся (по норме) ряд

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j, \tag{1}$$

причем

$$|f|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2. \tag{2}$$

Для доказательства найдем сначала выражения коэффициентов разложения (1), предполагая, что оно существует. Для этого умножим скалярно обе части равенства (1) на вектор e_k. Так как скалярное произведение непрерывно, то

$$(f, e_k) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j, e_k\right) = \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} c_j e_j, e_k\right) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j, e_k\right) = \lim_{n \to \infty} c_k = c_k.$$

Мы получаем формулу

$$c_k = (f, e_k). \tag{3}$$

Коэффициенты c_k, определенные по формулам (3), называются *коэффициентами Фурье* вектора f по системе $\{e_k\}$. Отметим, что эти числа можно составить прямо по вектору f и системе $\{e_k\}$, не зная еще, имеет или не имеет места разложение (1). Они имеют простой геометрический смысл: поскольку

$$(f, e_k) = |f|\,|e_k| \cos(\widehat{f, e_k}) = |f| \cos(\widehat{f, e_k}),$$

коэффициент a_k есть проекция вектора f на направление вектора e_k.

Пусть f — заданный вектор и $e_1, \ldots, e_n$ — фиксированная конечная ортонормальная система (неполная, вообще говоря). Составим вектор

$$g = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)\, e_k.$$

Этот вектор принадлежит к подпространству H_n, порожденному векторами $e_1, \ldots, e_n$. Определим далее вектор h условием

$$f = g + h.$$

Мы утверждаем, что вектор h ортогонален каждому из векторов e_1, $e_2, \ldots, e_n$ (и, следовательно, всему подпространству H_n). Действительно, мы имеем

$$(h, e_j) = (f, e_j) - (g, e_j) = (f, e_j) - \left(\sum_{k=1}^{n} (f, e_k)\, e_k, e_j\right) =$$
$$= (f, e_j) - (f, e_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

На языке геометрии h есть перпендикуляр, опущенный из конца вектора f на подпространство H_n; а вектор g есть проекция f на это подпространство. В частности, согласно теореме Пифагора

$$|f|^2=|g|^2+|h|^2=\sum_{k=1}^{n}(f, e_k)^2+|h|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n}(f, e_k)^2.$$

Полученное неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}(f, e_k)^2 \leqslant |f|^2, \tag{4}$$

имеющее место для любого вектора f и любой ортонормальной системы $e_1, \ldots, e_n$, называется *неравенством Бесселя*. Если нам дана бесконечная ортонормальная система $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, то, поскольку неравенство Бесселя справедливо при любом n, мы после перехода к пределу получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f, e_k)^2 \leqslant |f|^2. \tag{5}$$

Иными словами, *квадраты коэффициентов Фурье любого вектора f по любой ортонормальной системе $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ образуют сходящийся ряд.*

Неравенство (5) мы также будем называть *неравенством Бесселя*.

Теперь мы переходим к формулировке и доказательству основной теоремы.

Теорема 1. *Пусть в полном гильбертовом пространстве H выбрана полная ортонормальная система $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Тогда для любого вектора f имеет место разложение*

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}(f, e_j)\, e_j, \tag{6}$$

причем

$$|f|^2=\sum_{j=1}^{\infty}(f, e_j)^2. \tag{7}$$

Последнее равенство, представляющее собой бесконечномерное обобщение теоремы Пифагора, называют обычно *равенством Парсеваля*.

Доказательство. Положим для сокращения $(f, e_n)=a_n$.

Пусть s_p есть сумма p слагаемых ряда (6) и $q>p$.

Тогда

$$|s_q-s_p|^2=\left|\sum_{p+1}^{q} a_j e_j\right|^2=\sum_{p+1}^{q} a_j^2.$$

При $p \to \infty$ эта величина стремится к нулю вследствие сходимости ряда из чисел a_j^2. Поэтому суммы s_p образуют фундаментальную последовательность. Вследствие предположенной полноты пространства H суммы s_p при $p \to \infty$ имеют некоторый предел $s \in H$. Покажем, что $s = f$. Для этого заметим, что при фиксированном k и $p > k$

$$(s, e_k) = \lim_{p \to \infty} (s_p, e_k) = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{p} a_j e_j, e_k\right) = \lim_{p \to \infty} a_k = a_k = (f, e_k);$$

поэтому для любого k

$$(f - s, e_k) = (f, e_k) - (s, e_k) = 0. \tag{8}$$

Так как система $\{e_k\}$ предположена полной, то из равенства (8) следует $f = s$. Таким образом,

$$f = \lim_{p \to \infty} s_p = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j.$$

Далее, в силу непрерывности скалярного произведения

$$|f|^2 = (f, f) = (\lim_{p \to \infty} s_p, \lim_{p \to \infty} s_p) = \lim_{p \to \infty} (s_p, s_p) = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{p} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

что и требовалось.

Замечание 1. Если g — любой другой вектор пространства, то, вычисляя подобным же способом скалярное произведение (f, g), получим формулу

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)(g, e_k). \tag{9}$$

Замечание 2. Если $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — любая последовательность чисел со сходящимся рядом квадратов, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

как видно из начала нашего доказательства, сходится в пространстве H. Если обозначить его сумму через f, то, как и выше, будут иметь место равенства $a_n = (f, e_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Итак, *любая числовая последовательность со сходящимся рядом из квадратов есть последовательность коэффициентов Фурье некоторого вектора пространства H.*

5. Критерий полноты системы. Для применения основной теоремы п. 4 нужно располагать полной ортонормальной системой $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Если непосредственно не видно, является ли данная ортонормальная система $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ полной в пространстве H, можно воспользоваться следующим критерием полноты:

Теорема 2. *Данная ортонормальная система $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ полна в полном пространстве H тогда и только тогда, когда линейные комбинации векторов этой системы образуют множество, всюду плотное в H.*

Доказательство. Если система

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

полна, то в силу теоремы 1 каждый вектор $f \in H$ есть предел линейных комбинаций векторов системы $\{e_n\}$, так что совокупность линейных комбинаций векторов этой системы образует всюду плотное множество в пространстве H. Обратно, пусть известно, что линейные комбинации векторов системы $\{e_n\}$ образуют всюду плотное множество в пространстве H, и пусть для некоторого вектора g выполнены равенства $(g, e_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ортогональное дополнение к вектору g содержит все векторы e_k, все линейные комбинации этих векторов и замыкание множества линейных комбинаций, т. е. все пространство H. В частности, $(g, g) = 0$, откуда $g = 0$. Таким образом, система $\{e_n\}$ в указанном случае полна, что и требовалось.

Рассмотрим случай, когда система $\{e_n\}$ получена путем ортогонализации некоторой системы $\{x_n\}$. Согласно формулам ортогонализации каждый вектор e_n есть линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_n$ и, обратно, каждый вектор x_n есть линейная комбинация векторов $e_1, \ldots, e_n$ [см. равенство (2) п. 2]. Поэтому общий запас всех линейных комбинаций векторов $\{e_n\}$ совпадает с общим запасом всех линейных комбинаций векторов $\{x_n\}$. Следовательно, полноту системы $e_1, \ldots$ $\ldots, e_n, \ldots$ можно устанавливать путем доказательства плотности в пространстве H совокупности всех линейных комбинаций исходных векторов $\{x_n\}$.

Пример. Как мы видели, в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ векторы $1, \cos x, \sin x, \ldots$ образуют ортогональную систему. Линейные комбинации векторов этой системы — тригонометрические многочлены — образуют всюду плотное множество в $L_2(-\pi, \pi)$ (гл. IV, § 5, п. 3). В силу теоремы 2 система $1, \cos x, \sin x, \ldots$ полна в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ и имеет место теорема 1: *всякая функция $\varphi(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ разлагается в ряд по функциям* $1, \cos x, \sin x, \ldots,$ *сходящийся по метрике пространства* $L_2(-\pi, \pi)$. Следует заметить, что функции $1, \cos x, \sin x, \ldots$ не нормированы; легко вычислить, что $\|1\|^2 = 2\pi$, $\|\cos mx\|^2 = \|\sin mx\|^2 = \pi$. Нормированную систему образуют функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots$$

Согласно формулам (1) и (3) п. 4 искомое разложение имеет вид

$$\varphi(x)=\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\left(\varphi, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}+\left(\varphi, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx+\frac{\cos x}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos x\,dx+\frac{\sin x}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin x\,dx+\ldots$$

Обозначая

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx,$$

мы приходим к обычной записи ряда Фурье:

$$\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Мы знаем теперь, что этот ряд сходится по метрике $L_2(-\pi, \pi)$ для любой функции $\varphi(x)\in L_2(-\pi, \pi)$.

Задачи. 1. Доказать полноту системы полиномов Лежандра (п. 2, задача 2) в пространстве $L_2(-1, 1)$.

Указание. Использовать теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций многочленами.

Замечание. Система функций Эрмита (п. 2, задача 3) в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ и система функций Лагерра (п. 2, задача 4) в пространстве $L_2(0, \infty)$ — также полные системы. См. гл. VII, § 3, п. 5.

2. Построить в пространстве $C_2(a, b)$ ортогональную систему непрерывных функций $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$, обладающую свойствами:

а) из $\int_a^b f(x)\,e_n(x)\,dx=0\quad(n=1, 2, \ldots)$ следует $f(x)\equiv 0$,

какова бы ни была *непрерывная* функция $f(x)$;

б) линейные комбинации функций $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$ неплотны в пространстве $C_2(a, b)$.

Указание. Ортогонализовать последовательность многочленов с рациональными коэффициентами, ортогональных фиксированной разрывной функции, например характеристической для интервала (a, c), $a<c<b$.

Замечание. Результат этой задачи показывает, что для выполнения условия полноты системы, приведенного в этом пункте, существенно предположение о полноте пространства H.

6. Изоморфизм всех счетномерных гильбертовых пространств. Гильбертово пространство мы будем называть *счетномерным*, если в нем имеется счетная полная ортонормальная система. В этом пункте мы покажем, что любые два полных счетномерных пространства изоморфны.

Согласно теореме 1 п. 4 каждый вектор f полного счетномерного пространства H с полной ортонормальной системой $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ допускает разложение

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

где $c_k = (f, e_k)$ и ряд из квадратов чисел c_k сходится. С другой стороны, как было замечено в п. 4, если $c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$ — произвольная последовательность чисел со сходящимся рядом из квадратов, то существует вектор $f \in H$, коэффициенты разложения которого по системе $\{e_k\}$ суть числа $\{c_k\}$.

Пользуясь этим, мы можем установить взаимно однозначное соответствие между произвольным полным счетномерным пространством H и пространством l_2 (§ 1, п. 1, пример 2), ставя в соответствие вектору $f \in H$ последовательность $c_n = (f, e_n)$ коэффициентов Фурье вектора f по полной ортонормальной системе $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Такое соответствие сохраняет, очевидно, линейные операции. Оно сохраняет и скалярное произведение, так как если

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k,$$

то по формуле (9) п. 4

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k,$$

а именно по такой формуле определялось и скалярное произведение элементов $x = (a_k)$ и $y = (b_k)$ пространства l_2. В частности, заново получается, что l_2 есть полное пространство. Мы видим также, что $L_2(a, b)$, *как полное счетномерное пространство, изоморфно пространству* l_2. Далее, *любые два полных счетномерных пространства изоморфны пространству* l_2 *и, следовательно, изоморфны друг другу.*

7. Сепарабельность. Конечномерные и счетномерные пространства могут быть определены как *сепарабельные* пространства, т. е. обладающие счетным всюду плотным множеством.

Действительно, если пространство H конечно- или счетномерно, то в нем есть конечная или счетная полная ортонормальная система $e_1, e_2, \ldots$ В силу теоремы 1 п. 4 линейные комбинации векторов $e_1, e_2, \ldots$ образуют всюду плотное множество в H. Если ограничиться при этом лишь линейными комбинациями, имеющими рациональные коэффициенты, то получится счетное множество элементов, по-прежнему плотное в H; таким образом, H сепарабельно.

Пусть, обратно, H сепарабельно и $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ — счетное всюду плотное множество в H. Если произвести ортогонализацию элементов $f_1, f_2, \ldots$, то согласно п. 5 получится полная ортогональная в H система, причем она по построению будет не более чем счетной; таким образом, H конечно- или счетномерно.

Заметим, что *в сепарабельном пространстве H и каждое подпространство $H' \subset H$ сепарабельно*. Для доказательства фиксируем n и k и отметим элемент $\varphi_{nk} \in H'$, если таковой имеется в шаре радиуса $\frac{1}{k}$ с центром в точке f_n счетного всюду плотного в H множества $f_1, f_2, \ldots$ Мы утверждаем, что полученное счетное множество элементов φ_{nk} $(k, n = 1, 2, \ldots)$ плотно в H'. Действительно, для любого $\varphi \in H'$ и любого k мы можем в шаре радиуса $\frac{1}{k}$ с центром в точке φ найти некоторый элемент f_n; тогда заведомо имеются элементы множества H' в шаре радиуса $\frac{1}{k}$ с центром в f_n. Имеется, следовательно, элемент $\varphi_{nk} \in H'$, причем заведомо

$$|\varphi - \varphi_{nk}| < |\varphi - f_n| + |f_n - \varphi_{nk}| < \frac{2}{k}.$$

В частности, *в любом замкнутом подпространстве H' сепарабельного гильбертова пространства H имеется полная ортогональная система $e_1, e_2, \ldots$*

Задача. Доказать непосредственно сепарабельность пространств

$$L_2(-\infty, \infty) \text{ и } L_2(0, \infty).$$

8. Ортогональное дополнение. Вернемся к теореме ортогонализации п. 2. В этой теореме, исходя из заданной системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, мы строили новую систему $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ векторов так, чтобы y_n был линейной комбинацией векторов $x_1, \ldots, x_n$ и был ортогонален векторам $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Равенство

$$x_n = y_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1} = y_n + g_n$$

определяет разложение вектора x_n в сумму двух векторов g_n и y_n, первый из которых лежит в подпространстве H_{n-1}, порожденном векторами $x_1, \ldots, x_{n-1}$, а второй ортогонален $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и, следовательно, ортогонален каждому вектору из подпространства H_{n-1}. Поэтому естественно называть вектор g_n проекцией вектора x_n на подпространство H_{n-1}, а y_n — перпендикуляром, опущенным из конца x_n на подпространство H_{n-1}. Процесс ортогонализации состоит как раз в том, что мы заменяем вектор x_n перпендикуляром, опущенным из его конца на подпространство, порожденное предыдущими векторами.

Существование этого перпендикуляра вытекает из анализа уравнений ортогонализации, как мы видели в п. 2. Соответствующий вывод существенно использует конечномерность подпространства H_{n-1}.

Пусть теперь L — произвольное подпространство гильбертова пространства H и f — вектор, не входящий в L. Поставим вопрос: можно ли и в этом случае обеспечить существование разложения

$$f = g + h,$$

где $g \in L$, а h ортогонален любому вектору из L (будем говорить коротко: ортогонален L)? Оказывается, что при некоторых условиях на H и на L такое разложение существует.

Теорема. *Если H — полное гильбертово пространство и $L \subset H$ — замкнутое подпространство, то для любого $f \in H$ существует разложение*

$$f = g + h, \tag{1}$$

где $g \in L$, а h ортогонален L; при этом g и h определены однозначно вектором f.

Доказательство. Обозначим $d = \inf\limits_{g \in L} |f - g|$. Имеются две возможности: $d = 0$ и $d > 0$. Если $d = 0$, то найдется последовательность $g_n \in L$ такая, что $|f - g_n| \to 0$, откуда следует, что f — предельная точка для подпространства L; а так как L замкнуто, то точка f сама принадлежит L. Разложение (1) осуществляется, очевидно, при $g = f$, $h = 0$.

Пусть теперь $d > 0$. Рассмотрим последовательность $g_n \in L$, для которой $|f - g_n| \to d$. Применяя лемму о параллелограмме (§ 1, п. 3) к векторам $x = f - g_n$ и $y = f - g_m$, получаем:

$$2|f - g_n|^2 + 2|f - g_m|^2 = 4\left|f - \frac{g_n + g_m}{2}\right|^2 + |g_n - g_m|^2.$$

При $n, m \to \infty$ левая часть стремится к $4d^2$. Первое слагаемое правой части не менее чем $4d^2$, поскольку $\frac{g_n + g_m}{2} \in L$, $\left|f - \frac{g_n + g_m}{2}\right| \geq d$. Поэтому последнее слагаемое в правой части стремится к нулю, откуда вытекает, что последовательность g_n фундаментальна. Так как H — полное пространство, то последовательность g_n имеет при $n \to \infty$ предел g, который принадлежит подпространству L в силу замкнутости последнего.

Покажем, что вектор $h = f - g$ ортогонален L. Действительно, для любого $q \in L$ мы имеем при любом λ

$$\begin{aligned} d^2 &\leq |f - (g - \lambda q)|^2 = |h + \lambda q|^2 = \\ &= (h + \lambda q, h + \lambda q) = d^2 + 2\lambda(h, q) + \lambda^2 |q|^2, \end{aligned}$$

откуда

$$2\lambda(h, q)+\lambda^2|q|^2 \geqslant 0,$$

но это возможно при любом λ, лишь если $(h, q)=0$.

Итак, разложение (1) установлено. Покажем теперь, что составляющие g и h определены однозначно. Допустим, что

$$f=g+h=g'+h',$$

где g, g' принадлежат L, а h, h' ортогональны L. Вычитая, находим:

$$0=(g-g')+(h-h'),$$

где $g-g' \in L$, а $h-h'$ ортогонален L. В силу теоремы Пифагора $g-g'=h-h'=0$, откуда $g=g'$, $h=h'$, что и требуется.

Совокупность всех векторов h, ортогональных подпространству L (включая нуль-вектор), образует замкнутое подпространство M, которое называется *ортогональным дополнением* подпространства L.

Мы доказали, что у всякого замкнутого подпространства $L \in H$ имеется ортогональное дополнение M, причем для любого вектора $f \in H$ справедливо разложение

$$f=g+h, \qquad g \in L, \qquad h \in M.$$

Задача. Система элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ гильбертова пространства H называется *минимальной*, если при любом k вектор f_k не входит в замкнутое подпространство, порожденное остальными векторами; она называется *полной*, если замкнутое подпространство, порожденное всеми векторами $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, совпадает со всем пространством H.

Системы $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ и $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ называются *квадратически близкими*, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k-e_k|^2 < \infty.$$

Показать, что минимальная система $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, квадратически близкая к ортонормальной полной системе $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, полна (Н. К. Бари).

Указание. Обозначим через $L_k^r(g)$ замкнутое подпространство, порожденное векторами $g_k, \ldots, g_r$. Пусть $\sum_{N+1}^{\infty} |f_k-e_k| < 1$. Показать, что в $L_{N+1}^{\infty}(e)$ нет ни одного вектора, ортогонального всему $L_{N+1}^{\infty}(f)$. Отсюда вывести, что всякий вектор $x \in H$ может быть представлен в форме $y+z$, где $y \in L_1^N(e)$, $z \in L_{N+1}^{\infty}(f)$. Поэтому фактор-пространство $H/L_{N+1}^{\infty}(f)$ (см. гл. II, § 8, п. 4) имеет размерность не выше N. В то же время в нем имеются N линейно независимых векторов-образов $f_1, \ldots, f_N$; они, следовательно, образуют базис в $H/L_{N+1}^{\infty}(f)$.

Вектор z, ортогональный ко всем f_k $(k=1, 2, \ldots)$, имеет своим образом в $H/L_{N+1}^{\infty}(f)$ класс Z, ортогональный образам f_k $(k=1, 2, \ldots, N)$; поэтому $Z=0$, $z \in L_{N+1}^{\infty}(f)$; отсюда $z=0$.

9. Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве. Мы применим сейчас теорему об ортогональном дополнении к выводу общей формы линейного ограниченного функционала в полном гильбертовом пространстве.

Пусть x_0 — фиксированный вектор; положим для любого x

$$f(x) = (x, x_0). \tag{1}$$

Функционал $f(x)$, очевидно, — линейный функционал в H. Он ограничен на единичном шаре в силу неравенства Коши — Буняковского:

$$|f(x)| = |(x, x_0)| \leqslant |x| |x_0|.$$

Покажем, что *формула* (1) *дает общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве* H. Заметим, что линейный ограниченный функционал всегда непрерывен (гл. II, § 9).

Пусть $f(x)$ — ограниченный линейный функционал в полном гильбертовом пространстве H, отличный от тождественного нуля. Рассмотрим подпространство $H' \subset H$, определяемое уравнением $f(x) = 0$. Используя непрерывность функционала $f(x)$, легко проверить, что H' замкнуто. Пусть H'' — ортогональное дополнение подпространства H'. Покажем, что H'' *одномерно*. Пусть $z_1, z_2 \in H''$; тогда $y = f(z_1) z_2 - f(z_2) z_1$ также входит в H''; но, с другой стороны,

$$f(y) = f(z_1) f(z_2) - f(z_2) f(z_1) = 0;$$

откуда следует, что $y \in H'$. Но из $y \in H'$ и $y \in H''$ вытекает, что $(y, y) = 0$ и что, следовательно, $y = 0$. Так как $f(z_1) \neq 0$, $f(z_2) \neq 0$, то векторы z_1 и z_2 линейно зависимы. Следовательно, H'' не может иметь более одного измерения.

Пусть теперь $e \in H''$ — нормированный вектор. Всякий вектор $z \in H''$ представляется в виде λe; с другой стороны, как мы видели в п. 8, всякий вектор $x \in H$ разлагается в сумму $x = z + y$ $(z \in H'', y \in H')$. Так как $z = \lambda e$, то

$$x = \lambda e + y = (x, e) e + y.$$

Отсюда вытекает, что

$$f(x) = (x, e) f(e) + f(y) = (x, e) f(e) = (x, f(e) e) = (x, x_0),$$

где $x_0 = f(e)\, e$ — фиксированный вектор пространства H.

Итак, *любой ограниченный линейный функционал в полном гильбертовом пространстве H представляет собой скалярное произведение вектора x на фиксированный вектор x_0*. Вектор x_0 при этом определяется однозначно, ибо из тождества $(x, x_0) \equiv (x, x_1)$ вытекало бы, что $(x, x_0 - x_1) = 0$ для любого x; но тогда и $(x_0 - x_1, x_0 - x_1) = 0$, откуда $x_0 = x_1$.