Но известно, что для любой гармонической функции $u(P)$ в области G_i — имеет она вид (11) или не имеет — справедливо равенство

$$\int\limits_C \frac{\partial u(l)}{\partial n} dl = 0,$$

если только функция $\frac{\partial u_i}{\partial n}$ существует и непрерывна.

Мы видим, что условие (19) *оказывается необходимым и достаточным для разрешимости внутренней задачи Неймана.*

Наконец, решение внешней задачи Неймана, которое ищется в той же форме (17), приводит к интегральному уравнению

$$\frac{\partial u_e(P)}{\partial n} = \int\limits_C \rho(l) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r(P, Q)} dl - \pi\rho(P) = g(P).$$

Однородное сопряженное уравнение

$$\int\limits_C \rho(l) K(x, l) dl - \pi\rho(x) = 0$$

по доказанному не имеет ненулевых решений. Поэтому *внешняя задача Неймана имеет решение при любой непрерывной граничной функции* $g(P)$.

Однако это решение, задаваемое потенциалом (17), в общем случае имеет логарифмический рост на бесконечности и поэтому не попадает в класс единственности, указанный в п. б). Можно показать, что потенциал (17) на бесконечности ограничен (и, более того, стремится к нулю) тогда и только тогда, когда выполняется условие (19). Таким образом, *условие* (19) *является необходимым и достаточным для разрешимости внешней задачи Неймана в классе ограниченных функций.*

§ 9. Интегральные уравнения с комплексным параметром

1. Комплексное гильбертово пространство. В анализе часто приходится рассматривать функции, принимающие и комплексные значения; естественно пытаться и из таких функций устраивать пространство со скалярным произведением. Но только аксиомы а) — г) п. 1 § 1 для нового скалярного произведения сохранить не удается. Действительно, выражение (ix, ix) по аксиоме г) должно быть положительным, а по аксиомам а) и в) оно должно быть равным $-(x, x)$, т. е. отрицательным.

Мы сформулируем аксиому а) в комплексном пространстве следующим образом:

а′) $(y, x) = \overline{(x, y)}$, где черта означает знак комплексного сопряжения.

Тогда можно сохранить остальные аксиомы:

б) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$;

в) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ для любого комплексного λ;

г) $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ и $(x, x) = 0$ при $x = 0$.

Из аксиомы а′) и аксиомы в) следует новое правило вынесения комплексного числового множителя за знак скалярного произведения со второго места:

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \bar{\lambda}\overline{(y, x)} = \bar{\lambda}\overline{(y, x)} = \bar{\lambda}(x, y),$$

т. е. *со второго места числовой множитель выносится с комплексным сопряжением.*

Примером комплексного гильбертова пространства является пространство $L_2(a, b)$, состоящее из *комплексных* функций $\varphi(x)$ с суммируемым квадратом модуля; скалярное произведение вводится по формуле

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

Другой пример — пространство l_2 из *комплексных* последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ со сходящимся рядом квадратов модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty.$$

Скалярное произведение элементов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ вводится по формуле

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \bar{\eta}_n.$$

Все основные результаты этой главы переносятся на случай комплексных гильбертовых пространств с более или менее очевидными изменениями в формулировках и выводах. Так, при выводе неравенства Коши — Буняковского (§ 1, п. 3) мы по-прежнему исходим из неравенства

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geqslant 0,$$

справедливого при любом комплексном λ. Раскрывая левую часть, получаем

$$\lambda\bar{\lambda}(x, x) - \lambda(x, y) - \bar{\lambda}(y, x) + (y, y) \geqslant 0.$$

Положим $\lambda = te^{-i\arg(x, y)}$ (t вещественно), тогда это неравенство преобразуется к виду

$$t^2(x, x) - 2t|(x, y)| + (y, y) \geqslant 0,$$

откуда, как и ранее,

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|.$$

Если имеется вещественное гильбертово пространство H, то всегда можно построить «комплексное расширение» $\bar{H}$ пространства H из формальных сумм $x+iy$, где $x\in H$, $y\in H$. В пространстве $\overline{H}$ естественно вводятся линейные операции сложения и умножения на комплексные числа; введем также и скалярное произведение по формуле

$$(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)=[(x_1,\ x_2)+(y_1,\ y_2)]+i\,[(y_1,\ x_2)-(x_1,\ y_2)].$$

Легко проверить, что это скалярное произведение удовлетворяет условиям а'), б), в) и г). В частности,

$$(x+iy,\ x+iy)=(x,\ x)+(y,\ y).$$

Пространство $\overline{H}$ содержит пространство H в качестве подпространства (с умножением только на вещественные числа!) и с тем же скалярным произведением.

Введенные нами комплексные пространства $L_2(a,\ b)$ и l_2 являются, очевидно, комплексными расширениями рассмотренных ранее вещественных пространств $L_2(a,\ b)$ и l_2.

Всякая полная ортогональная система $e_1,\ \ldots,\ e_n,\ \ldots$ в пространстве H будет полной ортогональной системой и в пространстве $\overline{H}$: если $(x+iy,\ e_n)=0$ при любом n, то при любом n и

$$(x,\ e_n)=0,\quad (y,\ e_n)=0,$$

откуда $x=0$, $y=0$, $x+iy=0$.

Существуют, конечно, и новые ортонормальные системы. Так, в пространстве $L_2(-\pi,\ \pi)$ система функций $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ служит примером полной ортонормальной системы. Полнота ее следует из того факта, что каждая функция полной системы 1, $\cos x$, $\sin x,\ldots$ есть линейная комбинация функций e^{inx}.

Разложение вектора f по ортонормальной системе $e_1,\ e_2,\ \ldots,e_n,\ \ldots$ в комплексном гильбертовом пространстве имеет вид

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}c_ne_n,$$

где $c_n=(f,\ e_n)=\overline{(e_n,\ f)}$. В частности, коэффициенты Фурье в пространстве $L_2(-\pi,\ \pi)$ для разложения

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

вычисляются по формуле

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-inx}\,dx.$$

Основная теорема § 2, п. 4 переносится на комплексный случай с тем единственным изменением, что в равенстве Парсеваля (7) и неравенстве Бесселя (5) вместо величин $(f,\ e_k)^2$ стоят $|(f,\ e_k)|^2$.

Линейный оператор A, действующий в комплексном пространстве H, называется *симметричным*, если он по-прежнему удовлетворяет уравнению

$$(Ax,\ y)=(x,\ Ay)$$

для любых x и y из H. Вообще говоря, линейные операторы в комплексном пространстве могут иметь собственные векторы с комплексными собственными значениями. Но *симметричный оператор A не может иметь невещественных собственных значений*. В самом деле, пусть $Ax=\lambda x$; тогда

$$(Ax,\ x)=(\lambda x,\ x)=\lambda(x,\ x),$$
$$(x,\ Ax)=(x,\ \lambda x)=\overline{\lambda}(x,\ x)$$

и из равенства $(Ax,\ x)=(x,\ Ax)$ следует, что $\lambda=\overline{\lambda}$; тем самым λ вещественно.

Как нетрудно проверить, интегральный оператор Фредгольма

$$A\varphi=\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds$$

будет симметричным вполне непрерывным оператором в комплексном пространстве $L_2(a,\ b)$, если ядро $K(x,\ s)$ удовлетворяет условиям

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,\ s)|^2\,dx\,ds<\infty,\qquad K(x,\ s)=\overline{K(s,\ x)}.$$

Всякий линейный оператор A, действующий в вещественном пространстве H, можно распространить на его комплексное расширение $\overline{H}$ по формуле

$$\overline{A}(x+iy)=Ax+iAy.$$

Если при этом оператор A был симметричным в пространстве H, то оператор $\overline{A}$ в пространстве $\overline{H}$ также будет симметричным:

$$\begin{aligned}(A(x_1+iy_1),\ x_2+iy_2)&=\\ &=(Ax_1,\ x_2)+i(Ay_1,\ x_2)-i(Ax_1,\ y_2)+(Ay_1,\ y_2)=\\ &=(x_1,\ Ax_2)+i(y_1,\ Ax_2)-i(x_1,\ Ay_2)+(y_1,\ Ay_2)=\\ &=(x_1+iy_1,\ A(x_2+iy_2)).\end{aligned}$$

Теоремы относительно существования собственных векторов (§§ 3, 4) и о решении интегральных уравнений (§ 6) полностью переносятся на комплексный случай.

Теорема Фредгольма (§ 8) полностью сохраняется для интегрального оператора с квадратично интегрируемым ядром, действующего в комплексном пространстве $L_2(a, b)$:

$$A\varphi = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds;$$

при этом сопряженный оператор A^* определяется формулой

$$A^*\varphi = \int_a^b \overline{K(s, x)}\,\varphi(s)\,ds.$$

2. Мы можем получить новые сведения об общих свойствах операторов, если вместо одного уравнения

$$\varphi = A\varphi + f$$

будем рассматривать семейство уравнений с комплексным параметром μ:

$$\varphi = \mu A\varphi + f.$$

Можно записать это семейство уравнений в форме

$$(E - \mu A)\varphi = f. \tag{1}$$

Оператор A, как и ранее, предполагается вполне непрерывным оператором, например оператором Фредгольма, но вообще не симметричным. Применяя альтернативу Фредгольма к уравнению (1), получаем: или при фиксированном значении μ уравнение (1) имеет единственное решение при любой правой части f (такое значение μ мы назовем *обыкновенным*), или при том же значении μ однородное уравнение

$$(E - \mu A)\varphi = 0$$

имеет ненулевое решение φ_0, которое, очевидно, является собственным вектором оператора A с собственным значением $\lambda = \frac{1}{\mu}$ (такое значение μ мы назовем *особым*). При различных значениях μ могут осуществляться различные возможности; но оказывается, что правилом является первая возможность, а вторая — исключением, а именно: *у вполне непрерывного оператора A может существовать не более конечного множества различных собственных значений, превосходящих по модулю данное положительное число.* Для симметричного вполне непрерывного оператора мы установили такой факт еще в § 3; покажем, что он справедлив и для любого вполне непрерывного оператора.

Предположим, что вполне непрерывный оператор A имеет бесконечное множество собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, превосходящих по модулю положительное число δ; пусть $g_1, g_2 \ldots$ — соответствующие собственные векторы. Ортонормируя последовательность $g_1, g_2, \ldots$, получаем новую последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Векторы e_n, вообще говоря, уже не являются собственными для оператора A; именно, если

$$e_n = a_{nn}g_n + a_{n,\ n-1}g_{n-1} + \ldots + a_{n1}g_1, \tag{2}$$

то

$$Ae_n = a_{nn}\lambda_n g_n + a_{n,\ n-1}\lambda_{n-1}g_{n-1} + \ldots + a_{n1}\lambda_1 g_1. \tag{3}$$

Равенство

$$Ae_n = \lambda_n e_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}(\lambda_k - \lambda_n)\, g_k,$$

вытекающее из формул (2) — (3), определяет разложение вектора Ae_n на составляющую, лежащую в подпространстве $(g_1, \ldots, g_{n-1})$, и на составляющую, ортогональную этому подпространству. Последняя имеет длину, равную $|\lambda_n|$. Таким образом, расстояние вектора Ae_n до любого вектора в подпространстве $(g_1, \ldots, g_{n-1})$, в частности до вектора Ae_m при $m < n$, превосходит $|\lambda_n| \geqslant \delta$. Но тогда из последовательности $Ae_1, Ae_2, \ldots$ нельзя извлечь фундаментальную подпоследовательность, что противоречит полной непрерывности оператора A.

Итак, собственные значения λ_n любого вполне непрерывного оператора образуют самое большее счетную последовательность, сходящуюся к нулю. Поэтому исключительные значения $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$, при которых уравнение $(E - \mu A)\varphi = 0$ имеет ненулевое решение, образуют самое большее счетную последовательность, сходящуюся к ∞.

Рассмотрим обыкновенное значение μ, при котором уравнение $(E - \mu A)\varphi = f$ имеет единственное решение φ при любом $f \in H$. Обозначим решение φ, как функцию от f, через $R_\mu f$. Оператор R_μ есть, очевидно, линейный оператор. Покажем, что R_μ — ограниченный оператор. Допустим обратное: для некоторой ограниченной последовательности f_n векторы $\varphi_n = R_\mu f_n$ по норме неограниченно возрастают. Положим $\frac{\varphi_n}{|\varphi_n|} = e_n$, $\frac{f_n}{|\varphi_n|} = g_n$; векторы e_n имеют норму 1, векторы g_n стремятся к нулю. Из последовательности Ae_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность; отбрасывая лишние номера, можно считать, что сама последовательность Ae_n сходится. Но тогда и последовательность $e_n = g_n + \mu Ae_n$ сходится к некоторому вектору e, $|e| = 1$. Так как $g_n \to 0$, то $e = \mu Ae$ и μ есть исключительное значение, в противоречие с предположением. Итак, R_μ — ограниченный оператор.

Так как соотношения $(E - \mu A)\varphi = f$ и $\varphi = R_\mu f$ равносильны, то оператор R_μ — обратный оператор по отношению к $E - \mu A$. Он называется *разрешающим оператором* или *резольвентой* оператора A.

3. Возникает вопрос, как построить явное выражение резольвенты.

Применим к оператору $B\varphi = \mu A\varphi + f$ принцип неподвижной точки (гл. II, § 5). Как мы помним, для наличия неподвижной точки у оператора B, действующего в полном пространстве, достаточно, чтобы он был сжимающим, т. е. чтобы при некоторой постоянной $\theta < 1$ выполнялось неравенство

$$|B\varphi - B\psi| \leqslant \theta |\varphi - \psi|. \tag{1}$$

В данном случае

$$|B\varphi - B\psi| = |\mu A\varphi - \mu A\psi| \leqslant |\mu| \, \| A \| \, |\varphi - \psi|$$

и для выполнения требуемой оценки достаточно иметь $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$. Итак, *уравнение* (1) п. 2 *разрешимо, и притом однозначно при всех достаточно малых* μ.

Само решение, как указывается в том же § 5 гл. II, есть предел последовательности φ_0, $B\varphi_0$, $B^2\varphi_0$, ..., $B^n\varphi_0$, ... с произвольным начальным вектором φ_0. Положим $\varphi_0 = 0$; тогда получим:

$$\begin{gathered} B\varphi_0 = f, \quad B^2\varphi_0 = \mu Af + f, \\ B^3\varphi_0 = \mu A(\mu Af + f) + f = \mu^2 A^2 f + \mu Af + f, \ \ldots \\ B^n\varphi_0 = f + \mu Af + \mu^2 A^2 f + \ldots + \mu^{n-1} A^{n-1} f, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Сходимость этого процесса равносильна сходимости ряда

$$f + \mu Af + \mu^2 A^2 f + \ldots \tag{2}$$

Итак, при $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$ *уравнение* (1) п. 2 *имеет единственное решение в форме ряда* (2).

Следовательно, и оператор R_μ при $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$ может быть задан рядом

$$R_\mu = E + \mu A + \mu^2 A^2 + \ldots \tag{3}$$

З а м е ч а н и е. Решение можно было бы получить путем формального разложения в ряд по степеням μ выражения $(E - \mu A)^{-1}$:

$$(E - \mu A)^{-1} = E + \mu A + \mu^2 A^2 + \ \ldots \tag{4}$$

Ряд в правой части (4) сходится при всех μ, $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$, поскольку $\|\mu^n A^n\| \leqslant |\mu|^n \, \|A\|^n$. При умножении (справа или слева) на $E - \mu A$ он превращается в E, так что представляемый им оператор действительно является обратным оператору $E - \mu A$.

Если A есть интегральный оператор Фредгольма

$$A\varphi = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds, \qquad \int_a^b\int_a^b |K^2(x, s)|\,dx\,ds = K^2 < \infty,$$

то, как мы сейчас покажем, при $|\mu|<\frac{1}{K}$ оператор R_μ имеет вид $E+\Gamma_\mu$, где Γ_μ — интегральный оператор Фредгольма с ядром, зависящим от параметра μ.

Для доказательства будем рассуждать так. Пусть даны два интегральных оператора:

$$A\varphi=\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds, \qquad \int_a^b\int_a^b |K^2(x,\ s)|\,dx\,ds=K^2,$$

$$B\varphi=\int_a^b L(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds, \qquad \int_a^b\int_a^b |L^2(x,\ s)|\,dx\,ds=L^2.$$

Построим оператор AB. Мы имеем:

$$AB\varphi=\int_a^b K(x,\ s)\left\{\int_a^b L(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt\right\}ds=$$

$$=\int_a^b\left\{\int_a^b K(x,\ s)\,L(s,\ t)\,ds\right\}\varphi(t)\,dt.$$

Возможность перестановки порядка интегрирования вытекает из теоремы Фубини, примененной к суммируемой функции от s и t

$$K(x,\ s)\,L(s,\ t)\,\varphi(t),$$

которая есть произведение двух квадратично суммируемых функций $L(s,\ t)$ и $K(x,\ s)\,\varphi(t)$. Обозначим далее

$$M(x,\ t)=\int_a^b K(x,\ s)\,L(s,\ t)\,ds.$$

По неравенству Коши — Буняковского

$$|M^2(x,\ t)|\leqslant\int_a^b |K^2(x,\ s)|\,ds\int_a^b |L^2(s,\ t)|\,ds,$$

поэтому $M(x,\ t)$ квадратично суммируема и

$$M^2=\int_a^b\int_a^b |M^2(x,\ t)|\,dt\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b\int_a^b |K^2(x,\ s)|\,ds\,dx\int_a^b\int_a^b |L^2(s,\ t)|\,ds\,dt=K^2L^2.$$

Итак, оператор AB — интегральный оператор Фредгольма, ядро которого $M(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$M \leqslant KL.$$

Отсюда следует, что вместе с оператором A каждый из операторов $A^2, A^3, \ldots, A^n, \ldots$ есть интегральный оператор и ядро $K_n(x, s)$ оператора A^n удовлетворяет неравенству

$$K_n^2 = \int_a^b \int_a^b |K_n^2(x, s)|\, dx\, ds \leqslant K^{2n}, \quad \text{где} \quad K^2 = \int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)|\, dx\, ds.$$

При $|\mu| < \frac{1}{K}$ ряд

$$\mu K(x, s) + \mu^2 K^2(x, s) + \ldots + \mu^n K^n(x, s) + \ldots \tag{5}$$

в пространстве $L_2(G)$, $G = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b\}$, мажорируется по норме сходящимся числовым рядом

$$|\mu| K + |\mu|^2 K^2 + \ldots + |\mu|^n K^n + \ldots$$

и поэтому сходится в среднем к некоторой функции $\Gamma(x, s, \mu)$, квадратично суммируемой при каждом μ, $|\mu| < \frac{1}{K}$. Но так как для интегральных операторов справедливо неравенство

$$\| A \|^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\, dx\, ds = K^2,$$

то из сходимости в среднем ряда (5) следует сходимость ряда операторов $\mu A + \mu^2 A^2 + \ldots$; сумма же этого последнего ряда с добавкой единичного оператора и есть резольвента R_μ. Итак, при $|\mu| < \frac{1}{K}$ оператор R_μ есть сумма единичного оператора и интегрального оператора с ядром $\Gamma(x, s, \mu)$, что и требовалось.

Условие $|\mu| < \frac{1}{K}$, разумеется, не необходимо для разрешимости уравнения (1). Ряд (5), если он сходится, всегда определяет решение; а сходиться он может и в более широкой области значений μ. Если, например, некоторая итерация ядра $K(x, s)$ обращается в нуль, т. е.

$$K_m(x, s) \equiv 0$$

при некотором m, то ряд (5) сводится к конечной сумме и сходится при всех μ. Примером такого оператора является оператор с ядром $K(x, s) = p(x)\, q(s)$, где $p(x)$ и $q(s)$ — ортогональные функции. Действительно, в этом случае уже второе итерированное ядро равно нулю:

$$K_2(x, s) = \int_a^b p(x)\, q(t)\, p(t)\, q(s)\, dt = 0.$$

Более общим образом ряд (5) сходится при всех μ, если итерированные ядра удовлетворяют оценке вида

$$K_n(x, s) | \leqslant \frac{C^n}{n!}. \tag{6}$$

Во всех этих случаях резольвента R_μ существует при всех значениях μ и все значения μ являются обыкновенными. В качестве примера рассмотрим оператор Вольтерра

$$A\varphi(x) = \int_a^x K(x, s)\, \varphi(s)\, ds \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

с ограниченным ядром $K(x, s)$, $|K(x, s)| \leqslant M$. Оператор Вольтерра можно считать частным случаем интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(x, s)$, обращающимся в нуль в области $s \geqslant x$; вместо интеграла по s в пределах от a до b, который фигурирует в выражении оператора Фредгольма, мы получаем поэтому интеграл в пределах от a до x Имеем:

$$|K(x, s)| \leqslant M,$$

$$|K_2(x, s)| = \left| \int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, dt \right| =$$

$$= \begin{cases} \left| \int_s^x K(x, t)\, K(t, s)\, dt \right| \leqslant M^2 (x - s) & (x \geqslant s), \\ 0 & (x \leqslant s), \end{cases}$$

$$|K_3(x, s)| = \left| \int_a^b K_2(x, t)\, K(t, s)\, dt \right| =$$

$$= \begin{cases} \left| \int_s^x K_2(x, t)\, K(t, s)\, dt \right| \leqslant \frac{M^3}{2} (x - s)^2 & (x \geqslant s), \\ 0 & (x \leqslant s), \end{cases}$$

и т. д., так что при любом n

$$K_n(x, s) \begin{cases} \leqslant \frac{M^n}{(n-1)!} (x - s)^{n-1} & (x \geqslant s), \\ = 0 & (x \leqslant s). \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_a^b\int_a^b |K_n^2(x,\ s)|\,dx\,ds \leqslant \frac{M_1^n}{(n-1)!}$$

и оценка (6) выполнена.

В общем случае ряд, определяющий резольвенту

$$R_\mu = E + \mu A + \mu^2 A^2 + \ldots,$$

имеет конечный круг сходимости и не позволяет непосредственно вычислять резольвенту за пределами этого круга. Мы приведем (без вывода) формулы Фредгольма, дающие выражение резольвенты при любом неисключительном значении μ, в случае ограниченного и непрерывного ядра $K(x,\ s)$ [1]). Фиксируем значения $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и $s_1,\ \ldots,\ s_n$ и введем обозначение

$$K\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_n \\ s_1, & \ldots, & s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1,\ s_1) & \ldots & K(x_1,\ s_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ K(x_n,\ s_1) & \ldots & K(x_n,\ s_n) \end{vmatrix}.$$

Составляются две функции $D(\mu)$ и $D(x,\ s,\ \mu)$ по формулам

$$D(\mu) = 1 - \mu\int_a^b K\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix} d\xi + \frac{\mu^2}{2}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \xi_1 & \xi_2\end{pmatrix} d\xi_1\,d\xi_2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n\frac{\mu^n}{n!}\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}\xi_1 & \ldots & \xi_n\\ \xi_1 & \ldots & \xi_n\end{pmatrix} d\xi_1\ \ldots\ d\xi_n + \ldots$$

$$D(x,\ s,\ \mu) = K\begin{pmatrix}x\\ s\end{pmatrix} - \mu\int_a^b K\begin{pmatrix}x & \xi\\ s & \xi\end{pmatrix} d\xi + \frac{\mu^2}{2}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}x & \xi_1 & \xi_2\\ s & \xi_1 & \xi_2\end{pmatrix} d\xi_1\,d\xi_2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)\frac{\mu^n}{n!}\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}x & \xi_1 & \ldots & \xi_n\\ s & \xi_1 & \ldots & \xi_n\end{pmatrix} d\xi_1\ \ldots\ d\xi_n + \ldots$$

Обе эти функции оказываются целыми аналитическими функциями от μ; при этом функция $D(\mu)$ обращается в 0 при тех и только тех μ, которые являются исключительными значениями оператора A (когда не существует резольвенты R_μ). Оказывается, что решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) + \mu\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds = f(x)$$

---

[1]) См., например, И. И. Привалов, Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1937, гл. II. Т. Карлеман (1921) показал, что эти формулы остаются в силе и для квадратично интегрируемого ядра. Простое доказательство (с обобщением на бесконечный промежуток) имеется у С. Г. Михлина, ДАН СССР, 1944, т. 92, № 9, 387-390.

при любом обыкновенном значении μ имеет вид

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b \frac{D(x,\, s,\, \mu)}{D(\mu)} f(s)\, ds.$$

Таким образом, резольвента R_μ оператора A везде, где она существует, есть сумма единичного оператора и интегрального оператора Фредгольма, ядром которого является отношение функций Фредгольма $D(x, s, \mu)$ и $D(\mu)$. Собственные функции оператора A также можно выразить через $D(\mu)$ и $D(x, s, \mu)$; но формулы эти неэффективны, и мы не будем их здесь приводить.

Задачи. 1. Показать, что совокупность решений уравнения

$$P(A)\varphi=(A-\lambda_1 E)\ \ldots\ (A-\lambda_m E)\varphi=0$$

($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — различные комплексные числа) совпадает с совокупностью линейных комбинаций собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Указание. Разложению на простейшие дроби

$$\frac{1}{(\lambda-\lambda_1)\ \ldots\ (\lambda-\lambda_m)}=\frac{a_1}{\lambda-\lambda_1}+\ldots+\frac{a_m}{\lambda-\lambda_m}$$

отвечает операторное равенство

$$E=a_1(A-\lambda_2 E)\ \ldots\ (A-\lambda_m E)+\ldots+a_m(A-\lambda_1 E)\ \ldots\ (A-\lambda_{m-1}E).$$

2. Если у оператора A^m имеется собственное значение λ, то у оператора A имеется собственное значение μ, равное одному из m корней m-й степени из числа λ.

Указание. Использовать задачу 1.

3. Если оператор A симметричен и A^m вполне непрерывен, то и A вполне непрерывен.

Указание. У оператора A имеется полная ортогональная система векторов с собственными значениями, стремящимися к нулю. Использовать далее задачу 5 к п. 5 § 3.

4. Показать, что оператор A, заданный в ортонормальном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n \ldots$ формулами

$$Ae_{2k-1}=e_{2k},\quad Ae_{2k}=0\quad (k=1, 2, \ldots),$$

не вполне непрерывен, в то время как A^2 вполне непрерывен.

В задачах 5—8 предполагается, что оператор A^m вполне непрерывен (сам A может не быть вполне непрерывным).

5. Доказать, что собственные значения оператора A могут составить самое большее счетную последовательность, сходящуюся к нулю.

Указание. Использовать задачу 2.

6. Если p—достаточно большое простое число, то собственные векторы, соответствующие собственному значению 1, у оператора A^p лишь те, которые являются собственными векторами оператора A для собственного значения 1.

Указание. Использовать задачи 2 и 5.

7. Размерность подпространства собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению 1, такова же, как и у оператора A^*.

Указание. Использовать задачу 6 и полную непрерывность A^p при $p>m$.

8. Уравнение $\varphi - A\varphi = f$ имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие $(f, \psi_0) = 0$, где ψ_0 — собственный вектор оператора A^* с собственным значением 1.

Указание. Рассмотреть уравнение

$$(E - A^p)\varphi = (E + A + \ldots + A^{p-1})f$$

с таким $p > m$, чтобы ни один комплексный корень p-й степени из 1 не был собственным значением операторов A и A^*. Проверить его разрешимость. Если φ_0 — решение, то $(E - A)\varphi_0 - f$ обращается оператором $E + A + \ldots + A^{p-1}$ в нуль. Применив далее задачу 1, получить, что $(E - A)\varphi_0 - f = 0$ (С. Л. Соболев).

Примечание. Задачи 7 и 8 показывают, что альтернатива Фредгольма сохраняется для операторов A, у которых некоторая степень A^m — вполне непрерывный оператор.

9. Пусть μ — неисключительное значение для вполне непрерывного оператора A (т. е. $E - \mu A = B$ — обратимый оператор) и $Q = E - \alpha B^* B$, где $\alpha > 0$ достаточно мало. Тогда последовательность $\varphi_{n+1} = Q\varphi_n + \alpha B^* f$ с произвольным φ_0 сходится к вектору ψ, являющемуся решением уравнения $(E - \mu A)\varphi = f$.

Указание. Уравнение $(E - \mu A)\varphi = f$ эквивалентно уравнению $\varphi = Q\varphi + \alpha B^* f$. Использовать решение задачи 5 § 3, п. 3 (где положено $C = B^* B$) и метод неподвижной точки (И. П. Натансон, 1948).

Примечание. Решение этой задачи указывает итерационный процесс для решения уравнения $(E - \mu A)\varphi = f$ при любом неисключительном значении μ.

10. Показать, что решение φ уравнения 1-го рода $A\varphi = f$, если оно существует, есть предел последовательности

$$\varphi_n = \varphi_{n-1}(E - \mu A A^*) + \mu f, \tag{1}$$

где $0 < \mu < \dfrac{2}{\|A\|^2}$ (В. М. Фридман, 1956).

Указание. Подставив в (1) $\varphi_n = \varphi + u_n$, получить формулу $u_n = (E - \mu A A^*) u_{n-1}$. Если e_j — ортонормальная система собственных векторов оператора AA^* с собственными значениями λ_j, то $(u_n, e_j) = (1 - \mu\lambda_j)(u_{n-1}, e_j) = (1 - \mu\lambda_j)(u_0, e_j)$. Выбрав p так, что $|(u_0, e_p)|^2 + |(u_0, e_{p+1})|^2 + \ldots < \varepsilon$, получить

$$|u_n|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(u_n, e_j)|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{p-1} (1 - \mu\lambda_j)^{2n} \, |u_0|^2 + \sum_{j=p}^{\infty} |(u_0, e_j)|^2 < 2\varepsilon$$

для достаточно больших n.

Заключительное замечание. Теория интегральных уравнений с переменным верхним пределом была построена в 1887 г. В. Вольтерра (итал. математик, 1860—1940). В 1900—1903 гг. появился цикл фундаментальных работ Э. Фредгольма (шведский математик, 1866—1927), где были введены целые функции $D(\mu)$ и $D(x, s, \mu)$ и через эти функции были выражены решение уравнения общего вида («уравнение Фредгольма») и собственные функции. Д. Гильберт (нем. математик, 1862—1943) в работах 1904—1910 гг. впервые использовал в интегральных уравнениях геометрические идеи, рассматривая задачу о собственных функциях как задачу о приведении бесконечномерной квадратичной формы к главным осям. «Гильбертово пространство» — одно из важнейших новых понятий математики XX века. Гильберт построил каноническое разложение симметричного ограниченного оператора (теорема, доказанная в § 3, есть частный случай по отношению к построениям Гильберта), которое стало началом современной спектральной теории линейных операторов, широко применяемой в математике и физике. Класс вполне непрерывных операторов (в пространстве Банаха) выделил впервые Ф. Рисс в 1919 г. О дальнейших применениях интегральных уравнений в математической физике см. в книге: С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1947; о спектральной теории и ее приложениях — в книгах: Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, Теория линейных операторов, Гостехиздат, 1950 и М. А. Наймарк, Дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1952.