§ 3. Линейные операторы

1. Определение и примеры. Пусть R — линейное пространство. Оператор A, определенный в пространстве R, есть функция, которая каждому элементу $x \in R$ ставит в соответствие элемент $y = Ax$ этого же пространства.

Оператор A называется линейным, если выполняются условия

(I) $A(x+y) = Ax + Ay$ для любых x и y из R;

(II) $A(\alpha x) = \alpha Ax$ для любого $x \in R$ и любого числа α.

Из формул (I) и (II) легко получается более общая формула

$$A(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 Ax_1 + \ldots + \alpha_k Ax_k \tag{1}$$

для любых $x_1, \ldots, x_k \in R$ и любых вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Примеры. *1.* Оператор, который каждому вектору пространства ставит в соответствие нуль-вектор, очевидно, является линейным. Он называется *нулевым оператором.*

2. Оператор E, ставящий в соответствие каждому вектору x сам вектор x, очевидно, линейный; он называется *единичным* или *тождественным оператором.*

3. Линейный оператор A, переводящий каждый вектор x в λx (λ — фиксированное число), называется *оператором подобия.*

4. Пусть H — счетномерное гильбертово пространство и $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — полная ортонормированная система в H. Фиксируем ограниченную последовательность вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, $|\lambda_n| \leqslant C$, и для любого вектора

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j \in H$$

положим по определению

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j e_j. \tag{2}$$

Так как $\sum \lambda_j^2 \xi_j^2 \leqslant C^2 \sum \xi_j^2 < \infty$, то оператор Ax определен формулой (2) во всем пространстве H. Легко проверить, что этот оператор удовлетворяет условиям (I), (II). Оператор A, построенный по указанному правилу, будем называть оператором *нормального вида.* Каждый базисный вектор e_n переводится оператором A в себя самого с коэффициентом λ_n:

$$Ae_n = \lambda_n e_n.$$

5. На отрезке $[a, b]$ фиксируем измеримую ограниченную функцию $\alpha(x)$. В пространстве $L_2(a, b)$ определен линейный оператор умножения на $\alpha(x)$:

$$A\varphi(x) = \alpha(x)\varphi(x).$$

6. Интегральный оператор Фредгольма. В области

$$G = [a \leqslant s \leqslant b,\ a \leqslant x \leqslant b]$$

фиксируем функцию $K(x, s)$, интегрируемую в квадрате по этой области:

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds = K^2 < \infty.$$

Определим в пространстве $L_2(a, b)$ оператор A по формуле

$$y(x) = A\varphi(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds. \tag{3}$$

Покажем, что формула (3) действительно определяет оператор в $L_2(a, b)$. В силу теоремы Фубини (гл. IV, § 5, п. 2) функция $K^2(x, s)$, поскольку она суммируема в области G, является суммируемой функцией от s почти при всяком x, и, значит, $K(x, s)$, как функция от s, принадлежит $L_2(a, b)$. Интеграл (3), представляющий собой скалярное произведение функций $K(x, s)$ и $\varphi(s)$, существует для любой функции $\varphi(x) \in L_2(a, b)$. По той же теореме Фубини суммируема по x функция

$$k^2(x) = \int_a^b K^2(x, s)\,ds,$$

причем

$$\int_a^b k^2(x)\,dx = \int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds = K^2,$$

так что $k(x) \in L_2(a, b)$. Оценивая теперь скалярное произведение (3) с помощью неравенства Коши — Буняковского, находим:

$$|y(x)|^2 \leqslant \int_a^b K^2(x,s)\,ds \int_a^b \varphi^2(s)\,ds = k^2(x)\,\|\varphi\|^2, \tag{4}$$

так что функция $y(x)$ принадлежит пространству $L_2(a, b)$, что и утверждалось.

Очевидно, что оператор Фредгольма (3) — линейный оператор (т. е. выполняются условия (I), (II)).

Задачи. 1. Показать, что условие ограниченности чисел λ_n нельзя ослабить при определении оператора A нормального вида (пример 4), если желают, чтобы оператор A был определен на всем пространстве. Иначе говоря, если при некоторой последовательности λ_n оператор A определен формулой (2) для любого вектора $x \in H$, то числа $|\lambda_n|$ ограничены в совокупности.

2. Условие ограниченности функции $\alpha(x)$ нельзя ослабить при определении оператора A в примере 5, если он должен быть определен на всем пространстве.

2. Действия с линейными операторами. Над линейными операторами, определенными в линейном пространстве R, можно производить различные действия, приводящие в результате к новым линейным операторам.

1) *Сложение операторов.* Если даны линейные операторы A и B, то оператор $C = A + B$ определяется формулой

$$Cx = (A + B)x = Ax + Bx.$$

2) *Умножение оператора на число.* Если A — линейный оператор, λ — вещественное число, то оператор $B = \lambda A$ определяется формулой

$$Bx = (\lambda A)x = \lambda(Ax).$$

3) *Умножение операторов.* Если A и B — линейные операторы, то оператор $C = AB$ определяется условием

$$Cx = ABx = A(Bx)$$

(т. е. сначала на вектор x действует оператор B, а затем на результат действует оператор A).

Легко проверить, что в результате всех этих действий получаются снова линейные операторы. Для указанных действий справедливы обычные алгебраические законы: коммутативность сложения, ассоциативность, дистрибутивность (за исключением коммутативности умножения операторов). Степени оператора A определяются естественными рекуррентными формулами

$$A^0 = E, \quad A^n = A \cdot A^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Оператор B называется обратным к оператору A, если выполняются равенства

$$AB = BA = E;$$

обратный оператор к оператору A обозначается через A^{-1}. Если операторы C и D обладают обратными C^{-1} и D^{-1}, то и CD обладает обратным $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$.

3. Норма линейного оператора. Будем предполагать, что линейный оператор A действует в линейном нормированном пространстве R.

Наличие метрики в пространстве R позволяет целесообразно сопоставить каждому линейному оператору A неотрицательное число $\|A\|$, называемое *нормой оператора* A. Именно, мы рассмотрим числовую функцию $F(x)=|Ax|$, определенную для векторов $x \in R$. Нормой оператора A называется точная верхняя грань (возможно, равная ∞) значений этой функции на единичных векторах x:

$$\|A\| = \sup |Ax|. \tag{1}$$

Оператор A с конечной нормой называется *ограниченным*.

В n-мерном евклидовом пространстве величина $\|A\|$ конечна для всякого линейного оператора A[1]). Действительно, длина вектора Ax, очевидно, есть непрерывная функция от координат $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ этого вектора; каждая же из этих координат есть линейная функция от координат $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ вектора x. В конечном счете $|Ax|$ есть непрерывная функция от координат $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ вектора x. Так как сфера $|x|=1$ является ограниченным и замкнутым множеством в n-мерном пространстве, то в силу результатов гл. II, § 7 непрерывная функция $|Ax|$ ограничена на этой сфере. Поскольку всякое ограниченное множество имеет точную верхнюю грань, число $\|A\|$ существует. Более того, на сфере $|x|=1$ имеется и точка x_0, в которой непрерывная функция $|Ax|$ достигает своей точной верхней грани.

Примеры. *1.* Норма нулевого оператора, очевидно, равна нулю. Обратно, если $\|A\|=0$, то это означает, что каждый нормированный вектор x_0 переводится оператором A в нуль; но так как каждый вектор x коллинеарен с некоторым нормированным вектором x_0, то $Ax=0$ для любого x. Следовательно, если $\|A\|=0$, то $A=0$.

2. Норма тождественного оператора E равна единице, так как $|Ex|=|x|$ для любого вектора x.

3. Норма оператора подобия $Ax=\lambda x$ равна $|\lambda|$.

4. Норма оператора нормального типа в гильбертовом пространстве (пример 4 п. 2)

$$Ax = A\left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \lambda_j e_j$$

равна точной верхней грани чисел $|\lambda_n|$. Действительно, если $C=\sup|\lambda_n|$ и $|x|^2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 = 1$, мы имеем

$$|Ax|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 \lambda_j^2 \leqslant C^2 \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 = C^2,$$

---

[1]) В бесконечномерном пространстве возможен случай $\|A\|=\infty$.

откуда $\|A\| \leqslant C$; с другой стороны, $\|A\| \geqslant \sup |Ae_n| = \sup |\lambda_n e_n| = \sup |\lambda_n| = C$; полученные неравенства и доказывают наше утверждение.

5. Норма оператора умножения на ограниченную функцию $g(x)$ в пространстве $L_2(a, b)$ (пример 5 п. 1) равна числу C, определяемому из условий

$$\mu\{x: |g(x)| > C\} = 0,$$
$$\mu\{x: |g(x)| > C - \varepsilon\} > 0 \text{ при любом } \varepsilon > 0.$$

(Для непрерывной функции число C равно $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |g(x)|$.) Доказательство предоставляется читателю.

6. Для нормы оператора Фредгольма (пример 6 п. 1) с квадратично интегрируемым ядром $K(x, s)$ можно дать оценку

$$\|A\|^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\, dx\, ds, \tag{2}$$

вытекающую из равенства (4) п. 1 после интегрирования по x.

Остановимся на двух простых свойствах операторов с конечной нормой.

1) *Для любого вектора $x \in R$ и любого линейного оператора A с конечной нормой $\|A\|$ имеет место неравенство*

$$|Ax| \leqslant \|A\| |x|. \tag{3}$$

Действительно, неравенство (3) справедливо для любого единичного вектора по самому определению нормы оператора A. Если же x — произвольный вектор, отличный от нуля (для нуль-вектора неравенство (3), очевидно, выполнено), то $\frac{x}{|x|}$ — единичный вектор и, следовательно,

$$\left| A \frac{x}{|x|} \right| \leqslant \|A\|. \tag{4}$$

Но, поскольку A — линейный оператор, имеем:

$$\left| A \frac{x}{|x|} \right| = \frac{1}{|x|} |Ax|;$$

умножая теперь неравенство (4) на $|x|$, мы и получаем требуемое неравенство (3).

2) Если A и B — операторы с конечной нормой, то

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|. \tag{5}$$

Действительно, если $|x| = 1$, то $|(A + B)x| = |Ax + Bx| \leqslant |Ax| + |Bx| \leqslant \|A\| + \|B\|$, чем доказано первое из неравенств (5). Далее,

$|ABx| = |A(Bx)| \leqslant \|A\| |Bx| \leqslant \|A\| \|B\|$, чем доказано и второе неравенство.

Задачи. 1. Если A — ограниченный линейный оператор с нормой M, то

$$\sup |(Ax, y)| = M \tag{6}$$

(верхняя грань по всем нормированным векторам x и y). Обратно, если билинейная форма (Ax, y) ограничена на единичном шаре, то оператор A ограничен и его норма не превосходит числа M в равенстве (6).

2. Если имеется ортонормальный базис $\{e_n\}$ в гильбертовом пространстве H, то всякий линейный оператор A может быть задан бесконечной матрицей $\| a_{jk} \|$, где

$$Ae_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} e_k.$$

Известно, что для некоторого M и любых $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n$

$$\left| \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_j \eta_k \right|^2 \leqslant M^2 \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2 \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2.$$

Доказать, что A — ограниченный оператор с нормой, не превосходящей M; обратно, если A — ограниченный оператор с нормой M, то выполнено предыдущее условие.

Указание. Левая часть есть значение билинейной формы (Ax, y) на некоторых векторах x и y.

3. (Продолжение.) Получить неравенства

$$\sup \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^2 \leqslant \|A\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^2. \tag{7}$$

Указание. Во-первых, $\|Ae_j\|^2 = \sum_k (Ae_j, e_k)^2 = \sum_k a_{jk}^2$. Во-вторых, если $x_0 = \xi_k e_k$ такой, что $|x| = 1$ и $|Ax_0| > \|A\| - \varepsilon$, то

$$\|A\| - \varepsilon < |Ax_0| = |\sum \xi_k A e_k| \leqslant \sqrt{\sum \xi_k^2} \cdot \sqrt{\sum_k |Ae_k|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_k \sum_j (Ae_k, e_j)^2} = \sqrt{\sum_k \sum_j a_{kj}^2}.$$

4. Оператор нормального вида обладает ограниченным обратным тогда и только тогда, когда соответствующие числа λ_n по модулю больше положительной постоянной.

5. Оператор нормального вида называется положительным, если все $\lambda_n > 0$. Показать, что для положительного оператора C нормального вида с ограниченным обратным при $0 < \alpha < \frac{2}{\|C\|}$ справедливо неравенство $\|E - \alpha C\| < 1$.

6. Показать, что всякий ограниченный билинейный функционал $A(x, y)$ в гильбертовом пространстве H может быть представлен в форме (Ax, y), где A — ограниченный линейный оператор.

Указание. Если фиксировать в функционале (Ax, y) первый аргумент x, то получится ограниченный линейный функционал от y, который по § 2, п. 9

представляется в форме (x', y). Проверить, что оператор $x' = Ax$ — ограниченный линейный оператор.

7. Оператор A^*, удовлетворяющий условию $(Ax, y) = (x, A^*y)$, называется сопряженным к оператору A. Показать, что у всякого линейного оператора A в гильбертовом пространстве имеется сопряженный.

Указание. Применить результат задачи 6 к билинейному функционалу $A(x, y) = (y, Ax)$.

8. Показать, что $\|A^*\| = \|A\|$.

Указание. Использовать задачу 1.

9. Если оператор A обладает ограниченным обратным B, то A^* обладает ограниченным обратным B^*.

10. Показать, что последняя двойная сумма в неравенстве (7) не зависит от выбора ортонормального базиса $\{e_n\}$.

Указание. Если $\{f_n\}$ — новый базис и $Af_k = \sum b_{jk} f_j$, то

$$\sum\sum a_{jk}^2 = \sum |Ae_j|^2 = \sum\sum (Ae_j, f_k) = \sum\sum (e_j, A^*f_k) =$$
$$= \sum |A^*f_k|^2 = \sum\sum b_{kj}^2.$$

4. Собственные векторы. Подпространство R' линейного пространства R называется *инвариантным относительно оператора* A, если из $x \in R'$ следует $Ax \in R'$.

В частности, тривиальные подпространства — нулевое и все пространство — являются инвариантными для всякого линейного оператора; нас будут интересовать, естественно, только нетривиальные инвариантные подпространства.

Особую роль играют одномерные инвариантные подпространства оператора A. Всякий (ненулевой) вектор, принадлежащий одномерному инвариантному подпространству оператора A, называется собственным вектором оператора A; иначе говоря, вектор $x \neq 0$ называется *собственным вектором* оператора A, если оператор A переводит вектор x в коллинеарный ему вектор:

$$Ax = \lambda x. \tag{1}$$

Число λ, фигурирующее в этом равенстве, называется *собственным значением (собственным числом) оператора A, соответствующим собственному вектору x.*

Рассмотрим с этой точки зрения примеры линейных операторов, указанные в п. 1.

1) Для операторов в примерах 1—3 каждое подпространство является инвариантным и каждый ненулевой вектор пространства есть собственный с собственными значениями соответственно 0, 1, λ.

2) Оператор нормального типа (пример 4) по самому определению имеет собственные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ с собственными значениями соответственно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$

3) Оператор умножения на $\alpha(x) \equiv x$ (пример 5) не имеет собственных векторов в пространстве $L_2(a, b)$, так как нет такой измеримой

функции $\varphi(x)$, которая удовлетворяла бы уравнению

$$x\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$$

и была бы отличной от нуля на множестве положительной меры.

4) Собственные векторы оператора Фредгольма (пример 6) суть решения интегрального уравнения

$$\int_a^b K(x, s)\ \varphi(s)\,ds = \lambda\varphi(x).$$

О существовании решений у этого уравнения мы будем говорить далее.

Совокупность *всех* собственных векторов оператора A с фиксированным собственным значением λ образует, очевидно, подпространство в пространстве R. Это подпространство называется *собственным подпространством, отвечающим собственному значению* λ.

5. Симметричные и вполне непрерывные операторы. Если известно, что некоторый линейный оператор A в гильбертовом пространстве есть оператор нормального типа, как в примере 4 п. 1, то изучение свойств этого оператора значительно облегчается. Базис из собственных векторов оператора A определяет естественную «систему координат», в которой удобно решать задачи, связанные с оператором A.

Необходимым условием приводимости оператора A к нормальному виду служит равенство

$$(Ax, y) = (x, Ay), \tag{1}$$

которое должно быть выполнено при любых x и y из пространства H. Действительно, если

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j; \qquad y = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j e_j, \qquad Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j e_j, \qquad Ay = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \eta_j e_j,$$

то, очевидно,

$$(Ax, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j \eta_j, \qquad (y, Ax) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \lambda_j \xi_j,$$

так что равенство (1) выполняется. Операторы, удовлетворяющие условию (1), будем называть *симметричными*.

Условие симметричности не является еще достаточным условием приводимости оператора A к нормальному виду. Например, оператор умножения на x в пространстве $L_2(a, b)$ симметричен:

$$(x\varphi, \psi) = \int_a^b x\varphi(x)\,\psi(x)\,dx = (\varphi, x\psi),$$

но этот оператор, как мы видели выше, не имеет собственных векторов и поэтому не приводится к нормальному виду. Мы наложим на оператор A, кроме требования симметричности, еще дополнительное условие, которое будем называть условием *полной непрерывности:*

Из каждой последовательности векторов Af_n, где числа $|f_n|$ ограничены, можно выбрать сходящуюся последовательность.

Операторы, обладающие этим свойством, будем называть *вполне непрерывными.*

Вполне непрерывный оператор является ограниченным (и, следовательно, непрерывным): если бы для некоторой последовательности f_n, $|f_n|=1$, мы имели $|Af_n|\to\infty$, например $|Af_n|>n$, то из последовательности Af_n нельзя было бы выбрать сходящейся последовательности в противоречие с предположением.

Задачи. **1.** Является ли единичный оператор E вполне непрерывным? *Отв.* Нет, если пространство H бесконечномерно.

2. A и B — вполне непрерывные операторы; доказать, что $A+B$ — вполне непрерывный оператор.

3. A — вполне непрерывный оператор B — ограниченный; доказать, что AB и BA вполне непрерывны.

4. Если A и A^* — сопряженные операторы, то $A+A^*$, AA^*, A^*A — симметричные операторы, и $\|AA^*\|=\|A^*A\|=\|A\|^2$.

5. Показать, что необходимое и достаточное условие полной непрерывности оператора нормального типа выражается равенством

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0.$$

Указание. Использовать задачу 3 § 1.

6. Мы переходим теперь к фундаментальной теореме о симметричных вполне непрерывных операторах.

Теорема 1 (Д. Гильберт). *В полном гильбертовом сепарабельном пространстве всякий симметричный вполне непрерывный оператор обладает полной ортогональной системой собственных векторов.*

Доказательство этой теоремы мы проведем в несколько этапов.

Лемма 1. *Если $|e|=1$ и A — симметричный оператор, то*

$$|Ae|^2\leqslant|A^2e|,$$

причем знак равенства возможен только в случае, когда e есть собственный вектор оператора A^2 с собственным значением

$$\lambda=|Ae|^2.$$

Доказательство. В силу симметрии оператора и неравенства Коши — Буняковского имеем:

$$|Ae|^2=(Ae,\ Ae)=(A^2e,\ e)\leqslant|A^2e||e|=|A^2e|. \qquad (1)$$

Неравенство Коши — Буняковского обращается в равенство, лишь если фигурирующие в нем векторы коллинеарны (§ 1, п. 3), поэтому в случае равенства имеем

$$A^2e = \lambda e,$$

т. е. e есть собственный вектор оператора A^2. Подставляя полученное выражение в (1), находим λ:

$$(A^2e, e) = (\lambda e, e) = \lambda = |Ae|^2,$$

что и требовалось.

Назовем *максимальным вектором* ограниченного оператора A такой единичный вектор e, $|e| = 1$, на котором величина $|Ae|$ достигает своего наибольшего значения $M = \|A\|$. Вообще говоря, не у всякого ограниченного оператора существует максимальный вектор. Но мы покажем дальше, что у симметричного вполне непрерывного оператора максимальный вектор всегда имеется:

Лемма 2. *Симметричный вполне непрерывный оператор обладает максимальным вектором.*

Доказательство. Выберем последовательность $y_n = Ax_n$, где $|x_n| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, так, чтобы иметь $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = M$. Из последовательности y_n можно, по условию, извлечь сходящуюся подпоследовательность; зачеркнув лишние векторы и исправив нумерацию, можно считать, что сама последовательность y_n сходится при $n \to \infty$; пусть $y = \lim y_n$. В силу непрерывности нормы $|y| = \lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = M$. Мы утверждаем, что вектор $z = \frac{1}{M} y$ является искомым максимальным вектором.

Прежде всего, в силу непрерывности оператора A имеем:

$$Az = \lim_{n\to\infty} A\left(\frac{y_n}{M}\right) = \lim_{n\to\infty} A\left(\frac{Ax_n}{M}\right).$$

Векторы $\frac{Ax_n}{M}$ принадлежат единичному шару, и поэтому векторы $A\left(\frac{Ax_n}{M}\right)$ по длине не превосходят M. Применяя лемму 1, получаем:

$$M > \left| A\left(\frac{Ax_n}{M}\right)\right| = \frac{1}{M}\left| A^2x_n \right| \geqslant \frac{1}{M}\left| Ax_n \right|^2 \to M,$$

откуда вытекает, что

$$|Az| = \lim \left| A\left(\frac{Ax_n}{M}\right)\right| = M,$$

т. е. z есть максимальный вектор оператора A, что и требовалось.

От максимальных векторов недалеко и до собственных векторов.

Лемма 3. *Если e_0 — максимальный вектор для симметричного оператора A, то e_0 является собственным вектором для оператора A^2 с собственным значением $\|A\|^2$.*

Доказательство. По лемме 1 и по определению нормы оператора имеем:

$$\|A\|^2 = |Ae_0|^2 \leqslant |A^2e_0| \leqslant \|A\|^2,$$

откуда

$$|Ae_0|^2 = |A^2e_0| = \|A\|^2.$$

В силу леммы 1 e_0 есть собственный вектор оператора A^2 с собственным значением

$$\lambda = |Ae_0|^2 = \|A\|^2,$$

что и требовалось.

Лемма 4. *Если оператор A^2 обладает собственным вектором с собственным значением M^2, то оператор A имеет собственный вектор с собственным значением M или $-M$.*

Доказательство. Равенство $A^2e_0 = M^2e_0$ можно записать в виде

$$(A - ME)(A + ME)e_0 = 0 \qquad (E \text{ — единичный оператор}).$$

Допустим, что $z_0 = (A + ME)e_0 \neq 0$. Тогда из условия

$$(A - ME)z_0 = 0$$

или, что то же,

$$Az_0 = Mz_0$$

вытекает, что z_0 есть собственный вектор оператора A с собственным значением $M = \|A\|$. Если же $(A + ME)e_0 = 0$, то

$$Ae_0 = -Me_0,$$

и получается, что уже e_0 есть собственный вектор оператора A с собственным значением $M = -\|A\|$. Лемма доказана.

Леммы 1—4 показывают, что *всякий симметричный вполне непрерывный оператор A обладает собственным вектором с собственным значением $\pm\|A\|$.*

Теперь мы будем доказывать, что из собственных векторов оператора A можно построить полную ортогональную систему в пространстве H. Предпошлем этому построению следующие леммы:

Лемма 5. *Собственные векторы симметричного оператора, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.*

Действительно, пусть имеют место равенства

$$Ax = \lambda x, \qquad Ay = \mu y$$

и $\lambda \neq \mu$. Умножим первое равенство скалярно на y, второе на x и вычтем второе из первого:

$$(Ax, y) - (x, Ay) = (\lambda - \mu)(x, y).$$

Левая часть этого равенства равна нулю вследствие симметрии оператора. Так как $\lambda \neq \mu$, то $(x, y) = 0$, что и требовалось.

Лемма 6. *У вполне непрерывного оператора A всякая ортогональная нормированная система собственных векторов с собственными значениями, превосходящими по модулю положительное число δ, конечна.*

Доказательство. Допустим, что нашлась бесконечная система S таких собственных векторов. Каждый из них оператором переводится в себя самого с числовым множителем, большим числа δ.

Пусть e_j и e_k — какие-нибудь два из этих собственных векторов:

$$|e_j| = |e_k| = 1, \quad (e_j, e_k) = 0, \quad Ae_j = \lambda_j e_j, \quad Ae_k = \lambda_k e_k.$$

Имеем:

$$|Ae_j - Ae_k|^2 = |\lambda_j e_j - \lambda_k e_k|^2 = \lambda_j^2 + \lambda_k^2 > 2\delta^2.$$

Это означает, что расстояния между векторами, полученными после воздействия оператора A на векторы системы S, заведомо будут превосходить $\delta\sqrt{2}$. Но из совокупности таких векторов нельзя выбрать никакой сходящейся последовательности, что противоречит полной непрерывности оператора A.

В частности, *существует только конечное число взаимно ортогональных векторов с данным собственным значением* $\lambda \neq 0$; иными словами, *каждое собственное подпространство, отвечающее ненулевому собственному значению вполне непрерывного симметричного оператора A, конечномерно.*

Эта лемма позволяет сделать определенные выводы относительно совокупности всех собственных векторов и собственных значений оператора A. Рассмотрим на вещественной оси множество всех собственных значений оператора A. В силу леммы 6 существует лишь конечное число собственных значений, превосходящих по абсолютной величине данное положительное число δ, поэтому, если собственных значений бесконечное множество, то они образуют последовательность, сходящуюся к нулю. Следовательно, мы можем занумеровать натуральными числами все собственные значения в порядке убывания абсолютной величины. Условимся, что при этом мы будем каждое собственное значение снабжать столькими последовательными номерами, какова размерность соответствующего собственного подпространства. В таком случае последовательности всех ненулевых собственных значений оператора

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

мы можем сопоставить последовательность собственных векторов

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots,$$

причем $Ae_n = \lambda_n e_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Можно считать, что векторы $e_1, e_2, \ldots$ взаимно ортогональны и нормированы. В самом деле, если $\lambda_n \neq \lambda_m$, то ортогональность e_n и e_m выполняется по лемме 5; если же $\lambda_n = \lambda_m$, то в пределах конечномерного собственного подпространства, отвечающего собственному значению $\lambda_n = \lambda_m$, мы всегда можем провести ортогонализацию. Нормировка всех полученных векторов завершает построение.

Покажем теперь, что *каждый вектор z, ортогональный всем построенным векторам $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, переводится оператором A в нуль.* Для этого используем следующую лемму:

Лемма 7. *Пусть H' — подпространство в гильбертовом пространстве H, инвариантное относительно симметричного оператора A. Тогда ортогональное дополнение H'' подпространства H' также инвариантно относительно оператора A.*

Доказательство. Пусть x — любой вектор подпространства H', y — любой вектор подпространства H''. По условию $(Ax, y) = 0$. Но в таком случае в силу симметрии оператора и $(x, Ay) = 0$. Это означает, что вектор Ay ортогонален любому вектору $x \in H'$ и, следовательно, $Ay \in H''$ для любого $y \in H''$, что и требовалось.

Теперь рассмотрим совокупность P всех векторов z, ортогональных всем построенным векторам $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Эта совокупность P является замкнутым подпространством, как ортогональное дополнение линейной оболочки $L(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots) = L$[1]). Поскольку линейная оболочка L, очевидно, инвариантна относительно оператора A, ее ортогональное дополнение P, по лемме 7, также инвариантно относительно оператора A. Обозначим через $M(P)$ точную верхнюю границу значений $|Ax|$ на единичной сфере подпространства P. В силу леммы 4 в подпространстве P имеется собственный вектор e_0 с собственным значением $\lambda_0 = M(P)$. Но по самому построению подпространства P оно не может содержать ни одного собственного вектора с ненулевым собственным значением. Отсюда $\lambda_0 = M(P) = 0$; но это означает, что $Az = 0$ для любого вектора $z \in P$, что мы и утверждаем.

Обозначим через L' замыкание линейной оболочки векторов $e_1, e_2, \ldots$; ортогональное дополнение этого замыкания есть также подпространство P. Каждый вектор $x \in H$ может быть представлен в виде суммы

$$x = x' + x'', \quad x' \in L', \ x'' \in P.$$

Вектор x' можно, далее, разложить в ряд Фурье по системе $e_1, e_2, \ldots$

---

[1]) Линейной оболочкой системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется подпространство, состоящее из всех линейных комбинаций этих векторов.

$\ldots, e_n, \ldots,$ полной в пространстве L'; вектор x'', по доказанному, оператором A переводится в нуль. Мы получили следующую основную теорему:

Теорема 2. *В полном гильбертовом пространстве H, в котором задан симметричный вполне непрерывный оператор A, каждый вектор x может быть представлен в виде ортогональной суммы*

$$x = x' + x'' = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j + x'',$$

где $e_1, e_2, \ldots$ — *собственные векторы оператора A с ненулевыми собственными значениями и $Ax'' = 0$.*

Из этой теоремы вытекает и теорема Гильберта. Действительно, в сепарабельном пространстве H подпространство P также сепарабельно, и в нем можно выбрать полную ортогональную систему $e_1', e_2', \ldots, e_n', \ldots$; вместе с уже построенными векторами $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots, e_n, \ldots$ получается полная ортогональная система во всем пространстве H. Каждый из векторов этой системы является собственным вектором оператора A: векторы e_n — с собственными значениями $\lambda_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а векторы e_n' — с собственным значением 0. Тем самым теорема Гильберта полностью доказана.

Замечание. Векторы из области значений оператора A, т. е. векторы вида

$$\psi = A\varphi,$$

называются *истокообразно представимыми*. Мы ниже (§ 5) поясним смысл этого названия.

Всякий истокообразно представимый вектор ψ допускает разложение по собственным векторам оператора A с ненулевыми собственными значениями.

Действительно, в силу теоремы Гильберта

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j + x'',$$

где $Ae_n = \lambda_n e_n$ $(\lambda_n \neq 0)$ и $Ax'' = 0$. Применяя к этому равенству оператор A, получаем:

$$\psi = A\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j e_j,$$

что и утверждалось.