# ГЛАВА VI

# ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Хорошо известно, что в классическом анализе непрерывных функций операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны. Точный смысл этого утверждения следующий:

А. Для данной непрерывной функции $\varphi(x)$ ее неопределенный интеграл

$$F(x)=\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi+C \tag{1}$$

с любой постоянной $C$ есть дифференцируемая функция и при каждом $x$

$$F'(x)=\varphi(x). \tag{2}$$

Б. Для данной функции $F(x)$, обладающей непрерывной производной

$$\varphi(x)=F'(x),$$

имеет место равенство

$$\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi=F(x)+C, \tag{3}$$

где $C$ — некоторая постоянная (именно равная $-F(a)$).

Мы располагаем теперь значительно более общим понятием интеграла, которое можно применить к широкому классу разрывных функций. Условие непрерывности $\varphi(x)$ уже не стесняет нас при построении неопределенного интеграла (1).

Возникают следующие проблемы:

Проблема I. Сохранится ли равенство (2), если в (1) функция $\varphi(x)$ — произвольная суммируемая функция?

Поскольку суммируемая функция $\varphi(x)$ может быть произвольно изменена на множестве меры нуль без изменения $F(x)$, то при решении проблемы I естественно требовать выполнения равенства (2) не всюду, а лишь почти всюду.

Проблема II. При каких условиях данная функция $F(x)$ обладает суммируемой производной $\varphi(x)$ (хотя бы определенной почти всюду) и имеет место формула (3)?

В этой главе мы укажем решение проблем I и II, а также рассмотрим некоторые смежные вопросы, главным из которых является построение интеграла Стильтьеса.

## § 1. Производная неубывающей функции

**1.** Рассмотрим сначала следующий вопрос: является ли наличие производной элементарным свойством функции $f(x)$ или же оно может быть выведено из других, более элементарных свойств? В качестве возможных более элементарных свойств естественно рассмотреть, например, свойство непрерывности. Хорошо известно, что функция $f(x)$, имеющая в точке $x_0$ производную, непрерывна в этой точке. Верно ли обратное, иначе говоря, имеет ли непрерывная функция $f(x)$ производную? Конечно, нет; простейшие примеры типа $f(x)=|x|$ показывают, что функция может быть непрерывной и не всюду иметь производную. Но остается еще мыслимая возможность, что точки без производной являются для непрерывной функции исключением, и у всякой непрерывной функции на самом деле есть достаточно богатое множество точек, где она обладает производной. Так действительно думали многие математики в начале прошлого века. Но в конце концов ответ оказался отрицательным: знаменитый пример Вейерштрасса непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке (1860-е годы) [1]), изумивший ученый мир, положил конец попыткам отыскивать точки дифференцируемости у непрерывной функции. (В одной из задач к этому пункту предлагается более простой пример ван-дер-Вардена.) Итак, непрерывность функции не влечет ее дифференцируемости.

Попробуем подойти к вопросу с другой стороны. Функция $f(x)$, имеющая при $x=x_0$ производную $f'(x_0)>0$, не убывает в окрестности точки $x_0$, в том смысле, что при достаточно близких к $x_0$ значениях $x$ мы имеем $f(x)>f(x_0)$, если $x>x_0$, и $f(x)<f(x_0)$, если $x<x_0$. Может быть, монотонность функции имеет следствием наличие у нее производной? Если говорить об отдельных точках, это снова не так: к примеру, функция $f(x)=|x|+2x$ всюду возрастает, а в точке $x=0$ не имеет производной. Но оказывается, что точки, где монотонная функция не имеет производной, являются для этой функции уже исключением, а не правилом. Именно, как показал А. Лебег (1902), *неубывающие функции могут не иметь производной самое большее на множестве меры нуль.*

---

[1]) Чешский математик Б. Больцано построил подобный пример еще в 1830 г. Но его рукопись была обнаружена лишь в 1920 г. и опубликована в 1930 г. — через столетие после того, как была написана.

Теорема 1 (А. Лебег). *Неубывающая функция $F(x)$, определенная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, имеет почти всюду на этом отрезке конечную производную.*

Мы проведем доказательство вначале для случая непрерывной функции $F(x)$.

Пусть $G(x)$ — произвольная функция на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Назовем точку $x \in [a, b]$ *точкой подъема* (рис. 11), если правее $x$ на отрезке $[a, b]$ имеется точка $\xi$, в которой функция $G$ принимает бо́льшее значение, чем в точке $x$:

$$G(x) < G(\xi) \qquad (x < \xi). \tag{1}$$

Установим следующую лемму:

Лемма (Ф. Рисс). *Для непрерывной функции $G(x)$ множество всех точек подъема открыто на отрезке $[a, b]$ и в концах каждого составляющего интервала $(a_k, b_k)$ этого множества выполняется неравенство*

$$G(a_k) \leqslant G(b_k). \tag{2}$$

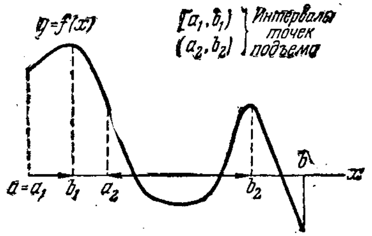

Рис. 11.

Доказательство. Поскольку функция $G(x)$ непрерывна, очевидно, что все достаточно близкие к точке подъема точки $x$ также являются точками подъема; таким образом, множество $Z$ всех точек подъема открыто. Пусть $(a_k, b_k)$ — некоторый составляющий интервал этого множества. Покажем, что для любого $x \in (a_k, b_k)$ имеет место неравенство $G(x) \leqslant G(b_k)$; отсюда, переходя к пределу при $x \to a_k$, получим и требуемое неравенство (2).

Предположим, что $G(x_0) > G(b_k)$; найдем в интервале $(a_k, b_k)$ самую правую точку $x_0'$, в которой $G(x_0') = G(x_0)$. Так как $G(x_0') = G(x_0) > G(b_k)$, то $G(x_0) > G(x)$ всюду в интервале $(x_0', b_k)$. Далее, точка $b_k$ не принадлежит множеству точек подъема, поэтому всюду правее $b_k$ имеем $G(x) \leqslant G(b_k)$. В итоге мы получаем, что всюду правее $x_0'$ имеет место неравенство $G(x_0') > G(x)$. Но тогда $x_0'$ не может быть точкой подъема в противоречие с построением.

Замечание. Точку $x$ с условиями (1) мы будем называть далее более точно *точкой подъема вправо*. Можно определить аналогично *точку подъема влево* как такую точку $x$, левее которой существует точка $\xi$ с большим значением функции:

$$\xi < x, \quad G(\xi) > G(x).$$

Точно так же, как и выше, можно доказать, что и множество точек подъема влево открыто и в концах его составляющих интервалов

$(a_k, b_k)$ выполняется неравенство

$$G(a_k) \geqslant G(b_k).$$

Прежде чем переходить к доказательству самой теоремы Лебега, сделаем еще несколько замечаний общего характера.

Производная функции $F(x)$ определяется как предел отношения

$$\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}, \tag{3}$$

когда $\xi$ приближается к $x$ по любому закону. Разумеется, этот предел может и не существовать. Но во всяком случае всегда существуют величины (для которых мы допускаем и бесконечные значения):

$\Lambda_{\text{пр}}$ — верхний предел отношения (3) при $\xi$, приближающемся к $x$ справа (верхнее правое производное число);

$\lambda_{\text{пр}}$ — нижний предел отношения (3) при том же условии (нижнее правое производное число);

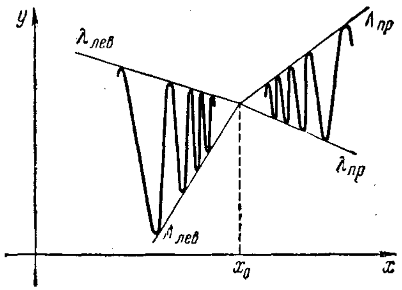


Рис. 12.

$\Lambda_{\text{лев}}$ — верхний предел отношения (3) при $\xi$, приближающемся к $x$ слева (верхнее левое производное число);

$\lambda_{\text{лев}}$ — нижний предел отношения (3) при том же условии (нижнее левое производное число).

Рис. 12 иллюстрирует случай, когда в данной точке $x_0$ все четыре указанных производных числа различны и конечны. Читателю предоставляется изобразить графически случай, когда в данной точке все четыре числа принимают предписанные значения в промежутках $-\infty \leqslant \lambda_{\text{пр}} \leqslant \Lambda_{\text{пр}} \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant \lambda_{\text{лев}} \leqslant \Lambda_{\text{лев}} \leqslant +\infty$.

Если $\Lambda_{\text{пр}} = \lambda_{\text{лев}} \neq \pm\infty$, то функция $F(x)$ обладает при данном значении $x$ производной справа; если $\Lambda_{\text{лев}} = \lambda_{\text{лев}} \neq \pm\infty$, то функция $F(x)$ обладает производной слева. Наконец, если все четыре производных числа конечны и равны друг другу, то в данной точке у функции $F(x)$ имеется производная.

Имея в виду все указанное, приступаем к доказательству теоремы Лебега.

Вспомним, что по условию теоремы мы имеем дело с неубывающей функцией: при $x < \xi$ всегда $F(x) \leqslant F(\xi)$. Поэтому отношение (3) неотрицательно; вместе с ним неотрицательны в каждой точке и все четыре производных числа $\Lambda_{\text{пр}}$, $\lambda_{\text{пр}}$, $\Lambda_{\text{лев}}$ и $\lambda_{\text{лев}}$.

Покажем, что почти всюду выполняется неравенство

$$\Lambda_{\text{пр}} < +\infty.$$

Если в некоторой точке $x$ мы имеем $\Lambda_{\text{пр}}=+\infty$, то для любого $C$ можно найти справа от $x$ точку $\xi$, в которой

$$\frac{F(\xi)-F(x)}{\xi-x}>C,$$

или, что то же,

$$F(x)-Cx<F(\xi)-C\xi.$$

Таким образом, всякая точка $x$, в которой $\Lambda_{\text{пр}}=+\infty$, является точкой подъема вправо для функции $G(x)=F(x)-Cx$. Согласно лемме Рисса множество всех точек подъема вправо для этой функции открыто и в концевых точках составляющих интервалов выполняется неравенство

$$F(a_k)-Ca_k\leqslant F(b_k)-Cb_k,$$

или, что то же,

$$C(b_k-a_k)\leqslant F(b_k)-F(a_k). \tag{4}$$

Складывая неравенства (4) по всем составляющим интервалам, получаем:

$$C\sum(b_k-a_k)\leqslant\sum[F(b_k)-F(a_k)]\leqslant F(b)-F(a).$$

Мы видим, что множество $Z$ точек $x$, в которых $\Lambda_{\text{пр}}=+\infty$, может быть покрыто системой интервалов с общей длиной

$$\sum(b_k-a_k)\leqslant\frac{1}{C}[F(b)-F(a)].$$

Так как $C$ может быть взято сколь угодно большим, то мы приходим к выводу, что множество $Z$ имеет меру нуль, что и утверждалось.

Следующим этапом доказательства будет проверка выполнения почти всюду неравенства

$$\Lambda_{\text{пр}}\leqslant\lambda_{\text{лев}}.$$

Множество точек, где $\Lambda_{\text{пр}}>\lambda_{\text{лев}}$, представляется в виде счетной суммы множеств $Z_{cC}$, где выполняются неравенства

$$\lambda_{\text{лев}}<c<C<\Lambda_{\text{пр}},$$

причем $c$ и $C$ — всевозможные рациональные постоянные ($c<C$). Поэтому нам достаточно показать, что каждое из множеств $Z_{cC}$ имеет меру нуль.

Пусть $x\in Z_{cC}$. Тогда, поскольку $\lambda_{\text{лев}}<c$, имеется точка $\xi$, лежащая левее $x$, в которой выполняется неравенство

$$\frac{F(\xi)-F(x)}{\xi-x}<c. \tag{5}$$

Заметим, что здесь $\xi-x<0$; поэтому неравенство (5) эквивалентно неравенству

$$F(\xi)-c\xi>F(x)-cx.$$

Таким образом, точка $x$ является точкой подъема влево для функции $G(x)=F(x)-cx$. Применяя лемму Рисса (см. замечание на стр. 269), получаем для составляющих интервалов открытого множества всех точек подъема влево неравенства вида

$$F(a_k)-ca_k \geqslant F(b_k)-cb_k,$$

или, что то же,

$$F(b_k)-F(a_k) \leqslant c(b_k-a_k). \tag{6}$$

Взятая точка $x$ лежит в одном из указанных интервалов $(a_k, b_k)$. Поскольку в этой точке $\Lambda_{\text{пр}} > C$, мы можем в интервале $(a_k, b_k)$ указать точку $\xi > x$, в которой

$$\frac{F(\xi)-F(x)}{\xi-x} > C. \tag{7}$$

Дальнейшее построение будем проводить в пределах интервала $(a_k, b_k)$. Неравенство (7), как и выше, показывает, что точка $x$ является точкой подъема вправо для функции $F(x)-Cx$. Множество всех точек подъема вправо для этой функции в интервале $(a_k, b_k)$ открыто и разбивается в сумму составляющих интервалов $(a_{kj}, b_{kj})$ $(j=1, 2, \ldots)$, причем на концах этих интервалов выполняются неравенства

$$F(a_{kj})-Ca_{kj} \leqslant F(b_{kj})-Cb_{kj}.$$

Иначе говоря,

$$F(b_{kj})-F(a_{kj}) \geqslant G(b_{kj}-a_{kj}).$$

Суммируя по индексу $j$, получим:

$$\sum_j (b_{kj}-a_{kj}) \leqslant \frac{1}{C}\sum [F(b_{kj})-F(a_{kj})] \leqslant \frac{1}{C}[F(b_k)-F(a_k)].$$

Используя неравенство (6), получаем:

$$\sum_j (b_{kj}-a_{kj}) \leqslant \frac{c}{C}\sum (b_k-a_k).$$

Суммируя по индексу $k$, находим:

$$\sum_k \sum_j (b_{kj}-a_{kj}) \leqslant \frac{c}{C}\sum_k (b_k-a_k). \tag{8}$$

Как система интервалов $(a_k, b_k)$, так и система интервалов $(a_{kj}, b_{kj})$ покрывает множество $Z_{cC}$, и мы видим, что вторая система покрывает его более «экономно», чем первая.

Для каждой точки $x \in Z_{cC}$ в пределах соответствующего интервала $(a_{kj}, b_{kj})$ можно повторить это построение. Мы получим новую систему «третьего порядка» $(a_{kjm}, b_{kjm})$ $(m=1, 2, \ldots)$ и систему четвертого порядка $(a_{kjmn}, b_{kjmn})$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$, причем

$$\sum_m \sum_n (b_{kjmn} - a_{kjmn}) \leqslant \frac{c}{C} \sum_m (b_{kjm} - a_{kjm}) \leqslant \frac{c}{C} (b_{kj} - a_{kj}).$$

Суммируя по $k$ и $j$ и используя (8), получим:

$$\sum_k \sum_j \sum_m \sum_n (b_{kjmn} - a_{kjmn}) \leqslant \left(\frac{c}{C}\right)^2 \sum_k (b_k - a_k).$$

Продолжая далее этот процесс, мы получаем возможность покрывать множество $Z_{cC}$ все более тесными системами интервалов, причем общая длина интервалов $2p$-й покрывающей системы не превосходит $\left(\frac{c}{C}\right)^p (b-a)$ и может быть сделана при достаточно большом $p$ как угодно малой. Поэтому мера множества $Z_{cC}$ равна нулю, что и утверждалось. Итак, *для любой неубывающей непрерывной функции почти всюду имеют место неравенства* $\Lambda_{\text{пр}} < +\infty$ и $\Lambda_{\text{пр}} \leqslant \lambda_{\text{лев}}$. Заменим функцию $F(x)$ на $F^*(x) = -F(-x)$; функция $F^*(x)$ также неубывающая, и для нее также почти всюду справедливо неравенство $\Lambda^*_{\text{пр}} \leqslant \lambda^*_{\text{лев}}$. Но легко сообразить, что в соответствующих точках $\Lambda^*_{\text{пр}} = \Lambda_{\text{лев}}$, $\lambda^*_{\text{лев}} = \lambda_{\text{пр}}$; поэтому почти всюду имеет место неравенство $\Lambda_{\text{лев}} \leqslant \lambda_{\text{пр}}$. Мы получаем, таким образом, цепь неравенств

$$0 \leqslant \Lambda_{\text{пр}} \leqslant \lambda_{\text{лев}} \leqslant \Lambda_{\text{лев}} \leqslant \lambda_{\text{пр}} \leqslant \Lambda_{\text{пр}} < +\infty,$$

выполняющихся одновременно на множестве полной меры; мы видим, что на этом множестве

$$0 \leqslant \Lambda_{\text{пр}} = \lambda_{\text{лев}} = \Lambda_{\text{лев}} = \lambda_{\text{пр}} < +\infty,$$

т. е. у функции $F(x)$ имеется конечная производная.

Тем самым доказана теорема Лебега для непрерывной неубывающей функции.

Переходим к рассмотрению разрывных неубывающих функций. Отметим, что у произвольной неубывающей функции $F(x)$ разрывы могут быть лишь первого рода, так что во всякой точке существуют пределы значений $F(x)$ справа и слева:

$$F(x+0) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} F(\xi), \qquad F(x-0) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi < x}} F(\xi).$$

Действительно, наличие нескольких предельных значений с какой-нибудь стороны несовместимо с монотонностью функции. Интервал $(F(x-0), F(x+0))$ называется интервалом разрыва, а его длина $F(x+0) - F(x-0)$ — скачком функции $F(x)$ в точке $x$. Так как функция $F(x)$ не убывает, интервалы $(F(x-0), F(x+0))$ для разных точек разрыва не перекрываются (самое большее могут иметь общий конец); поэтому таких интервалов имеется не более счетного множества. Вместе с тем *у неубывающей функции и самих точек разрыва не может быть более счетного множества.*

Чтобы проверить наличие производной у разрывной неубывающей функции, мы соответственно обобщим лемму Рисса. Пусть $G(x)$ — если и не непрерывная функция, то во всяком случае имеющая разрывы только первого рода. Назовем точку $x$ точкой подъема вправо, если правее $x$ имеется точка $\xi$, в которой

$$\max[G(x),\quad G(x-0),\quad G(x+0)] < G(\xi).$$

Повторяя те же рассуждения, которые мы проводили выше при доказательстве леммы Рисса, мы получаем, что множество всех точек подъема вправо открыто, причем для каждого составляющего интервала $(a_k, b_k)$ этого множества имеет место неравенство

$$G(a_k+0) \leqslant \max\{G(b_k),\ G(b_k-0),\ G(b_k+0)\}.$$

А этого уже достаточно, чтобы провести без изменения и доказательство самой теоремы.

Итак, *всякая неубывающая функция имеет почти везде конечную производную.*

Задачи. Доказать следующие предложения:

1. Если у непрерывной функции $F(x)$ одно из правых производных чисел неотрицательно в интервале $(a, b)$, то $F(a) \leqslant F(b)$.

Указание. Каждая точка есть точка подъема вправо.

2. Если одно из правых производных чисел в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ заключено в пределах $[\alpha, \beta]$, то для любых $x_1$ и $x_2$ из интервала $(a, b)$ имеем:

$$\alpha \leqslant \frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \beta.$$

Указание. Применить результат задачи 1 к функции $F(x)-\alpha x$.

3. Если одно из производных чисел функции $F(x)$ непрерывно в точке $x_0$, то существует $F'(x_0)$.

Указание. Использовать задачу 2.

4. (Пример Ван-дер-Вардена). Положим

$$\varphi_0(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}, \\ 1-x & \text{при } \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

и продолжим эту функцию затем на всю ось с периодом 1. Положим далее

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{4^n}\varphi_0(4^n x).$$

Функция $\varphi_n(x)$ имеет период $4^{-n}$ и производную $\left(\text{всюду, кроме угловых точек с абсциссами } \frac{p}{2^n}\right)$, равную $+1$ или $-1$. Пусть, наконец,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x).$$

Показать, что $f(x)$ непрерывна, но ни в одной точке не имеет производной.

Указание. Фиксируя $m$ для данного $x_0$, возьмем приращение $h = \pm\frac{1}{4^m}$. Тогда приращения всех $\varphi_n(x)$, начиная с $m$-й, будут равными нулю. Функция $\varphi_{m-1}(x)$ имеет интервалы без угловых точек длины $\frac{2}{4^m}$; тот из них, который содержит точку $x_0$, содержит вместе с ней и один из интервалов $\left(x_0, x_0+\frac{1}{4^m}\right)$ или $\left(x_0, x_0-\frac{1}{4^m}\right)$. На этом интервале и все предшествующие функции $\varphi_k(x)$, $k<m-1$, не имеют угловых точек; приращения их будут по модулю равны приращению аргумента. В итоге мы получим

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Delta\varphi_k(x)}{\Delta x} = \begin{cases}\text{четному числу при } m \text{ четном,}\\ \text{нечетному числу при } m \text{ нечетном.}\end{cases}$$

Поэтому $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x \to 0$.

5. В точке $x$, $0 \leqslant x < 1$, имеющей двоичное разложение $0, a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ (разложения, имеющие 1 в периоде, как обычно, исключаются), положим $f(x) = 0, a_1\ 0\ a_3\ 0 \ldots$, заменяя двоичные знаки на четных местах нулями. Показать, что $f(x)$ непрерывна справа и нигде не имеет правой производной.

Указание. Рассмотреть приращения функции, получающиеся при перемене в $x$ $n$-го двоичного знака с 0 на 1 или группы 01 на 10.

**2.** К обычным правилам дифференцирования суммы и произведения, имеющим общий характер, мы присоединим здесь теорему о почленном дифференцировании ряда монотонных функций:

Теорема 2 («малая теорема Фубини»). *Всюду сходящийся ряд монотонных (неубывающих) функций*

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = F(x) \tag{1}$$

*почти всюду допускает почленное дифференцирование:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) = F'(x).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать все функции $F_n(x)$ неотрицательными и равными нулю при $x=a$: в противном случае мы заменили бы $F_n(x)$ на $F_n(x) - F_n(a)$.

Сумма ряда из неубывающих функций есть, конечно, неубывающая функция. Рассмотрим множество $E$ полной меры, на котором существуют все $F'_n(x)$ и $F'(x)$. При $x \in E$ и любом $\xi$ мы имеем:

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}[F_n(\xi) - F_n(x)]}{\xi - x} = \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}.$$

Так как слагаемые, стоящие слева, неотрицательны, то при любом $N$

$$\frac{\sum_{n=1}^{N}[F_n(\xi)-F_n(x)]}{\xi-x}\leqslant\frac{F(\xi)-F(x)}{\xi-x}.$$

Переходя к пределу при $\xi\to x$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{N}F'_n(x)\leqslant F'(x),$$

откуда, устремляя $N$ в $\infty$ и учитывая, что все $F'_n(x)$ неотрицательны, находим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}F'_n(x)\leqslant F'(x). \tag{2}$$

Покажем, что в действительности почти при всех $x$ здесь имеет место знак равенства. Найдем для заданного $k$ частную сумму $S_{n_k}(x)$ ряда (1), для которой

$$0\leqslant F(b)-S_{n_k}(b)<\frac{1}{2^k}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как разность $F(x)-S_{n_k}(x)=\sum_{j>n_k}F_j(x)$ — неубывающая функция, то и для всех $x$

$$0\leqslant F(x)-S_{n_k}(x)<\frac{1}{2^k},$$

и, следовательно, ряд из неубывающих функций

$$\sum_{k=1}^{\infty}[F(x)-S_{n_k}(x)]$$

сходится (даже равномерно) на всем отрезке $a\leqslant x\leqslant b$. Но тогда по доказанному и ряд производных сходится почти всюду. Общий член этого ряда $F'(x)-S'_{n_k}(x)$ почти всюду стремится к нулю, и, значит, почти всюду $S'_{n_k}(x)\to F'(x)$. Но если бы в неравенстве (2) стоял знак $<$, то никакая последовательность частных сумм не могла бы иметь пределом $F'(x)$. Поэтому в неравенстве (2) почти при каждом $x$ должен иметь место знак равенства, что мы и утверждали.

**3. Разложение неубывающей функции на функцию скачков и непрерывную функцию.** Пусть $A=\{x,\ x_2,\ \ldots\}$ — произвольное конечное или счетное множество точек отрезка $[a,\ b]$ и $B=\{h_1,\ h_2,\ \ldots\}$ — такое же множество положительных чисел с конечной суммой $\sum_n h_n$. Между множествами $A$ и $B$ установим взаимно однозначное соответствие так, чтобы точке $x_n$ соответствовало число $h_n$ с тем же номером $n$. Определим функцию $H(x)$ как сумму всех таких чисел $h_n$, для которых соответствующие точки $x_n$ лежат не правее $x$:

$$H(x)=\sum_{x_n \leqslant x} h_n.$$

Функция $H(x)$, построенная по указанному правилу, называется *функцией скачков*. Как неубывающая функция, она имеет самое большее счетное множество точек разрыва. Покажем, что она непрерывна справа и все ее разрывы лежат в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, а соответствующие скачки $H(x_n)-H(x_n-0)$ равны как раз числам $h_n$. Действительно, для данного $x=x_0$ имеем:

$$H(x_0+0)=\lim_{x \to x_0+0} \sum_{x_n \leqslant x} h_n=\sum_{x_n \leqslant x_0} h_n=H(x_0),$$

$$H(x_0-0)=\lim_{x \to x_0-0} \sum_{x_n \leqslant x} h_n=\sum_{x_n < x_0} h_n.$$

Если точка $x_0$ не совпадает ни с одной из точек $x_n$, то $H(x_0+0)=$ $=H(x_0)=H(x_0-0)$ и $x_0$ есть точка непрерывности функции $H(x)$. Если точка $x_0$ попадает в одну из точек $x_n$, то разница между $H(x_0+0)=H(x_0)$ и $H(x_0-0)$, т. е. скачок в точке $x_n$ составляет $h_n$. Таким образом, наше утверждение доказано.

В силу малой теоремы Фубини как сумма сходящегося ряда неубывающих функций

$$H_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<x_n, \\ h_n & \text{при } x \geqslant x_n, \end{cases}$$

производные которых почти всюду равны нулю, функция $H(x)$ также имеет производную, почти всюду равную нулю.

Теорема. *Любую неубывающую непрерывную справа функцию $F(x)$ можно представить в виде суммы двух неубывающих:*

$$F(x)=H(x)+G(x),$$

*причем так, что первое слагаемое $H(x)$ есть функция скачков, а второе $G(x)$ — непрерывная функция.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — все точки разрыва функции $F(x)$ и $h_1, h_2, \ldots$ — соответствующие скачки. Построим функцию скачков по формуле

$$H(x)=\sum_{x_n \leqslant x} h_n.$$

Покажем, что разность $G(x)=F(x)-H(x)$ не убывает и непрерывна. Для значений $x'<x''$ мы имеем:

$$G(x'')-G(x')=[F(x'')-F(x')]-[H(x'')-H(x')],$$

где разность справа неотрицательна [она представляет собой меру множества значений $F(x)$ на совокупности точек непрерывности в интервале $x'$, $x''$]. Далее, в каждой точке $x$ существуют $G(x+0)=G(x)$ и $G(x-0)$ и

$$G(x+0)-G(x-0)= \\ =[F(x+0)-F(x-0)]-[H(x+0)-H(x-0)];$$

в силу указанных выше свойств функции $H(x)$ эта разность при каждом $x$ равна нулю, так что функция $G(x)$ непрерывна. Теорема доказана.

Замечание. Условие непрерывности справа, фигурирующее во всех наших построениях, можно отбросить, если соответственным образом обобщить понятие функции скачков. Пусть, например, заданы точки $x_n$ и неотрицательные числа $h_n$ и $h'_n$; функция, определяемая по формуле

$$H(x)=\sum_{x_n<x} h'_n+\sum_{x_n\leqslant x} h_n,$$

имеет в каждой точке $x_n$ скачок слева $h'_n$ (так что $H(x_n)-H(x_n-0)=h'_n$), скачок справа $h_n$ (так что $H(x_n+0)-H(x_n)=h'_n$) и общий скачок $h'_n+h_n$. Если $F(x)$ — неубывающая функция, имеющая в точках $x_n$ скачок слева $h'_n$ и скачок справа $h_n$, то, вычитая из нее соответствующую функцию $H(x)$, получим непрерывную и неубывающую разность $G(x)=F(x)-H(x)$.

## § 2. Функции с ограниченным изменением

1. Отправляясь от неубывающих функций, можно построить и более широкие классы функций, имеющих почти всюду производную. Очевидно, вместе с неубывающими функциями имеют почти всюду производную и их разности. Мы укажем далее внутреннее определение функций, являющихся разностями неубывающих. Введем следующее определение:

Определение. Функция $F(x)$, определенная на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, называется *функцией с ограниченным изменением*, если при любом разбиении отрезка $a\leqslant x\leqslant b$ на части точками деления

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

сумма

$$\sum_{k=0}^{n+1}|F(x_{k+1})-F(x_k)| \qquad (1)$$

остается меньше фиксированной постоянной.

Всякая *неубывающая* функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение, так как для нее сумма (1) не зависит от разбиения и равна $F(b)-F(a)$.

Сумма и разность двух функций с ограниченным изменением имеют, очевидно, также ограниченное изменение. В частности, разность двух