при граничных условиях: 1) $u(0)=u(\pi)=0$; 2) $u(0)=u'(\pi)=0$. Написать разложения этих функций в билинейные ряды (§ 4, задача 2).

Отв. $K_1(x, \xi)=\begin{cases} x(\pi-\xi) & \text{при } x\leqslant\xi, \\ (\pi-x)\xi & \text{при } x\geqslant\xi, \end{cases}$ $\quad K_2(x, s)=\min(x, s)$,

$$K_1(x, s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx \sin ns}{n^2},$$

$$K_2(x, s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

§ 6. Неоднородные интегральные уравнения с симметричными ядрами

1. В этом параграфе мы будем рассматривать уравнение

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $K(x, s)$ даны, а $\varphi(x)$ — искомая функция. Ядро $K(x, s)$ предполагается симметричным и квадратично интегрируемым.

В абстрактном пространстве аналогичное уравнение имеет вид

$$\varphi=f+A\varphi, \tag{2}$$

где A — симметричный вполне непрерывный оператор.

Допустим сначала, что решение φ уравнения (2) существует. Проектируя левую и правую части равенства (2) на ось, определяемую собственным вектором e_k (так, что $Ae_k=\lambda_k e_k$), получаем:

$$\begin{aligned}(\varphi, e_k)&=(f, e_k)+(A\varphi, e_k)=(f, e_k)+(\varphi, Ae_k)= \\ &=(f, e_k)+(\varphi, \lambda_k e_k)=(f, e_k)+\lambda_k(\varphi, e_k),\end{aligned} \tag{3}$$

откуда при $\lambda_k\neq 1$ находим:

$$(\varphi, e_k)=\frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k}. \tag{4}$$

Таким образом, если среди собственных значений оператора нет числа 1, все коэффициенты Фурье решения φ определены однозначно. Само решение в этом случае может быть лишь единственным, именно равным

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k}e_k. \tag{5}$$

Проверим, что ряд (5) действительно дает решение уравнения (2). Заметим сначала, что этот ряд сходится по норме, так как квадраты его коэффициентов, очевидно, образуют сходящийся числовой ряд[1]). Обозначим сумму ряда (5) через φ. Тогда

$$A\varphi=\sum(f,\ e_k)\frac{\lambda_k e_k}{1-\lambda_k}=-\sum(f,\ e_k)\,e_k+\sum\frac{(f,\ e_k)}{1-\lambda_k}e_k=\varphi-f,$$

так что вектор φ действительно удовлетворяет уравнению (2).

Рассмотрим теперь случай, когда среди собственных значений оператора A имеется число 1. Если $\lambda_k=1$ и $(f,\ e_k)\neq 0$, то равенство (3) ведет к противоречию и уравнение (2) не имеет решения. Если же при $\lambda_k=1$ мы имеем также $(f,\ e_k)=0$, то равенство (3) не ведет к противоречию, но и не накладывает никаких условий на неизвестный коэффициент $(\varphi,\ e_k)$.

Мы утверждаем, что ряд (5) и в этом случае дает решение уравнения (2), причем под величинами $\frac{(f,\ e_k)}{1-\lambda_k}$ при $\lambda_k=1$ можно понимать любые числа. Действительно, положим $\varphi=\varphi'+\varphi''$, где

$$\varphi'=\sum\frac{(f,\ e_k)}{1-\lambda_k}e_k \qquad (\lambda_k\neq 1),$$

$$\varphi''=\sum\xi_k e_k \qquad (\lambda_k=1).$$

По условию вектор f ортогонален векторам e_k при $\lambda_k=1$ и поэтому разлагается в ряд по векторам e_k первой группы. Применяя к подпространству, порожденному векторами e_k первой группы, доказанную выше теорему, получаем:

$$A\varphi'=\varphi'-f.$$

Далее, используя условия $\lambda_k=1$, находим:

$$A\varphi''=\sum\xi_k\lambda_k e_k=\sum\xi_k e_k=\varphi''.$$

Отсюда

$$A\varphi=A\varphi'+A\varphi''=\varphi'-f+\varphi''=\varphi-f,$$

что и требовалось.

Мы получили следующий результат:

Теорема. *Если среди чисел λ_k нет чисел, равных* 1, *то уравнение*

$$\varphi=f+A\varphi \tag{6}$$

имеет решение, и притом единственное, для любого f. Если среди чисел λ_k имеются равные 1, *то решение уравнения* (6) *существует*

---

[1]) Величины $\frac{1}{|1-\lambda_k|}$ в совокупности ограничены, так как $\lambda_k\to 0$ (§ 3).

только для векторов f, ортогональных соответствующему собственному подпространству оператора A; при этом решение определено с точностью до произвольного слагаемого из этого подпространства.

Задачи. **1.** Решить уравнения:

а) $$\varphi_1(x)=3\int_0^2 xs\varphi_1(s)\,ds+3x-2.$$

б) $$\varphi_2(x)=3\int_0^1 xs\varphi_2(s)\,ds+3x-2.$$

в) $$\varphi_3(x)=\int_0^1 (x+s)\,\varphi_3(s)\,ds+18x^2-9x-4.$$

г) $$\varphi_4(x)=\int_0^\pi \cos(x+s)\,\varphi_4(s)\,ds+1.$$

Отв. а) $\varphi_1(x)=\frac{9}{7}x-2$, б) $\varphi_2(x)=Cx-2$ (C произвольно),

в) $\varphi_3(x)=18x^2+12x+9$, г) $\varphi_4(x)=1-\dfrac{2\sin x}{1-\frac{\pi}{2}}$.

Указание. Использовать метод § 4, п. 4.

2. Интегральное уравнение, в которое неизвестная функция $\varphi(x)$ входит только под знаком интеграла

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds=f(x),$$

называют иногда *уравнением первого рода* (в отличие от уравнений второго рода, рассмотренных выше, где неизвестная функция фигурирует и отдельно). Показать, что уравнение первого рода (в случае квадратично интегрируемого симметричного ядра) разрешимо в пространстве $L_2(a, b)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^2}{\lambda_n^2}$, где c_n — коэффициенты разложения $f(x)$ по собственным функциям ядра $K(x, s)$, а λ_n — соответствующие собственные значения.

2. Уравнение вида (1) возникает, например, при решении задачи о вынужденных колебаниях неоднородной струны, закрепленной на концах, под действием периодической силы $g(x, t)=g(x)\cos\omega t$.

Эти колебания описываются уравнением

$$(p(x)\,u_x)_x=\mu(x)u_{tt}+g(x)\cos\omega t, \tag{1}$$

где $p(x)$, $\mu(x)$ — физические характеристики струны, $g(x)$ — внешняя сила в расчете на единицу длины струны.

Будем искать частное решение уравнения (1) в форме произведения

$$v(x, t) = \varphi(x) \cos \omega t, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — некоторая дважды дифференцируемая функция, равная нулю при $x = a$ и $x = b$. Подставляя (2) в (1), получаем для функции $\varphi(x)$ уравнение

$$(p\varphi')' + \omega^2 \mu\varphi = g(x). \tag{3}$$

Применяя к обеим частям уравнения оператор A, обратный оператору $S = (p\varphi')'$, получаем:

$$\varphi + \omega^2 A(\mu\varphi) = Ag.$$

Вспоминая, что A есть оператор Фредгольма с симметричным ядром $K(x, s)$, приходим к уравнению

$$\varphi(x) = f(x) - \omega^2 \int_a^b K(x, s)\, \mu(s)\, \varphi(s)\, ds, \tag{4}$$

где $f(x) = Ag(x) = \int_a^b K(x, s)\, g(s)\, ds$ есть известная функция. Если $\mu(s) \not\equiv 1$, то оператор Фредгольма в полученном уравнении (4) имеет несимметричное ядро. В этом случае заменой неизвестной функции $\varphi(x)\sqrt{\mu(x)} = \psi(x)$ уравнение приводится к уравнению с симметричным ядром $\omega^2 K(x, s)\sqrt{\mu(x)\mu(s)}$. Будем считать для простоты $\mu(s) \equiv 1$.

Условием разрешимости уравнения (4) при любой $f(x)$ является отсутствие у ядра $-\omega^2 K(x, s)$ собственного значения 1, или, что то же, отсутствие у ядра Штурма — Лиувилля S, обратного оператору A, собственного значения $\lambda = -\omega^2$. Заметим, что условием $\lambda_n = -\nu_n^2$ определялись частоты собственных колебаний струны (§ 5, п. 2). Таким образом, условием разрешимости уравнения (4) при любой функции $f(x)$ является несовпадение частоты ω ни с одной собственной частотой струны ν_n. Как говорят, внешняя сила не должна находиться в резонансе с собственными частотами струны.

Если же частота внешней силы ω совпадает с одной из собственных частот струны, то условием разрешимости задачи является ортогональность $f(x)$ соответствующей собственной функции $e_n(x)$, т. е. выполнение равенства $(f, e_k) = (Ag, e_k) = 0$. Так как оператор A симметричен, то это условие немедленно приводится к ортогональности функции $g(x)$ и собственной функции $e_k(x)$:

$$(Ag, e_k) = (g, Ae_k) = (g, \lambda_k e_k) = \lambda_k (g, e_k) = 0.$$

Полученное решение интегрального уравнения (4) позволяет построить по формуле (2) одно из частных решений уравнения (3). Любое решение уравнения (3) получается добавлением к найденному решению некоторого решения однородного уравнения

$$(pv_x)_x = \mu v_{tt}.$$

Пользуясь этими соображениями, можно решать для уравнения (1) и задачу с начальными условиями.