Приведем важное следствие из теоремы Фредгольма:

Альтернатива Фредгольма. *В условиях п. 1 возможно одно из двух: или полное интегральное уравнение* (1_1) *имеет решение при любой правой части* $f(x)\in L_2(a, b)$, *или однородное уравнение* (1_2) *имеет ненулевое решение.*

Задачи. 1. Если A — оператор в гильбертовом пространстве H, отображающий пространство H на конечномерное подпространство L, то A^* отображает H также на конечномерное подпространство той же размерности, что и L.

Указание. Ортогональное дополнение к L оператором A^* переводится в нуль. Поэтому $A^*H=A^*L$ и имеет размерность не выше размерности L. Из симметрии построения следует, что размерность уменьшиться не может.

2. Доказать, что для любого вполне непрерывного оператора A в гильбертовом пространстве H можно найти ортогональное разложение $H=H_1+H_2$ так, что H_1 конечно- или счетномерно, $AH_1\subset H_1$, $AH_2=0$.

Указание. Показать, что в замыкании подпространства AH не может быть несчетного множества ортогональных векторов.

3. Доказать, что всякий вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H есть предел (по норме) вырожденных операторов.

Указание. В силу задачи 2, можно считать, что $H=l_2$. Если $Ax=(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)\in l_2$, положить $A_nx=(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, \ldots)$. Использовать задачу 3 к § 1, п. 1.

4. Доказать, что сопряженный оператор к вполне непрерывному также является вполне непрерывным оператором.

Указание. Использовать задачи 1 и 3.

5. Показать, что теорема Фредгольма остается справедливой, если фигурирующий в ней интегральный оператор Фредгольма заменить на любой вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве.

Указание. Использовать задачи 1 — 4.

§ 8. Приложения к теории потенциала

1. Мы будем предполагать известными следующие факты из теории дифференциальных уравнений[1]):

а) Функция $u(x, y)$, удовлетворяющая в области G на плоскости (x, y) уравнению

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

называется гармонической функцией. Примером служит функция

$$\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}; \tag{2}$$

зависящая от параметров ξ, η и гармоническая всюду, где подкоренное выражение отлично от нуля (т. е. всюду, кроме точки $x=\xi$, $y=\eta$). Полагая $(x, y)=P$, $(\xi, \eta)=Q$, будем функцию (1) обозначать короче:

$$\ln\frac{1}{r(P, Q)}. \tag{3}$$

[1]) См., например, И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, 1953, гл. 3.

Частные производные функции (1) также являются гармоническими функциями при $P \neq Q$.

б) Пусть C — некоторый простой замкнутый гладкий контур, разделяющий плоскость на две области: внутреннюю G_i и внешнюю G_e. Рассмотрим функцию v, непрерывную и дифференцируемую в области G_i и в области G_e (возможно, терпящую разрыв при переходе через точки контура C). Через v_i обозначаются предельные значения функции v при подходе к контуру C изнутри и через v_e — ее предельные значения при подходе к контуру C извне. Аналогичный смысл имеют нормальные производные $\frac{\partial v_i}{\partial n}$ и $\frac{\partial v_e}{\partial n}$ (считается, что нормаль имеет положительное направление во внешнюю сторону).

Если v — гармоническая функция, то из $v_i \equiv 0$ следует $v(P) \equiv 0$ в G_i и из $\frac{\partial v_i}{\partial n} \equiv 0$ следует $v(P) \equiv \text{const}$ в G_i; если, кроме того, v ограничена при $P \to \infty$, то из $v_e \equiv 0$ следует $v(P) \equiv 0$ в G_e и из $\frac{\partial v_e}{\partial n} \equiv 0$ следует $v(P) \equiv \text{const}$ в G_e.

в) В дальнейшем точка Q всегда будет находиться на контуре C. Обозначим через $l = l_Q$ координату точки контура, например дугу, отсчитываемую от фиксированной начальной точки Q_0 до точки Q, и через ω — угол луча PQ с лучом PQ_0. Пусть задана непрерывная функция $\rho(l)$. Тогда функция

$$v(P) = \int_C \rho(l) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl \tag{4}$$

[потенциал двойного слоя с плотностью $\rho(l)$] есть функция, гармоническая в обеих областях G_i и G_e.

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} = -\frac{1}{r(P, Q)} \frac{\partial r(P, Q)}{\partial n_Q} = -\frac{1}{r(P, Q)} \cos(\widehat{\overline{PQ}, \overline{n}}) \tag{4'}$$

и в то же время

$$dl_Q = r(P, Q)\, d\omega \frac{1}{\cos(\overline{PQ}, \overline{n})},$$

мы получаем новое выражение потенциала в форме

$$v(P) = -\int_C \rho(l)\, d\omega. \tag{4''}$$

Мы видим, в частности, что интеграл (4) существует и в точках P на самом контуре C. Если $\rho(l) \equiv 1$, то функция $v(P)$ приобретает простой геометрический смысл: она дает полное приращение угла, описываемого лучом PQ, когда Q пробегает в отрицательном направлении контур C и, следовательно,

$$\int_C \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl = -2\pi, \quad \text{если } P \in G_i, \tag{5}$$

$$\int_C \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl = -\pi, \quad \text{если } P \in C, \tag{6}$$

$$\int_C \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl = 0, \quad \text{если } P \in G_e. \tag{7}$$

Таким образом, функция $v(P)$ имеет в данном случае в области G_i значения на π меньшие, чем на границе, а в области G_e — на π большие, чем на границе. В общем случае при произвольной непрерывной плотности $\rho(Q)$ имеют место формулы

$$v_i(Q)=v(Q)-\pi\rho(Q), \tag{8}$$

$$v_e(Q)=v(Q)+\pi\rho(Q), \tag{9}$$

$$\frac{\partial v_i(Q)}{\partial n}=\frac{\partial v_e(Q)}{\partial n}. \tag{10}$$

Функция

$$u(P)=\int\limits_C \rho(l)\ln\frac{1}{r(P,Q)}\,dl \tag{11}$$

[потенциал простого слоя с плотностью $\rho(l)$] также гармоническая в обеих областях G_i и G_e, и имеют место формулы

$$u_i(Q)=u_e(Q)=u(Q), \tag{12}$$

$$\frac{\partial u_i(P)}{\partial n}=\int\limits_C \rho(l)\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r(P,Q)}\,dl+\pi\rho(P) \qquad (P\in C), \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_e(P)}{\partial n}=\int\limits_C \rho(l)\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r(P,Q)}\,dl-\pi\rho(P) \qquad (P\in C). \tag{14}$$

Заметим, что потенциалы $v(P)$ и $u(P)$, обладая вблизи границы непрерывной ($v(P)$) или кусочно-непрерывной ($u(P)$) нормальной производной, могут не обладать сколько-нибудь хорошими (даже, например, квадратично интегрируемыми) производными по другим направлениям.

2. Ставятся следующие задачи:

1) Первая краевая задача (задача Дирихле): найти функцию $v(P)$, гармоническую в области G_i (внутренняя задача) или в G_e (внешняя задача) и имеющую предписанные заранее предельные значения $f(Q)$ на контуре C.

2) Вторая краевая задача (задача Неймана): найти функцию $u(P)$, гармоническую в области G_i (внутренняя задача) или в G_e (внешняя задача), нормальная производная которой имеет предписанные заранее предельные значения $g(Q)$ на контуре C.

Последние утверждения п. 6) можно истолковать как теоремы единственности для решений этих задач. Именно, *внутренняя задача Дирихле может иметь лишь единственное решение, внутренняя задача Неймана — единственное решение с точностью до аддитивной постоянной; внешняя задача Дирихле может иметь лишь единственное решение в классе ограниченных функций, внешняя задача Неймана — в том же классе единственное решение с точностью до аддитивной постоянной.*

Далее приводится решение всех этих задач, предложенное Фредгольмом, для случая контура C, имеющего непрерывную кривизну.

3. Решение внутренней задачи Дирихле ищется в форме потенциала двойного слоя

$$v(P)=\int\limits_C \rho(l)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r(P,Q)}\,dl \tag{15}$$

с неизвестной непрерывной функцией $\rho(l)$. В силу равенства (8) и условия задачи (координата точки P на контуре C обозначена через x)

$$v_i(P) \equiv v_i(x) = \int\limits_C \rho(l) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl - \pi\rho(x) = f(x),$$

так что функция $\rho(x)$ должна быть определена из интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с ядром

$$K(x, l) = \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)} = -\frac{d\omega}{\partial l}.$$

Эта функция непрерывна при всех P и Q на контуре C; из (4″) следует, что при $P \longrightarrow Q$ она имеет своим пределом величину кривизны контура C в точке Q с обратным знаком.

В силу альтернативы Фредгольма, установленной в § 7, достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение

$$\int\limits_C \rho(l) K(x, l)\, dl - \pi\rho(x) = 0$$

имеет только нулевое решение. Допустим обратное: пусть $\rho_0(l)$ — ненулевое решение этого однородного уравнения. Тогда для гармонической функции

$$v_0(P) = \int\limits_C K(x, l)\, \rho_0(l)\, dl = -\int\limits_C \rho_0(l)\, d\omega$$

получаем

$$v_{i0}(P) = v_0(P) - \pi\rho_0(P) \equiv 0,$$

откуда в силу замечания в) $v_0(P) \equiv 0$ в области G_i. Но тогда и $\frac{\partial v_{i0}(P)}{\partial n} \equiv 0$. В силу (10) также $\frac{\partial v_{e0}(P)}{\partial n} = 0$. Так как функция $v_0(P)$, очевидно, при P, стремящемся к бесконечности, стремится к нулю, то в силу замечания б) мы получаем, что $v_0(P) \equiv 0$ в G_e. Отсюда $v_{e0}(P) = 0$. Из формул (8) и (9) мы теперь получаем, что и $\rho_0(P) = 0$, что и требовалось.

Применяя результаты § 7, получаем, что интегральное уравнение (15) имеет решение при всякой функции $f(P)$. Если $f(P)$ — непрерывная функция, то в силу непрерывности ядра $K(x, s)$ и заключительного замечания к п. 3 § 4 решение $\rho(P)$ будет также непрерывной функцией. Следовательно, для этого решения $\rho(P)$ формулы (8) — (10) будут справедливы, а вместе с ними будет законно и сведение задачи Дирихле к потенциалу (15).

Итак, *внутренняя задача Дирихле имеет решение при любых непрерывных граничных значениях* $f(P)$.

Решение внешней задачи Дирихле ищется в той же форме (15). Здесь мы получаем уравнение

$$v_e(P) = \int\limits_C \rho(l) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)}\, dl + \pi\rho(P) = f(P). \tag{16}$$

Но на этот раз соответствующее однородное уравнение

$$\int \rho(l) K(x, l)\, dl + \pi\rho(x) = 0$$

уже имеет ненулевое решение $\rho(x) \equiv 1$ (см. формулу (6)). Это решение единственное (с точностью до числового множителя). Действительно, проводя рассуждения по вышеописанной схеме, заменяя при этом всюду индекс i на e и e на i, мы доходим до утверждения $\frac{\partial v_i(P)}{\partial n} = 0$, откуда в силу б) мы получаем $v(P) = \text{const}$ в G_i. Из формул (8) и (9) получаем, что и $\rho(P) = \text{const}$.

Поэтому в силу альтернативы Фредгольма уравнение (16) имеет решение не для всех f, а только для тех, которые ортогональны некоторой фиксированной функции $\rho_0(P)$ — единственному с точностью до множителя решению сопряженного уравнения.

Но мы можем добиться возможности решения задачи и при любой граничной функции f, если, кроме решений, определяемых формулой (15) и стремящихся, как мы видели, на бесконечности к нулю, будем рассматривать и такие, которые получаются из этих решений добавлением постоянной. В самом деле, если f — любая функция, заданная на границе, то всегда можно найти постоянную c так, чтобы разность $f - c$ была ортогональна функции ρ_0. Тогда по доказанному существует решение $v(P)$ внешней задачи с граничными значениями $f - c$. С другой стороны, $v_0(P) \equiv c$ есть решение внешней задачи с граничными значениями, равными c. Отсюда следует, что $v(P) + v_0(P)$ есть решение внешней задачи Дирихле с граничными значениями f. Таким образом, *внешняя задача Дирихле разрешима при любой непрерывной граничной функции* f.

4. Решение внутренней задачи Неймана ищется в форме потенциала простого слоя

$$u(P) = \int_C \rho(l) \ln \frac{1}{r(P, Q)} \, dl \tag{17}$$

с неизвестной функцией $\rho(l)$. В силу равенства (13) и условия задачи

$$\frac{\partial u_i(P)}{\partial n} = \int \rho(l) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r(P, Q)} \, dl + \pi\rho(P) = g(P), \tag{18}$$

так что для функции $\rho(P)$ снова получается интегральное уравнение Фредгольма с ядром

$$K_1(x, l) = \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r(P, Q)},$$

транспонированным относительно ядра $K(x, l)$, фигурировавшего в задаче Дирихле. По доказанному однородное сопряженное уравнение

$$\int \rho(l) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r(P, Q)} \, dl + \pi\rho(x) = 0$$

имеет только постоянное решение. В силу альтернативы Фредгольма уравнение (18) имеет решение тогда и только тогда, когда функция $\rho(x)$ ортогональна 1, т. е.

$$\int_C \rho(l) \, dl = 0. \tag{19}$$

Но известно, что для любой гармонической функции $u(P)$ в области G_i — имеет она вид (11) или не имеет — справедливо равенство

$$\int_C \frac{\partial u(l)}{\partial n} dl = 0,$$

если только функция $\frac{\partial u_i}{\partial n}$ существует и непрерывна.

Мы видим, что условие (19) *оказывается необходимым и достаточным для разрешимости внутренней задачи Неймана.*

Наконец, решение внешней задачи Неймана, которое ищется в той же форме (17), приводит к интегральному уравнению

$$\frac{\partial u_e(P)}{\partial n} = \int_C \rho(l) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r(P, Q)} dl - \pi\rho(P) = g(P).$$

Однородное сопряженное уравнение

$$\int_C \rho(l) K(x, l) dl - \pi\rho(x) = 0$$

по доказанному не имеет ненулевых решений. Поэтому *внешняя задача Неймана имеет решение при любой непрерывной граничной функции $g(P)$.*

Однако это решение, задаваемое потенциалом (17), в общем случае имеет логарифмический рост на бесконечности и поэтому не попадает в класс единственности, указанный в п. б). Можно показать, что потенциал (17) на бесконечности ограничен (и, более того, стремится к нулю) тогда и только тогда, когда выполняется условие (19). Таким образом, *условие* (19) *является необходимым и достаточным для разрешимости внешней задачи Неймана в классе ограниченных функций.*

§ 9. Интегральные уравнения с комплексным параметром

1. Комплексное гильбертово пространство. В анализе часто приходится рассматривать функции, принимающие и комплексные значения; естественно пытаться и из таких функций устраивать пространство со скалярным произведением. Но только аксиомы а) — г) п. 1 § 1 для нового скалярного произведения сохранить не удается. Действительно, выражение (ix, ix) по аксиоме г) должно быть положительным, а по аксиомам а) и в) оно должно быть равным $-(x, x)$, т. е. отрицательным.

Мы сформулируем аксиому а) в комплексном пространстве следующим образом:

а′) $(y, x) = \overline{(x, y)}$, где черта означает знак комплексного сопряжения.

Тогда можно сохранить остальные аксиомы:

б) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$;

в) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого комплексного λ;

г) $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ и $(x, x) = 0$ при $x = 0$.