2. Дано, что для любого интервала Δ $\mu E(\Delta) \geqslant \alpha\mu\Delta$, где $\alpha > 0$ фиксировано; показать, что E имеет полную меру.

Указание. Дополнительное множество не имеет точек плотности.

Следствие. Не существует измеримого множества такого, что мера его части, попавшей на произвольный интервал, равна точно половине длины этого интервала.

3. Точка ξ называется *точкой асимптотической непрерывности* измеримой на $[a, b]$ функции $F(x)$, если существует измеримое множество E, имеющее точку ξ своей точкой плотности, на котором $F(x)$ непрерывна. Доказать, что почти каждая точка $\xi \in [a, b]$ есть точка асимптотической непрерывности функции $F(x)$.

Указание. Каждая точка плотности множества E_ε, $\mu E_\varepsilon > b - a - \varepsilon$, на котором $F(x)$ непрерывна (гл. IV, § 4, п. 7), удовлетворяет условию.

4. Проверить, что в каждой точке Лебега суммируемая функция $F(x)$ асимптотически непрерывна; если $F(x)$ ограничена, то верно и обратное.

5. Построить пример суммируемой функции, у которой в точке Лебега соотношение (2) не выполняется, если в качестве E_n выбирать некоторые множества, для которых $\frac{\mu E_n}{\mu \Delta_n} \to 0$.

§ 3. Восстановление функции по ее производной

Мы переходим теперь к решению проблемы II из введения к этой главе.

1. На отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ дана функция $F(x)$, обладающая почти всюду производной $F'(x) = \varphi(x)$.

Спрашивается: будет ли функция $\varphi(x)$ суммируемой и справедлива ли формула

$$F(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi + C? \tag{1}$$

Как мы знаем, необходимым условием для выполнения равенства (1) является наличие ограниченного изменения у функции $F(x)$. Будем считать, что оно выполнено, и на первых порах предположим, что $F(x)$ не убывает. Сначала ответим на первый вопрос: покажем, что *производная от неубывающей функции всегда суммируема.* Производная функции $F(x)$ есть предел отношения

$$\Phi_h(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Функции $\Phi_h(x)$ неотрицательны и при $h \to 0$ почти везде на отрезке $[a, b]$ сходятся к пределу $F'(x)$ [1]. Для доказательства суммируемости функции $F'(x)$ применим теорему Фату из § 3 гл. IV; она обеспечит суммируемость функции $F'(x)$, если интегралы от функций $\Phi_h(x)$ по отрезку $[a, b]$ остаются ограниченными. Если считать α и β точками

[1]) Если $x + h$ выходит за пределы отрезка $[a, b]$, продолжаем $F(x)$, как постоянную.

непрерывности всех $\Phi_h(x)$, то мы имеем:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi_h(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_{\alpha+h}^{\beta+h} F(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx = \\ = \frac{1}{h}\int_{\beta}^{\beta+h} F(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\alpha+h} F(x)\,dx.$$

Эта величина при $h \to 0$ имеет предел $F(\beta) - F(\alpha)$ и, следовательно, ограничена. Таким образом, теорему Фату можно применить. Вместе с суммируемостью функции $F'(x)$ она дает и неравенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} F'(x)\,dx \leqslant F(\beta) - F(\alpha) \leqslant F(b-0) - F(a+0).$$

Устремляя $\alpha \to a$, $\beta \to b$, получаем, что $F'(x)$ суммируема на $[a, b]$ и

$$\int_{a}^{b} F'(x)\,dx \leqslant F(b-0) - F(a+0).$$

В частности, если a и b суть точки непрерывности функции $F(x)$, то

$$\int_{a}^{b} F'(x)\,dx \leqslant F(b) - F(a). \tag{2}$$

Здесь фактически может быть и знак $<$, например, для ступенчатой функции $F(x)$, у которой производная почти всюду равна нулю.

2. Но оказывается, что и для *непрерывной* неубывающей функции $F(x)$ в неравенстве (2) п. 1 может фактически быть знак $<$.

Рассмотрим для примера какое-нибудь замкнутое нигде не плотное множество Z (например, канторово).

В свое время (гл. II, § 4) мы показали, что такое множество имеет мощность континуума. Вспомним это построение. Вначале мы установили соответствие между множеством всех смежных интервалов к множеству Z и множеством двоично-рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ с сохранением порядка, т. е. так, что если интервал Δ' лежит левее интервала Δ'', то соответствующие двоично-рациональные числа r' и r'' связаны неравенством $r' < r''$. Далее мы распространили это соответствие, с одной стороны, на все точки 2-го рода множества Z, с другой — на все двоично-иррациональные числа отрезка $[0, 1]$ также с сохранением порядка. Это соответствие определяет неубывающую функцию $F(x)$ переменного x, пробегающего весь отрезок $[a, b]$, на котором расположено множество Z; функция $F(x)$ изменяется от 0 до 1; в смежных интервалах множества Z она постоянна и принимает соответствующее двоично-рациональное значение, а в точках 2-го рода множества Z — соответствующее двоично-иррациональное значение. Эта функция, поскольку она не убывает и принимает все значения в интервале $[0, 1]$, непрерывна. Производная ее во всяком случае существует и равна нулю во всех точках смежных интервалов; поэтому, если множество Z имеет меру нуль, производная от $F(x)$ почти всюду равна нулю и в (2) имеет место знак $<$.

3. Таким образом, чтобы в выражении (2) п. 1 стоял знак равенства, нужно на неубывающую функцию $F(x)$ накладывать более сильные ограничения, чем непрерывность.

Определение. Функция $F(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *абсолютно непрерывной,* если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что, какова бы ни была (конечная) система неперекрывающихся интервалов $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ с общей длиной

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

соответствующая сумма абсолютных приращений функции не превосходит ε:

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Например, абсолютно непрерывна всякая функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$|F(x'') - F(x')| \leqslant C |x'' - x'|,$$

так как для любой системы интервалов $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \leqslant C \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k),$$

и чтобы сделать сумму слева меньше заданного $\varepsilon > 0$, нужно только, чтобы общая длина взятой системы интервалов не превосходила $\delta < \frac{\varepsilon}{C}$.

С другой стороны, неубывающая непрерывная функция $F(x)$, которую мы построили в п. 2, имеющая производную, почти всюду равную нулю, заведомо не абсолютно непрерывна. Действительно, множество Z можно покрыть счетной системой неперекрывающихся интервалов сколь угодно малой общей длины, на которых сумма приращений функции $F(x)$ равна 1; на достаточно большой конечной подсистеме сумма ее приращений заведомо превзойдет $\frac{1}{2}$, что несовместимо с определением абсолютной непрерывности.

Функция $F(x)$, являющаяся неопределенным интегралом суммируемой функции $\varphi(x)$, так что

$$F(x)=\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi,$$

всегда абсолютно непрерывна.

Действительно, мы имеем

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{a_k}^{b_k}\varphi(\xi)\,d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}|\varphi(\xi)|\,d\xi=\int_{\Sigma(a_k,\,b_k)}|\varphi(\xi)|\,d\xi,$$

и в силу абсолютной непрерывности интеграла по множеству (см. стр. 169) полученное выражение стремится к нулю вместе с мерой системы интервалов $(a_k,\ b_k)$.

Отметим несколько простых свойств абсолютно непрерывных функций.

Оказывается, в определении абсолютно непрерывной функции вместо неравенства (1) можно писать неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n}[F(b_k)-F(a_k)]\right|\leqslant\varepsilon, \tag{2}$$

что на первый взгляд кажется несколько неожиданным. Но, в самом деле, пусть для любой системы интервалов с общей длиной $<\delta$ выполняется (2). Тогда, фиксируя такую систему интервалов, мы выделим из нее две подсистемы так, что на интервалах первой приращения функции $F(x)$ положительны, а на интервалах второй — отрицательны. Записывая для каждой из этих подсистем неравенство (2) и складывая, мы и получаем (1) с несущественной заменой ε на 2ε.

Всякая абсолютно непрерывная функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение. Действительно, пусть число $\delta>0$ отвечает данному $\varepsilon>0$ из условия абсолютной непрерывности функции $F(x)$. Тогда в любом интервале длины $\leqslant\delta$ функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение, не превосходящее ε, а поэтому во всем промежутке $[a, b]$, который можно представить как соединение конечного числа отрезков длины $\leqslant\delta$, изменение функции $F(x)$ также конечно.

Абсолютно непрерывную функцию как функцию с ограниченным изменением можно представить в виде разности двух неубывающих:

$$F(x)=V(x)-G(x),\qquad V(x)=\mathbf{V}_a^x[F]. \tag{3}$$

Мы утверждаем, что уменьшаемое и вычитаемое в разложении (3) также абсолютно непрерывны. Проверим это для уменьшаемого $V(x)$.

Пусть задано $\varepsilon < 0$, найдено $\delta > 0$ из условия абсолютной непрерывности функции $F(x)$ и рассматривается система интервалов $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ с общей длиной $< \delta$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \{V(b_k) - V(a_k)\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}_{a_k}^{b_k}[F]. \tag{4}$$

Эта сумма есть точная верхняя грань величин

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} |F(x_{k, j+1}) - F(x_{kj})|, \tag{5}$$

где $a_k = x_{k_0} < x_{k1} < \ldots < x_{k\eta_k} = b_k$ есть произвольное подразбиение интервала (a_k, b_k). Так как сумма длин интервалов подразбиения интервала (a_k, b_k) равна длине самого интервала (a_k, b_k) и общая сумма длин интервалов (a_k, b_k) меньше δ, то в силу абсолютной непрерывности функции $F(x)$ каждое из выражений (5) не превосходит ε. Но тогда и сумма (4) не превосходит ε; отсюда следует, что функция $V(x)$ абсолютно непрерывна, что и утверждалось.

Как всякая функция с ограниченным изменением, абсолютно непрерывная функция имеет почти всюду производную. Для дальнейшего установим следующую лемму:

Лемма. *Если неубывающая абсолютно непрерывная функция $F(x)$ имеет производную, равную нулю почти всюду, то $F(x)$ постоянна.*

Доказательство. Область изменения функции $F(x)$ есть отрезок $S = [F(a), F(b)]$; мы докажем, что его мера равна нулю, чем и будет доказана теорема. Обозначим через Z множество (меры нуль) тех точек x, где производная или не существует, или не равна нулю, через E — множество (полной меры) тех точек, где производная $F(x)$ существует и равна нулю. Множество Z отображается функцией $F(x)$ в некоторое множество $F(Z)$, а множество E — в $F(E)$; очевидно, что $S = F(E) + F(Z)$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ из условия абсолютной непрерывности функции $F(x)$ и покроем множество Z (возможно, счетной) системой неперекрывающихся промежутков с общей длиной $< \delta$ [1]); тогда множество $F(Z)$ окажется покрытым системой промежутков с общей длиной $\leqslant \varepsilon$. Так как ε произвольно мало, то мера множества $F(Z)$ равна нулю. Далее, для каждой точки $x \in E$, поскольку в этой точке производная $F(x)$ равна нулю, можно указать точку $\xi > x$, для которой

$$F(\xi) - F(x) \leqslant \varepsilon(\xi - x),$$

[1]) Систему неперекрывающихся промежутков можно получить из любого покрытия $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots \supset Z$, выбрасывая из каждого Δ_n точки, входящие в $\Delta_1 + \ldots + \Delta_{n-1}$.

или, что то же самое,

$$\varepsilon\xi - F(\xi) \geqslant \varepsilon x - F(x).$$

Таким образом, x есть точка подъема вправо для функции $G(x) = \varepsilon x - F(x)$ (§ 1). По лемме Рисса множество точек подъема вправо открыто, и для составляющих интервалов (a_k, b_k) этого множества имеют место неравенства

$$\varepsilon a_k - F(a_k) \leqslant \varepsilon b_k - F(b_k)$$

или

$$F(b_k) - F(a_k) \leqslant \varepsilon(b_k - a_k),$$

откуда

$$\sum [F(b_k) - F(a_k)] \leqslant \varepsilon \sum (b_k - a_k) \leqslant \varepsilon(b - a).$$

Таким образом, множество $F(E)$ покрывается системой промежутков $(F(a_k), F(b_k))$ с общей длиной как угодно малой. Отсюда $F(E)$ имеет меру нуль. Следовательно, и отрезок $S = F(Z) + F(E)$ имеет меру нуль, т. е. сводится в одну точку, что и требуется.

Замечание. Анализируя приведенное доказательство, заметим, что из него можно извлечь и несколько более общие результаты, а именно:

а) если функция $F(x)$ не убывает и абсолютно непрерывна, то образ $F(Z)$ любого множества Z меры нуль есть множество меры нуль;

б) если функция $F(x)$ не убывает и имеет на множестве E производную, равную нулю, то образ $F(E)$ множества E имеет меру нуль.

Теперь мы можем доказать основную теорему этого параграфа, дающую решение проблемы II.

Теорема (А. Лебег). *Производная* $\varphi(x)$ *абсолютно непрерывной функции* $F(x)$, *определенной на отрезке* $[a, b]$, *суммируема, и для каждого* x

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Доказательство. Абсолютно непрерывную функцию $F(x)$ можно представить в виде разности неубывающих абсолютно непрерывных функций; поэтому без ограничения общности можно считать, что $F(x)$ — неубывающая функция. Пусть $\varphi(x)$ — ее производная; по доказанному, $\varphi(x)$ суммируема. Положим:

$$G(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi.$$

Функция $G(x)$ абсолютно непрерывна, и, как мы видели в § 2, ее производная совпадает почти всюду с $\varphi(x)$. Но производная абсолютно непрерывной функции $F(x)$ также совпадает с функцией $\varphi(x)$; поэтому производная разности $H(x) = F(x) - G(x)$ почти всюду равна нулю. Заметим, что функция $H(x)$ также не убывает, поскольку в силу неравенства (2) п. 1

$$H(\beta) - H(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx \geqslant 0.$$

Поэтому согласно лемме $H(x)$ есть постоянная, например C_0. Но тогда мы имеем:

$$F(x) = G(x) + H(x) = \int_{a}^{x} \varphi(\xi) + C_0.$$

Полагая $x = a$, получаем значение $C_0 = F(a)$. Теорема доказана.

Рассмотрим неубывающую непрерывную, но не абсолютно непрерывную функцию $F(x)$. Повторяя для нее предыдущее рассуждение, мы получим, что разность

$$Z(x) = F(x) - G(x)$$

есть неубывающая непрерывная функция с производной, почти всюду равной нулю. Так как $Z(x)$ вместе с $F(x)$ не является абсолютно непрерывной, то $Z(x)$ — не постоянная. Мы получаем представление непрерывной неубывающей функции $F(x)$ в форме суммы двух неубывающих непрерывных функций

$$F(x) = G(x) + Z(x), \tag{4}$$

первая из которых абсолютно непрерывна, а вторая имеет производную, почти всюду равную нулю.

Для произвольной неубывающей функции (возможно, разрывной) это разложение в соответствии с последним пунктом § 1 дополняется еще одним слагаемым — функцией скачков $H(x)$:

$$F(x) = G(x) + Z(x) + H(x).$$

От неубывающих функций легко перейти к функциям с ограниченным изменением. Равенство (4) остается в силе и для непрерывной функции $F(x)$ с ограниченным изменением; при этом $G(x)$ — абсолютно непрерывная функция, $Z(x)$ — так называемая сингулярная функция, т. е. непрерывная функция с ограниченным изменением, имеющая производную, почти всюду равную нулю.

Заметим кстати, что разложение данной непрерывной функции $F(x)$ на абсолютно непрерывную и сингулярную составляющие может быть единственным лишь с точностью до аддитивной постоянной. Пусть, в самом деле,

$$F(x) = G(x) + Z(x) = G_1(x) + Z_1(x),$$

где G и G_1 абсолютно непрерывны, Z и Z_1 сингулярны; тогда

$$G - G_1 = Z_1 - Z$$

и функция $G - G_1$, абсолютно непрерывная и вместе с правой частью имеющая производную, почти всюду равную нулю, необходимо должна быть постоянной.

4. Интегрирование по частям. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — суммируемые функции и $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ — их неопределенные интегралы. Имеет место формула

$$\int_a^b \Phi(x)\psi(x)\,dx + \int_a^b \Psi(x)\varphi(x)\,dx = \Phi(b)\Psi(b) - \Phi(a)\Psi(a). \quad (1)$$

Для доказательства достаточно заметить, что функция $\Phi(x)\Psi(x)$ абсолютно непрерывна вместе с $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ и ее производная выражается по обычной формуле

$$(\Phi(x)\Psi(x))' = \Phi(x)\psi(x) + \varphi(x)\Psi(x),$$

из которой (1) получается интегрированием в пределах от a до b.

Задачи. **1.** Построить непрерывную функцию, у которой производная существовала бы всюду, но не была бы суммируемой.

Отв. Например, $y = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$.

2. Дано, что функция $F(x)$ удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $\sum (b_k - a_k) < \delta$ вытекает $\sum |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$ (т. е. в условии абсолютной непрерывности опущено требование неперекрывания интервалов (a_k, b_k)). Показать, что $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|F(x'') - F(x')| \leqslant C|x'' - x'|.$$

3. Доказать теорему, обратную лемме (стр. 290, Замечание): если функция $F(x)$ не убывает и образ $F(Z)$ множества Z, где производная $F(x)$ не существует или бесконечна, имеет меру нуль, то $F(x)$ абсолютно непрерывна.

4. Если $F(x)$ абсолютно непрерывна, то и $|F(x)|^p$ при $p \geqslant 1$ также абсолютно непрерывна; для $p < 1$ теорема неверна.

5. Пусть $\varphi(x)$ — суммируемая функция на отрезке $[a, b]$; доказать, что полное изменение функции $F(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi$ равно $\int_a^b |\varphi(\xi)|\,d\xi$.

Указание. Следствие задачи 7 п. 2 § 2. Независимое построение: аппроксимировать $\varphi(x)$ в метрике L_1 ступенчатыми функциями.

6. Показать, что абсолютно непрерывные функции образуют замкнутое подпространство в пространстве функций с ограниченным изменением (см. задачу 6 п. 2 § 2).