§ 7. Неоднородные интегральные уравнения с произвольными ядрами

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds=f(x), \tag{1_1}$$

где ядро $K(x, s)$ квадратично интегрируемо, но, вообще говоря, не симметрично. Функция $f(x)$ предполагается принадлежащей пространству $L_2(a, b)$, и в этом же пространстве разыскивается неизвестная функция $\varphi(x)$.

При $f(x)\equiv 0$ получается однородное уравнение, в котором мы обозначим неизвестную функцию через $\varphi_0(x)$:

$$\varphi_0(x)-\int_a^b K(x, s)\varphi_0(s)\,ds=0. \tag{1_2}$$

Оказывается естественным наряду с уравнениями (1_1), (1_2) рассматривать «союзные» уравнения с ядром $K(s, x)$, отличающимся от исходного ядра $K(x, s)$ транспозицией аргументов:

$$(\psi x)-\int_a^b K(s, x)\psi(s)\,ds=g(x), \tag{1_3}$$

$$\psi_0(x)-\int_a^b K(s, x)\psi_0(s)\,ds=0. \tag{1_4}$$

Следующая основная теорема устанавливает связь между решениями уравнений (1_1), (1_2), (1_3), (1_4).

Заметим сначала, что логически возможны только два случая:

а) *уравнение* (1_2) *имеет единственное решение* $\varphi_0(x)\equiv 0$;

б) *уравнение* (1_2) *имеет решение* $\varphi_0(x)\not\equiv 0$.

Теорема 1 (Э. Фредгольм, 1903). *В случае* а) *уравнение* (1_1) *имеет решение при всякой* $f(x)\in L_2$, *и притом единственное; уравнение* (1_4) *имеет единственное решение* $\psi_0(x)\equiv 0$; *уравнение* (1_3) *имеет единственное решение при всякой* $g(x)\in L_2$.

В случае б) *число линейно независимых решений уравнения* (1_2) *конечно; обозначим его через* ν. *Столько же линейно независимых решений имеет и уравнение* (1_4). *Уравнение* (1_1) *имеет решение тогда и только тогда, когда функция* $f(x)$ *ортогональна всем* ν *решениям уравнения* (1_4); *это решение определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, являющегося решением уравнения* (1_2); *среди всех решений уравнения* (1_1) *имеется одно и только одно, которое ортогонально всем решениям уравнения* (1_2). *Аналогичные утверждения справедливы для решений уравнения* (1_3).

2. Рассмотрим вначале аналог теоремы 1 для случая линейной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j = b_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{2_1}$$

Напишем соответствующую однородную систему

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j^0 = 0 \tag{2_2}$$

и союзные системы

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = c_i, \tag{2_3}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j^0 = 0, \tag{2_4}$$

матрица которых получается транспонированием матрицы систем (2_1) и (2_2). Выясним, как обстоит здесь дело с утверждениями, аналогичными утверждениям теоремы Фредгольма.

а) Предположим, что система (2_2) имеет только нулевое решение. Как известно из алгебры, это означает, что ранг матрицы $A = \| a_{ij} \|$ равен числу m, т. е. $\det A \neq 0$. Поэтому система (2_1) имеет решение при любых правых частях b_i. Система (2_4) имеет определитель $\det \|a_{ji}\| = \det \| a_{ij} \|$ и, следовательно, также отличный от нуля; поэтому система (2_3) обладает решением при любых правых частях c_i, и притом единственным; в частности, при $c_i = 0$ имеется лишь единственное решение $\eta_j^0 = \theta$. Таким образом, все утверждения, аналогичные утверждениям теоремы Фредгольма, в случае а) проверены.

б) Предположим, что система (2_2) имеет ненулевое решение ξ_j^0. Это означает, что ранг r матрицы A меньше числа m. Число ν линейно независимых решений системы (2_2) равно $m - r$. Поскольку при транспонировании матрицы ее ранг не меняется, то число линейно независимых решений системы (2_4) также равно $m - r = \nu$. Система (2_1) уже не при всяких правых частях b_i имеет решение. Чтобы выяснить, какие условия нужно наложить на b_i, чтобы система (2_1) имела решение, интерпретируем систему (2_1) геометрически, считая совокупность чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ вектором m-мерного евклидова пространства R_m. Существование решения системы (2_1) равносильно утверждению, что вектор $b = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m)$ входит в линейную оболочку L векторов $a_1 = (a_{11},\ a_{21},\ \ldots,\ a_{m1})$, $a_2 = (a_{12},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{m2})$, $\ldots$, $a_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{mm})$. Если Z является ортогональным дополнением этой оболочки, то сказанное выше можно выразить и так: система (2_1) имеет решение тогда и только тогда, когда вектор b ортогонален подпространству Z. Условие того, что некоторый вектор η^0

входит в подпространство Z, записывается в форме системы уравнений (2_4). Отсюда следует, что система (2_1) имеет решение тогда и только тогда, когда вектор b ортогонален любому решению системы (2_4). Далее, в рассматриваемом случае система (2_1) имеет целую совокупность решений, геометрический образ которой есть гиперплоскость, параллельная подпространству решений системы (2_2). Перпендикуляр, опущенный из начала координат на эту гиперплоскость, однозначно выделяет среди всех этих решений такое, которое ортогонально всем решениям системы (2_2). Тем самым мы проверили все утверждения, аналогичные утверждениям теоремы Фредгольма, и для случая б).

3. Переходя к интегральным уравнениям, рассмотрим вначале уравнения с вырожденным ядром:

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{m} p_k(x) q_k(s),$$

$$K(s, x) = \sum_{k=1}^{m} p_k(s) q_k(x).$$

Функции $p_k(x)$, равно как и $q_k(s)$, мы можем считать линейно независимыми. Уравнения (1_1) — (1_4) приобретают вид

$$\varphi(x) - \sum_{k=1}^{m} p_k(x) \int_a^b q_k(s) \varphi(s)\, ds = f(x), \tag{3_1}$$

$$\varphi_0(x) - \sum_{k=1}^{m} p_k(x) \int_a^b q_k(s) \varphi_0(s)\, ds = 0, \tag{3_2}$$

$$\psi(x) - \sum_{k=1}^{m} q_k(x) \int_a^b p_k(s) \psi(s)\, ds = g(x), \tag{3_3}$$

$$\psi_0(x) - \sum_{k=1}^{m} q_k(x) \int_a^b p_k(s) \psi_0(s)\, ds = 0. \tag{3_4}$$

Эти уравнения могут быть записаны в абстрактной форме:

$$\varphi - \sum p_k (q_k, \varphi) = f, \tag{4_1}$$

$$\varphi_0 - \sum p_k (q_k, \varphi_0) = 0, \tag{4_2}$$

$$\psi - \sum q_k (p_k, \psi) = g, \tag{4_3}$$

$$\psi_0 - \sum q_k (p_k, \psi_0) = 0, \tag{4_4}$$

где векторы φ, f, p_k, q_k, ... принадлежат некоторому евклидову пространству E.

Операторы, входящие в эти уравнения, принадлежат к типу *вырожденных операторов*; так называются операторы, задаваемые формулами вида

$$B\varphi = \sum_{k=1}^{m} p_k (q_k, \varphi).$$

Очевидно, что вырожденный оператор B отображает все пространство в конечномерное подпространство, порожденное векторами $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Из уравнения (4_1) ясно, что если его решение существует, то оно имеет вид

$$\varphi = f + \sum \xi_k p_k, \qquad (5_1)$$

где ξ_k — некоторые неизвестные коэффициенты. Аналогично решения остальных систем имеют вид

$$\varphi_0 = \sum \xi_k^0 p_k, \qquad (5_2)$$

$$\psi = g + \sum \eta_k q_k, \qquad (5_3)$$

$$\psi_0 = \sum \eta_k^0 q_k. \qquad (5_4)$$

Подставляя в (4_1) выражение (5_1), получаем, что числа ξ_k должны удовлетворять системе

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k p_k - \sum_{k=1}^{m} p_k (q_k, f) - \sum_{k=1}^{m} p_k \left(q_k, \sum_{i=1}^{m} \xi_i p_i \right) = 0$$

или (так как векторы p_k линейно независимы)

$$\xi_k - \sum_{i=1}^{m} \xi_i (p_i, q_k) = (f, q_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Обозначая $(p_i, q_k) = a_{ik}$ $(i \neq k)$, $1 - (p_i, q_i) = a_{ii}$, $(f, q_k) = b_k$, мы приводим эту систему к виду

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \xi_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (6_1)$$

Аналогично уравнения (4_2) — (4_4) приводятся соответственно к системам вида

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \xi_j^0 = 0, \qquad (6_2)$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} \eta_j = c_i \qquad (6_3)$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} \eta_j^0 = 0, \qquad (6_4)$$

где $c_i = (g, p_i)$. Если имеется решение у какой-либо из систем (6_1) — (6_4), то по соответствующей формуле из серии (5_1) — (5_4) можно будет построить и решение соответствующего уравнения из серии (4_1) — (4_4) или, что то же, соответствующего уравнения из серии (3_3) — (3_4).

Но для систем (6_1) — (6_6), как мы видели, справедливы все утверждения, аналогичные утверждениям теоремы Фредгольма. Поэтому они будут справедливы и для уравнений (3_1) — (3_4). Следует только проверить, что скалярное произведение, например, вектора f и решения ψ_0 уравнения (4_4) в смысле метрики абстрактного евклидова пространства E совпадает со скалярным произведением вектора b с координатами $b_k = (f, q_k)$ и вектора $\eta^0 = (\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \eta_m^0)$ конечномерного евклидова пространства R_m. Эта проверка проводится простой выкладкой:

$$(f, \psi_0) = \left(f, \sum_{k=1}^{m} \eta_k^0 q_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \eta_k^0 (f, q_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k \eta_k^0 = (b, \eta^0).$$

Таким образом, выполнение теоремы Фредгольма в случае вырожденного ядра $K(x, s)$ нами установлено.

4. Переходим к общему случаю. Пусть $K(x, s)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом в области $a \leqslant x, s \leqslant b$. Как было указано в § 4, интегральный оператор

$$A\varphi = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

может быть представлен как предел (по норме) интегральных операторов

$$A_n\varphi = \int_a^b K_n(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

с вырожденными ядрами $K_n(x, s)$. Очевидно, что одновременно с этим сопряженный интегральный оператор

$$A^*\psi = \int_a^b K(s, x)\,\psi(s)\,ds$$

представляется как предел интегральных операторов

$$A_n^*\psi = \int_a^b K_n(s, x)\,\psi(s)\,ds,$$

ядра которых также вырождены.

Сопряженный интегральный оператор A^* связан с оператором A равенством

$$(A^*p, q) = (p, Aq) \tag{7}$$

для любых векторов p, q. Для доказательства заметим, что

$$(A^*p, q) = \int_a^b \left\{ \int_a^b (K(s, x) p(s)\, ds \right\} q(x)\, dx,$$

$$(p, Aq) = \int_a^b p(x) \left\{ \int_a^b K(x, s)\, q(s)\, ds \right\} dx.$$

Первый из этих интегралов переходит во второй при перемене ролями переменных x и s и перестановке порядка интегрирования, что законно в общем случае в силу теоремы Фубини.

Уравнения (1_1)—(1_4) запишем в абстрактной форме, считая векторы $\varphi, f, \ldots$ элементами некоторого евклидова пространства E:

$$\varphi - A\varphi = f, \tag{8_1}$$

$$\varphi_0 - A\varphi_0 = 0, \tag{8_2}$$

$$\psi - A^*\psi = g, \tag{8_3}$$

$$\psi_0 - A^*\psi_0 = 0. \tag{8_4}$$

Решения уравнений типа (8_2) суть собственные векторы соответствующих операторов с собственным значением 1. Для краткости мы будем их называть просто собственными векторами. Операторы, отвечающие вырожденным ядрам $K_n(x, s)$ и $K_n(s, x)$, обозначим соответственно через A_n и $\overset{*}{A_n}$. Рассмотрим однородное уравнение

$$\varphi_n^0 - A_n\varphi_n^0 = 0. \tag{9_2}$$

Лемма 1. *Если уравнение* (9_2) *имеет при каждом n решение* $\varphi^0{}_n \neq 0$, *то и уравнение* (8_2) *имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Решение φ_n^0 уравнения (9_2) мы всегда можем считать нормированным, $\|\varphi_n^0\| = 1$. Так как оператор A вполне непрерывен, то последовательность $A\varphi_n^0$ содержит сходящуюся подпоследовательность; отбрасывая лишние номера и изменяя нумерацию, можно считать, что сходится сама последовательность $A\varphi_n^0$. Тогда $A_n\varphi_n^0$ также сходится, так как

$$A_n\varphi_n^0 = (A_n - A)\varphi_n^0 + A\varphi_n^0$$

и

$$\|(A_n - A)\varphi_n^0\| \leqslant \|A_n - A\|\ \|\varphi_n^0\| \to 0.$$

Вместе с $A_n\varphi_n^0$ сходится последовательность $\varphi_n^0 = A_n\varphi_n^0$; положим $\varphi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^0$. Вектор φ_0 вместе с φ_n^0 имеет норму 1 и

$$A\varphi_0 = \lim_{n\to\infty} A\varphi_n^0 = \lim_{n\to\infty} A_n\varphi_n^0 = \lim_{n\to\infty} \varphi_n^0 = \varphi_0;$$

таким образом, уравнение (8_2) действительно обладает ненулевым решением φ_0.

Лемма 2. *Если уравнение* (9_2) *имеет при каждом* n *некоторое число* k *линейно независимых решений* $\varphi_{1n}^0, \varphi_{2n}^0, \ldots, \varphi_{kn}^0$, *то и уравнение* (8_2) *имеет* k *линейно независимых решений* $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_k^0$.

Доказательство. Решения $\varphi_{1n}^0, \varphi_{2n}^0, \ldots, \varphi_{kn}^0$ уравнения (9_2) мы можем считать ортогональными и нормированными. Образуем последовательности

$$\begin{gathered}\varphi_{11}^0, \varphi_{12}^0, \ldots, \varphi_{1n}^0, \ldots,\\ \varphi_{21}^0, \varphi_{22}^0, \ldots, \varphi_{2n}^0, \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_{k1}^0, \varphi_{k2}^0, \ldots, \varphi_{kn}^0, \ldots\end{gathered}$$

Каждая из них, как было доказано в лемме 1, содержит сходящуюся подпоследовательность. Отбрасывая лишние номера и изменяя нумерацию, можно считать, что все эти последовательности сходятся и их пределы $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_k^0$ суть ненулевые решения уравнения (8_2). Кроме того, поскольку функции $\varphi_{1n}^0, \varphi_{2n}^0, \ldots, \varphi_{kn}^0$ при каждом n были ортогональны, то их пределы $\varphi_1^0, \varphi_2^0 \ldots, \varphi_k^0$ также ортогональны, а следовательно, и линейно независимы, что и требовалось доказать.

Совокупность всех решений уравнения (8_2) есть подпространство, которое мы обозначим через Φ_0. В силу леммы 6 § 3 подпространство Φ_0 конечномерно. Обозначим его размерность через ν.

Лемма 3. *Если вполне непрерывный оператор* A *может быть представлен как предел последовательности вырожденных операторов* A_n, *то он может быть представлен и как предел последовательности вырожденных операторов* $\tilde{A}_n$, *у каждого из которых пространство собственных векторов совпадает с подпространством* Φ_0.

Доказательство. Пусть $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_\nu^0$ — ортогональная нормированная система в подпространстве Φ_0. Обозначим

$$h_i^n = \varphi_i^0 - A_n\varphi_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Определим оператор $\tilde{A}_n$ формулой

$$\tilde{A}_n\varphi = A_n\varphi + \sum_{i=1}^{\nu} h_i^n(\varphi, \varphi_i^0).$$

Очевидно, что $\tilde{A}_n$ — вырожденный оператор вместе с оператором A_n. Ясно, что $\|\tilde{A}_n - A_n\| \to 0$, поскольку $h_i^n \to 0$; отсюда следует, что $\|\tilde{A}_n - A\| \to 0$. Покажем, что векторы φ_j^0 являются собственными векторами оператора $\tilde{A}_n$. Действительно,

$$\tilde{A}_n \varphi_j^0 = A_n \varphi_j^0 + \sum_{i=1}^{\nu} (\varphi_i^0 - A_n \varphi_i^0)(\varphi_j^0, \varphi_i^0) = \\ = A_n \varphi_j^0 + \varphi_j^0 - A_n \varphi_j^0 = \varphi_j^0,$$

что и требуется.

Операторы $\tilde{A}_n$ могут, вообще говоря, иметь и более чем ν линейно независимых собственных векторов, но мы утверждаем, что для бесконечного числа номеров этого быть не может. Действительно, в противном случае, рассматривая лишь те значения n, для которых операторы $\tilde{A}_n$ имеют по крайней мере $\nu + 1$ линейно независимых собственных векторов, и применяя лемму 2, мы получили бы, что и оператор A имеет по крайней мере $\nu + 1$ линейно независимых собственных векторов, что противоречит предположению.

Итак, мы получаем, что лишь конечное число операторов $\tilde{A}_n$ может иметь больше чем ν линейно независимых собственных векторов. Отбрасывая лишние номера и изменяя соответственно нумерацию, мы получаем последовательность операторов $\tilde{A}_n$, удовлетворяющую условиям леммы 3.

Теперь мы можем доказать, что *подпространство* Ψ_0 *решений уравнения* (8_4) *имеет ту же размерность, что и подпространство* Φ_0.

Рассмотрим последовательность вырожденных операторов $\tilde{A}_n$, указанную в лемме 3, и последовательность сопряженных операторов $\tilde{A}_n^*$. Так как для вырожденных операторов альтернатива Фредгольма верна, то каждый из операторов $\tilde{A}_n^*$ имеет пространство собственных векторов размерности ровно ν. Поскольку $\tilde{A}_n \to A$, мы имеем также $\tilde{A}_n^* \to A^*$. В силу леммы 2 существует система ν взаимно ортогональных и нормированных решений уравнения $A^*\psi_0 = \psi_0$. Более чем ν таких решений быть не может, так как, используя $\nu + 1$ таких решений и проводя рассуждения в обратном порядке от оператора A^* к оператору A, мы получили бы $\nu + 1$ линейно независимых решений у уравнения $A\varphi_0 = \varphi_0$, что по предположению исключено.

Итак, число линейно независимых решений у уравнений $A\varphi_0 = \varphi_0$ и $A^*\psi_0 = \psi_0$ всегда одинаково.

Теперь займемся вопросом о существовании решений у уравнения (8_1). Допустим, что вектор φ есть решение этого уравнения, и ψ_0 — решение уравнения (8_4). Умножая (8_1) на ψ_0 и используя (7), находим:

$$(\varphi, \psi_0) - (A\varphi, \psi_0) = (f, \psi_0).$$

Но, используя уравнение (8_4), мы имеем:

$$(\varphi, \psi_0) - (\varphi, A^*\psi_0) = (\varphi, \psi_0) - (\varphi, \psi_0) = 0,$$

так что для любого решения ψ_0 уравнения (8_4)

$$(f, \psi_0) = 0.$$

Таким образом, уравнение (8_1) может иметь решение только при условии, что вектор f ортогонален всем решениям уравнения (8_4). Покажем, что при выполнении этого условия решение уравнения (8_1) всегда существует.

Рассмотрим последовательность вырожденных операторов $\tilde{A}_n \to A$ с тем же подпространством Φ_0 собственных векторов, что и у оператора A, размерности ν. Существование такой последовательности операторов было установлено в лемме 3.

Каждый из операторов $\tilde{A}_n^*$ обладает тем же количеством ν ортогональных нормированных собственных векторов ψ_i^n, поскольку альтернатива справедлива для вырожденных операторов. В силу леммы 2 можно считать, что эти векторы стремятся при $n \to \infty$ соответственно к ортогональным и нормированным собственным векторам ψ_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ оператора A^*. Рассмотрим уравнение (8_1) с правой частью $f_n = f - \sum_{i=1}^{\nu} (f, \psi_i^n)\psi_i^n$. Вектор f_n ортогонален всем векторам ψ_i^n (f_n есть перпендикуляр, опущенный из конца вектора f на подпространство $L\{\psi_1^n, \psi_2^n, \ldots, \psi_\nu^n\}$), поэтому, применяя альтернативу для вырожденного оператора $\tilde{A}_n$, мы устанавливаем существование вектора φ_n, удовлетворяющего уравнению

$$\varphi_n - \tilde{A}_n \varphi_n = f_n.$$

Векторы f_n при $n \to \infty$ сходятся к вектору f, поскольку $\psi_i^n \to \psi_i$, $(f, \psi_i^0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Вектор φ_n можно выбрать так, чтобы он при любом n был ортогонален подпространству собственных векторов оператора $\tilde{A}_n$, т. е. подпространству Φ_0.

Покажем, что получающиеся таким образом векторы φ_n ограничены по норме. Допустим обратное: пусть нормы векторов φ_n не ограничены; тогда, отбрасывая излишние векторы, можно считать, что $\|\varphi_n\| \to \infty$. Полагая $\tilde{\varphi}_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$, мы получаем последовательность нормированных векторов, удовлетворяющих уравнению

$$\tilde{\varphi}_n - \tilde{A}_n \tilde{\varphi}_n = \frac{f}{\|\varphi_n\|}. \tag{10}$$

Правая часть этого равенства стремится при $n \to \infty$ к нулю. Последовательность векторов $\tilde{A}_n \tilde{\varphi}_n$ по тем же соображениям, что и выше, можно считать сходящейся; вместе с ней будет сходящейся и последовательность векторов $\tilde{\varphi}_n$. Пусть $\varphi_0 = \lim \tilde{\varphi}_n$; так как $\|\tilde{\varphi}_n\| = 1$, то и

$\|\varphi_0\|=1$. Переходя к пределу в уравнении (10), получаем, что вектор φ_0 удовлетворяет уравнению

$$\varphi_0 - A\varphi_0 = 0,$$

откуда следует, что вектор φ_0 входит в подпространство Φ_0. С другой стороны, поскольку все векторы $\tilde{\varphi}_n$ были ортогональны подпространству Φ_0, предельный вектор φ_0 также ортогонален Φ_0. Полученное противоречие показывает, что векторы φ_n в действительности ограничены по норме.

Так как φ_n ограничены, то последовательность $A\varphi_n$, как и раньше, можно считать сходящейся; вместе с ней будет сходящейся и последовательность $\tilde{A}_n\varphi_n = (\tilde{A}_n - A)\varphi_n + A\varphi_n$, а также и последовательность $\varphi_n = f_n + \tilde{A}_n\varphi_n$. Обозначим предел последовательности φ_n через φ; переходя к пределу в равенстве

$$\varphi_n = f_n + (\tilde{A}_n - A_n)\varphi_n + A\varphi_n,$$

получаем:

$$\varphi = f + A\varphi,$$

т. е. вектор φ есть решение уравнения (8_1).

Итак, *если правая часть f уравнения (8_1) ортогональна любому решению уравнения (8_4), то уравнение (8_1) заведомо разрешимо.* Решение φ при этом определяется с точностью до любого решения φ_0 однородного уравнения (8_2), и, поскольку совокупность всех решений (8_2) имеет конечное число измерений, оно может быть выбрано ортогональным ко всей этой совокупности; такой выбор выделяет уже единственное решени· уравнения (8_1).

Мы проверили все утверждения теоремы в случае б).

В случае а) уравнение (8_2) не имеет ненулевых решений, подпространство Φ_0 содержит только нуль-вектор. По доказанному подпространство Ψ_0 решений уравнения (8_4) в этом случае также содержит только нуль-вектор. Уравнение (8_1), как мы установили, имеет решение для любого f, ортогонального подпространству Ψ_0; в данном случае этому условию удовлетворяет любой вектор f и, следовательно, уравнение (8_1) имеет решение для любого вектора f. Это решение единственно; действительно, разность любых двух решений уравнения (8_1) есть решение уравнения (8_2) и, следовательно, по предположению равно нулю.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Заметим, что если ядро $K(x, s)$ непрерывно и свободный член $f(x)$ также непрерывен, то, как вытекает из заключительного замечания к п. 3 § 4, решение интегрального уравнения (1) есть непрерывная функция.

Приведем важное следствие из теоремы Фредгольма:

Альтернатива Фредгольма. *В условиях п.* 1 *возможно одно из двух: или полное интегральное уравнение* (1_1) *имеет решение при любой правой части* $f(x) \in L_2(a, b)$, *или однородное уравнение* (1_2) *имеет ненулевое решение.*

Задачи. **1.** Если A — оператор в гильбертовом пространстве H, отображающий пространство H на конечномерное подпространство L, то A^* отображает H также на конечномерное подпространство той же размерности, что и L.

Указание. Ортогональное дополнение к L оператором A^* переводится в нуль. Поэтому $A^*H = A^*L$ и имеет размерность не выше размерности L. Из симметрии построения следует, что размерность уменьшиться не может.

2. Доказать, что для любого вполне непрерывного оператора A в гильбертовом пространстве H можно найти ортогональное разложение $H = H_1 + H_2$ так, что H_1 конечно- или счетномерно, $AH_1 \subset H_1$, $AH_2 = 0$.

Указание. Показать, что в замыкании подпространства AH не может быть несчетного множества ортогональных векторов.

3. Доказать, что всякий вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H есть предел (по норме) вырожденных операторов.

Указание. В силу задачи 2, можно считать, что $H = l_2$. Если $Ax = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in l_2$, положить $A_n x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, \ldots)$. Использовать задачу 3 к § 1, п. 1.

4. Доказать, что сопряженный оператор к вполне непрерывному также является вполне непрерывным оператором.

Указание. Использовать задачи 1 и 3.

5. Показать, что теорема Фредгольма остается справедливой, если фигурирующий в ней интегральный оператор Фредгольма заменить на любой вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве.

Указание. Использовать задачи 1 — 4.

§ 8. Приложения к теории потенциала

1. Мы будем предполагать известными следующие факты из теории дифференциальных уравнений[1]:

а) Функция $u(x, y)$, удовлетворяющая в области G на плоскости (x, y) уравнению

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

называется гармонической функцией. Примером служит функция

$$\ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}; \tag{2}$$

зависящая от параметров ξ, η и гармоническая всюду, где подкоренное выражение отлично от нуля (т. е. всюду, кроме точки $x = \xi$, $y = \eta$). Полагая $(x, y) = P$, $(\xi, \eta) = Q$, будем функцию (1) обозначать короче:

$$\ln \frac{1}{r(P, Q)}. \tag{3}$$

[1]) См., например, И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, 1953, гл. 3.