§ 4. Интегральные операторы с квадратично интегрируемыми ядрами

1. Мы применим изложенную в § 3 теорию к интегральному оператору Фредгольма

$$A\varphi(x)=\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds$$

с квадратично интегрируемым ядром $K(x,\ s)$:

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,\ s)\,dx\,ds=K^2<\infty. \tag{1}$$

Оператор Фредгольма, как мы видели в п. 1 § 3, является ограниченным оператором в гильбертовом пространстве $H=L_2(a,\ b)$ и имеет норму, не превосходящую числа K.

Если ядро $K(x,\ s)$ симметрично, т. е. почти всюду в области $G=\{a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b\}$ имеем

$$K(x,\ s)=K(s,\ x),$$

то и оператор Фредгольма симметричен, т. е. $(A\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ A\psi)$ при любых φ и ψ из $L_2(a,\ b)$.

Действительно, по теореме Фубини

$$\begin{aligned}(A\varphi,\ \psi)&=\int_a^b\left\{\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds\right\}\psi(x)\,dx=\\&=\int_a^b\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,\psi(x)\,ds\,dx=\\&=\int_a^b\varphi(s)\left\{\int_a^b K(x,\ s)\,\psi(x)\,dx\right\}ds=\\&=\int_a^b\varphi(s)\left\{\int_a^b K(s,\ x)\,\psi(x)\,dx\right\}ds=(\varphi,\ A\psi).\end{aligned}$$

Существование двойного интеграла

$$\int_a^b\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,\psi(x)\,ds\,dx,$$

являющееся одним из условий применимости теоремы Фубини, следует из существования интегралов

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds$$

и

$$\int_a^b \int_a^b \varphi^2(x)\psi^2(s)\,dx\,ds = \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(s)\,ds.$$

Покажем теперь, что *оператор Фредгольма с квадратично интегрируемым ядром вполне непрерывен.* Напомним, что линейный оператор A по определению является вполне непрерывным, если из каждой последовательности Af_n, где $|f_n|$ ограничены, можно выбрать сходящуюся последовательность. Иначе говоря, оператор A вполне непрерывен, если он переводит любое ограниченное множество пространства H в компактное множество (гл. II, § 7). Пусть, например, A — ограниченный оператор, переводящий пространство H в конечномерное подпространство Q; мы утверждаем, что такой оператор A является вполне непрерывным. Действительно, векторы Af_n образуют ограниченное множество в конечномерном пространстве Q; а такое множество, согласно результатам гл. II, § 7, компактно, так что условие полной непрерывности оператора A выполнено.

Если функция $K(x, s)$ имеет вид

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(s),$$

где $\varphi_k(x)$, $\psi_k(s)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — функции с интегрируемым квадратом (такое ядро $K(x, s)$ называется *вырожденным*), то оператор $K(x, s)$ ограничен и

$$A\varphi(x) = \int_a^b \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\psi_k(s)\varphi(s)\,ds = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \int_a^b \psi_k(s)\varphi(s)\,ds \right\} \varphi_k(s),$$

т. е. оператор A переводит все пространство $L_2(a, b)$ в конечномерное подпространство, порожденное функциями $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$. Поэтому *оператор Фредгольма с вырожденным ядром является вполне непрерывным.*

Для перехода к общему случаю используем следующую лемму:

Лемма. *Пусть дана последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ линейных операторов в гильбертовом пространстве H, сходящаяся к оператору A в том смысле, что* $\|A - A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. *Если операторы A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ являются вполне непрерывными, то и предельный оператор A вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть вектор f пробегает ограниченное множество B, например шар радиуса r с центром в O; мы должны показать, что вектор Af при этом пробегает компактное множество. Достаточно установить, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{Af\}$ обладает компактной ε-сетью. Найдем в последовательности $A_n \to A$ оператор A_n так, чтобы иметь $\|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{r}$. Множество элементов $\{A_n f\}$ $(f \in B)$ по условию компактно, и для любого f мы имеем $|A_n f - Af| \leqslant \leqslant \|A_n - A\| |f| \leqslant \frac{\varepsilon}{r} r = \varepsilon$. Следовательно, множество $\{A_n f\}$ есть компактная ε-сеть для $\{Af\}$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $K(x, s)$ — произвольная функция, квадратично интегрируемая в области $G = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b\}$. Мы утверждаем, что эта функция может быть разложена [по метрике $L_2(G)$] в ряд вида

$$K(x, s) = \sum_{m,\ n=1}^{\infty} a_{mn} e_m(x) e_n(s). \tag{2}$$

В качестве функций $e_n(x)$ мы возьмем любую полную ортогональную систему в пространстве $L_2(a, b)$. В этом случае *произведения* $e_m(x) e_n(s)$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$ *образуют полную ортогональную систему в пространстве* $L_2(G)$. Ортогональность этой системы очевидна; проверим ее полноту. Если бы в пространстве $L_2(G)$ существовала функция $f(x, s)$, ортогональная всем произведениям $e_m(x) e_n(s)$, так что

$$\iint_G f(x, s) e_m(x) e_n(s)\, dx\, ds = 0 \quad (m, n = 1, 2, \ldots),$$

то при любом фиксированном n мы по теореме Фубини имели бы

$$\int_a^b e_m(x) \left\{ \int_a^b f(x, s) e_n(s)\, ds \right\} dx = 0.$$

Вследствие полноты системы $e_m(x)$ отсюда следовало бы, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ и почти при всех x

$$\int_a^b f(x, s) e_n(s)\, ds = 0.$$

Вследствие полноты системы $e_n(s)$ отсюда вытекало бы, что почти при всех x и s

$$f(x, s) = 0$$

и, следовательно, $f(x, s)$ есть нулевой элемент пространства $L_2(G)$.

Итак, функции $e_m(x) e_n(s)$ действительно образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_2(G)$. Но тогда каждый элемент пространства $L_2(G)$ в силу основной теоремы § 2 допускает разложение (1), что и утверждалось.

Вырожденные ядра, построенные по частным суммам $K_{pq}(x, s)$ ряда (2)

$$K_{pq}(x, s) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} a_{mn} e_m(x) e_n(s),$$

определяют последовательность вполне непрерывных операторов

$$A_{pq}\varphi(x) = \int_a^b K_{pq}(x, s)\varphi(s)\, ds.$$

Используя оценку нормы оператора Фредгольма (см. стр. 207), получаем неравенство

$$\| A - A_{pq} \|^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b [K(x, s) - K_{pq}(x, s)]^2\, dx\, ds,$$

из которого следует, что операторы A_{pq} при $p \to \infty$, $q \to \infty$ сходятся по норме к оператору A.

Применяя лемму 1, заключаем, что вместе с операторами A_{pq} оператор A также вполне непрерывен, что и утверждалось.

2. Итак, оператор Фредгольма с симметричным квадратично интегрируемым ядром $K(x, s)$ симметричен и вполне непрерывен. Поэтому можно применить теорему Гильберта из § 3; в силу этой теоремы *в пространстве $L_2(a, b)$ имеется полная ортонормальная система, состоящая из собственных функций оператора Фредгольма*. Покажем, что *квадраты собственных значений оператора Фредгольма образуют сходящийся ряд.*

Рассмотрим равенство, определяющее нормированные собственные функции оператора Фредгольма:

$$\int_a^b K(x, s) e_n(s)\, ds = \lambda_n e_n(x); \tag{1}$$

оно показывает, что величина $\lambda_n e_n(x)$ является коэффициентом Фурье функции $K(x, s)$ (при постоянном значении x). Отсюда, применяя неравенство Бесселя (4) из § 2, п. 4, находим:

$$\int_a^b K^2(x, s)\, ds \geqslant \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^2 e_n^2(x) \tag{2}$$

при каждом значении N. Интегрируя это неравенство по x, получаем:

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\, ds\, dx \geqslant \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^2$$

при любом натуральном N. Отсюда следует, что ряд из λ_n^2 сходится, что и требовалось.

3. Рассмотрим оператор Фредгольма с ядром, удовлетворяющим *условию Гильберта — Шмидта*:

$$\int_a^b K^2(x, s)\,ds \leqslant C. \tag{1}$$

При выполнении этого условия всякая функция $\varphi(x) \in L_2(a, b)$ переводится оператором A в ограниченную функцию, так как

$$|A\varphi(x)|^2 = \left[\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b K^2(x, s)\,ds \int_a^b \varphi^2(s)\,ds \leqslant C \int_a^b \varphi^2(s)\,ds. \tag{2}$$

В частности, *каждая собственная функция оператора A с ненулевым собственным значением ограничена.*

Функцию $g(x)$ вида

$$g(x) = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = A\varphi$$

с произвольной функцией $\varphi(x) \in L_2(a, b)$ мы будем называть (в соответствии с общим определением, данным в конце § 3) *истокообразно представимой через ядро $K(x, s)$.*

В конце § 3 было показано, что всякий истокообразно представимый вектор $\psi = A\varphi$ в случае симметричного оператора A допускает разложение по собственным векторам оператора A, именно

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (\varphi, e_j)\, e_j. \tag{3}$$

Покажем, что при выполнении условия (1) ряд (3) для любой истокообразно представимой функции сходится не только по норме, но и абсолютно и равномерно. Действительно, в силу неравенства Коши (см. стр. 184) для любых m и n

$$\left\{\sum_{j=n}^{n+m} |(f, e_j)\,\lambda_j e_j(x)|\right\}^2 \leqslant \sum_{j=n}^{n+m} (f, e_j)^2 \sum_{j=n}^{n+m} \lambda_j^2 e_j^2(x). \tag{4}$$

Так как в правой части неравенства (4) сумма $\lambda_n^2 e_n^2(x) + \ldots$ во всяком случае ограничена [в силу неравенства (2) п. 2], а сумма $(f, e_n)^2 + \ldots$ делается сколь угодно малой при достаточно большом n [в силу неравенства Бесселя (см. стр. 194)], то сумма и в левой части равенства (4) обладает этим последним свойством; следовательно, рассматриваемый ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно, что и требовалось.

Доказанное здесь свойство называют иногда теоремой Гильберта — Шмидта.

Замечание. Если ядро $K(x, s)$ в области $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$ непрерывно, то соответствующий оператор Фредгольма переводит всякую функцию $\varphi(x) \in L_2(a, b)$ в *непрерывную функцию*. Действительно, если положить

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds,$$

то для любых x' и x''

$$|\psi(x') - \psi(x'')|^2 \leqslant \left\{\int_a^b |K(x', s) - K(x'', s)|\,|\varphi(s)|\,ds\right\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b [K(x', s) - K(x'', s)]^2\,ds \int_a^b [\varphi(s)]^2\,ds,$$

откуда непосредственно вытекает непрерывность функции $\psi(x)$. Естественно, что в этом случае и все собственные функции с ненулевыми собственными значениями также непрерывны.

4. Вычисление собственных функций и собственных значений. Для практических применений полученные нами результаты требуют знания системы собственных функций соответствующего оператора Фредгольма.

Если ядро $K(x, s)$ оператора Фредгольма A вырождено, так что

$$K(x, s) = \sum_{j=1}^{m} p_j(x)\,q_j(s),$$

то, как мы уже видели, оператор A отображает все пространство L_2 на конечномерное подпространство, порожденное функциями $p_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Таким образом, собственные функции с ненулевыми собственными значениями следует искать только в этом подпространстве; они должны иметь вид

$$e(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j p_j(x). \tag{1}$$

Для определения коэффициентов c_j подставляем функцию (1) в уравнение, которым определяются собственные функции

$$\int_a^b K(x, s)\,e(s)\,ds = \lambda e(x).$$

Тогда получаем:

$$\lambda e(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda c_j p_j(x) = \int_a^b K(x, s) \sum_{j=1}^{m} c_j q_j(s)\, ds =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} p_i(x) c_j \int_a^b q_i(s) q_j(s)\, ds = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} c_j q_{ij} p_i(x),$$

где

$$q_{ij} = \int_a^b q_i(s) q_j(s)\, ds.$$

Следовательно,

$$\lambda c_j = \sum_{i=1}^{m} q_{ij} c_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Эта система уравнений позволяет обычным способом найти λ и константы c_j.

Особенно простой вид эта система получает тогда, когда $p_i(x) \equiv q_i(x)$ и $(p_i, q_j) = 0$ при $i \neq j$.

В этом случае величины q_{ij} равны нулю при $i \neq j$ и система (2) имеет очевидное решение: $c_j = 1$ для некоторого j, $c_i = 0$ при $i \neq j$, $\lambda = c_{jj}$. Собственная функция, отвечающая этому решению, в силу формулы (1) совпадает с функцией $p_j(x) = q_j(x)$. Таким образом, в данном случае собственными функциями являются сами функции $p_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, а собственными значениями — числа c_{jj}, т. е. квадраты норм этих функций.

Если ядро $K(x, s)$ оператора Фредгольма A не вырождено, то часто используют следующий приближенный метод вычисления собственных функций и собственных значений. Заменяют данное ядро $K(x, s)$ близким ему вырожденным $K_n(x, s)$ (например, частной суммой ряда Фурье) и находят описанным выше способом собственные функции и собственные значения соответствующего оператора A_n. Оказывается, что при некоторых предположениях гладкости ядра $K(x, s)$ полученные собственные функции и собственные значения оператора A_n стремятся соответственно к собственным функциям и собственным значениям оператора A. Не имея возможности останавливаться на этих вопросах, мы отсылаем читателя к специальной литературе [1]).

Задачи. 1. Каковы собственные функции интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(x, s) = \cos(x + s)$ в промежутках а) $[0, \pi]$, б) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?

Отв. а) $\cos x$, $\sin x$; б) $\cos x + \sin x$, $\cos x - \sin x$.

[1]) См. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, 1951, гл. 3, § 9; Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1949, гл. 2, § 4.

2. Показать, что квадратично суммируемая симметричная функция $K(x, s)$ разлагается в билинейный ряд, сходящийся по метрике $L_2(G)$:

$$K(x, s) = \sum \lambda_k \varphi_k(x) \varphi_k(s), \tag{1}$$

где $\varphi_k(x)$ — нормированные собственные функции и λ_k — соответствующие собственные значения интегрального оператора K с ядром $K(x, s)$.

Указание. Произведения $\varphi_k(x)\varphi_m(s)$ образуют полную ортогональную систему в $L_2(G)$.

3. Если квадратично суммируемая функция $K(x, s)$ разложена в ряд, сходящийся по метрике $L_2(G)$:

$$K(x, s) = \sum \mu_k u_k(x) u_k(s),$$

и функции $u_k(s)$ взаимно ортогональны (в $L_2(a, b)$) и нормированы, то $u_k(x)$ есть собственная функция интегрального оператора с ядром $K(x, s)$, а μ_k — соответствующее собственное значение.

4. Аналогом конечномерной квадратичной формы $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_j\xi_k$ является *интегральная квадратичная форма*

$$(K\varphi, \varphi) = \int_a^b \int_a^b K(x, s)\varphi(x)\varphi(s)\,dx\,ds. \tag{2}$$

Квадратичная форма (2) называется *положительно определенной*, если для любой ненулевой функции $\varphi \in L_2(a, b)$ мы имеем $(K\varphi, \varphi) > 0$. Показать, что все собственные значения оператора Фредгольма K, отвечающего данной положительно определенной квадратичной форме, положительны.

5. Если ядро $K(x, s)$ положительно определенной квадратичной формы (1) симметрично и непрерывно, то $K(s, s) \geqslant 0$.

Указание. Допустив, что $K(s_0, s_0) < 0$, построить функцию $\varphi_0(x)$, для которой имело бы место неравенство $(K\varphi_0, \varphi_0) < 0$.

6. Для непрерывного симметричного ядра $K(x, s)$, отвечающего положительно определенной форме $(K\varphi, \varphi)$, ряд (1) сходится абсолютно и равномерно (теорема Мерсера).

Указание. Применив результат задачи 5 к ядру $K(x, s) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\varphi_k(x)\varphi_k(s)$, получить сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\varphi_k^2(s)$; пользуясь неравенством Коши, вывести отсюда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\varphi_k(x)\varphi_k(s)$, равномерную по каждой координате при фиксированной другой. Отсюда и из результата задачи 3 вывести, что сумма этого ряда есть $K(x, s)$. Применяя к равенству $K(s, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\varphi_k^2(s)$ теорему Дини (гл. II, § 7, задача 4) и снова используя неравенство Коши, получить равномерную сходимость ряда (1) в области G.

7. Показать, что оператор A, заданный в ортонормальном базисе $\{e_j\}$ матрицей $\|a_{jk}\|$ по формулам

$$Ae_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}e_k,$$

вполне непрерывен, если $\sum\sum a_{jk}^2 < \infty$.

Указание. Представить оператор A в форме предела операторов, отображающих все пространство на конечномерные подпространства.

8. Если A — интегральный оператор в $L_2(a, b)$ с произвольным квадратично интегрируемым ядром и $\{e_k(x)\}$ — ортонормальная система в $L_2(a, b)$, то $\sum | Ae_k |^2 = \sum\sum (Ae_k, e_n)^2 < \infty$.

Указание. Использовать метод п. 2.

9. Если оператор A в $L_2(a, b)$ задан в ортонормальном базисе $\{e_n(x)\}$ матрицей $\| a_{jk} \|$ с $\sum\sum a_{jk}^2 < \infty$, то существует квадратично интегрируемое ядро $K(x, s)$ такое, что $A\varphi = \int K(x, s)\varphi(s)\,ds$.

Указание. Положить $K(x, s) = \sum\sum (Ae_j, e_k) e_j(x) e_k(s)$.

Примечание. Результаты задач 8 и 9 показывают, что среди всех вполне непрерывных операторов, действующих в пространстве $L_2(a, b)$, интегральные операторы Фредгольма выделяются тем условием, что у них сумма квадратов всех матричных элементов в любом ортонормальном базисе пространства $L_2(a, b)$ конечна.

§ 5. Задача Штурма — Лиувилля

1. Общая теорема об интегральном операторе с симметричным ядром имеет многие приложения в математической физике. Одним из важнейших приложений является *решение задачи Штурма — Лиувилля*.

Рассмотрим на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ дифференциальный оператор

$$S[u] = (p(x)u'(x))' - q(x)u(x) \tag{1}$$
$$(p(x) \in D_1(a, b),\ q(x) \in C(a, b)),$$

определенный для дважды дифференцируемых функций $u(x)$, подчиненных некоторым однородным граничным условиям, например $u(a) = u(b) = 0$.

Оператор S существенно отличается от операторов, которые мы рассматривали ранее; он не является ограниченным оператором, он определен не на всем пространстве $L_2(a, b)$. Тем не менее на своей области определения он симметричен, т. е. для любых двух дважды дифференцируемых функций u, v, удовлетворяющих предписанным граничным условиям, выполняется равенство

$$(Su, v) = (u, Sv). \tag{2}$$

Действительно,

$$\left.\begin{aligned} (Su, v) &= \int_a^b [(pu')' - qu]\, v\, dx = pu'v \Big|_a^b - \int_a^b (pu'v' + quv)\, dx, \\ (u, Sv) &= \int_a^b u\, [(pv')' - qv]\, dx = upv' \Big|_a^b - \int_a^b (pu'v' + quv)\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$