§ 4. Функции нескольких переменных

1. Мы ставим себе задачей теперь перенесение результатов §§ 1—3, относящихся к случаю одного переменного, на случай нескольких переменных. Будем рассматривать для простоты случай двух переменных.

Начнем с формулировки известных фактов классического анализа. Если $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция, то можно образовать ее интеграл по любой (замкнутой) области G:

$$\Phi(G) = \iint\limits_G \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Он заменяет, естественно, неопределенный интеграл $\int\limits_a^x \varphi(\xi)\, d\xi$, который мы рассматривали, когда имели дело с одним переменным.

Функция точки $\varphi(x, y)$ может быть получена из функции области $\Phi(G)$ с помощью предельной операции, заменяющей дифференцирование:

$$\varphi(x, y) = \lim_{G \to (x, y)} \frac{1}{|G|} \iint\limits_G \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где $|G|$ обозначает площадь области G, а $G \to (x, y)$ означает, что область G стягивается в точку (x, y). Если теперь $\varphi(\xi, \eta)$ — произвольная суммируемая функция, определенная в прямоугольнике $\Delta = \{a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$, то вместо области G мы можем взять любое измеримое множество $\mathcal{E}$. Естественно возникают следующие проблемы:

Проблема III. *Имеет ли место предельное соотношение*

$$\varphi(x, y) = \lim_{\mathcal{E} \to (x, y)} \frac{1}{\mu\mathcal{E}} \iint\limits_{\mathcal{E}} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

почти всюду в области Δ, если $\varphi(x, y)$ — произвольная суммируемая функция?

Обратная задача может быть поставлена следующим образом:

Проблема IV. *Пусть задана функция измеримого множества $\Phi(\mathcal{E})$; в каком случае можно утверждать, что (хотя бы почти всюду) существует ее «плотность»*

$$\varphi(x, y) = \lim_{\mathcal{E} \to (x, y)} \frac{\Phi(\mathcal{E})}{\mu\mathcal{E}},$$

и при каких условиях функция $\Phi(\mathscr{E})$ восстанавливается по своей плотности в форме интеграла

$$\Phi(\mathscr{E}) = \iint\limits_{\mathscr{E}} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta?$$

Решение обеих проблем мы сведем к решению аналогичных проблем для одного переменного, рассмотренных в §§ 1—3, с помощью так называемого принципа соответствия Рисса.

2. Теорема 1 (принцип соответствия Ф. Рисса). *Между множеством почти всех точек плоскости и множеством почти всех точек прямой можно установить взаимно однозначное соответствие так, что измеримые подмножества будут соответствовать измеримым, и притом равной меры.*

Доказательство. Разобьем ось ξ на интервалы $(m, m+1)$ длины 1 и плоскость (x, y) — на квадраты со стороной 1 с вершинами в целых точках. Сопоставим произвольным образом взаимно однозначно указанные интервалы оси с указанными квадратами плоскости; тех и других счетное множество, и сопоставление возможно. Далее разделим каждый квадрат на 4 равных квадрата площадью $\frac{1}{4}$, соответствующий интервал — на 4 равных интервала длины $\frac{1}{4}$, и опять-таки произвольно сопоставим каждый из этих меньших квадратов с одним из указанных меньших интервалов. Будем это построение продолжать неограниченно, следя лишь за тем, чтобы с интервалами, получающимися при делении на 4 части очередного интервала Δ, сопоставлялись квадраты, получающиеся при делении на 4 части квадрата, соответствующего интервалу Δ. Совокупность всех полученных при этом квадратов на плоскости будем называть *плоской сетью,* а совокупность интервалов на оси — *линейной сетью.*

По построению каждой последовательности вложенных друг в друга квадратов плоской сети отвечает последовательность вложенных друг в друга промежутков линейной сети, и обратно. Мы продолжим это соответствие на соответствие между точками плоскости и точками прямой следующим образом.

Для определенности будем рассматривать только «правильные» последовательности квадратов и промежутков, т. е. такие, n-й член которых имеет меру (площадь или длину) ровно $\frac{1}{4^n}$.

Если точка на плоскости имеет обе координаты двоично-иррациональные, то существует единственная правильная последовательность квадратов плоской сети, содержащих эту точку. Рассматривая соответствующую последовательность промежутков оси, получим в их пересечении однозначно определенную точку оси, которую и поставим в соответствие взятой точке плоскости. Если точка на плоскости имеет одну координату (или обе) двоично-рациональную, то существуют две (или четыре) правильные последовательности квадратов плоской сети, содержащих эту точку; таким образом, мы можем ей сопоставить две (или четыре) точки оси. Так как множество всех точек плоскости с хотя бы одной рациональной координатой, как множество меры нуль, покрывается системой квадратов сети с общей площадью сколь угодно малой, то и совокупность соответствующих двоек и четверок точек оси покрывается системой промежутков с такой же общей длиной и, следовательно, имеет линейную меру нуль. (Очевидно, четверок даже не более счетного множества.) Обратно, если точка оси имеет двоично-иррациональную координату, то ей можно сопоставить однозначно определенную точку плоскости, используя единственную правильную последовательность промежутков, содержащую эту точку. Если же точка на прямой имеет двоично-рациональную координату, то ей сопоставляется, вообще говоря, пара точек плоскости; но множество всех точек плоскости, участвующих в таких парах, не более чем счетно.

В итоге мы получаем возможность сопоставить взаимно однозначно два множества полной меры; множество точек плоскости с обеими двоично-иррациональными координатами, за вычетом тех, которые участвуют в указанных парах, и множество точек оси с двоично-иррациональной координатой, за вычетом множества меры нуль точек, участвующих в указанных двойках и четверках. Покажем, что при этом соответствии *каждое измеримое множество*, например, в промежутке $[0, 1]$ *переходит в измеримое множество* в соответствующем квадрате *с той же мерой*. Вначале заметим, что каждое открытое множество на оси может быть представлено в виде объединения некоторого (счетного) множества промежутков сети без общих внутренних точек. Пусть E — произвольное измеримое множество на отрезке $[0, 1]$. Существуют последовательности открытых множеств O_n и O'_n $(n=1, 2, \ldots)$, которые обладают тем свойством, что

$$O_n \supset E, \quad O'_n \supset CE,$$
$$1 \leqslant \mu O_n + \mu O'_n \leqslant 1 + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Пусть $\mathscr{E}$ — образ множества E на плоскости. Рассматривая совокупность множеств G_n и G'_n на плоскости, составленных из квадратов, соответствующих двоично-рациональным промежуткам, входящим в O_n и O'_n, мы получим соотношения

$$G_n \supset \mathscr{E}, \quad G'_n \supset C\mathscr{E},$$
$$1 \leqslant \mu G_n + \mu G'_n \leqslant 1 + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Из этих соотношений следует, что $\mathscr{E}$ измеримо (гл. IV, § 4, п. 5) и что оно имеет меру

$$\mu\mathscr{E} = \lim \mu G_n = \lim \mu O_n = \mu E,$$

что нам и требовалось.

Мы можем, далее, распространить соответствие и на измеримые функции на оси и на плоскости, ставя в соответствие функции $f(\xi)$ такую функцию $\varphi(x, y)$, для которой $\varphi(x, y) = f(\xi)$, если (x, y) соответствует точке ξ. При этом функции $f(\xi)$ и $\varphi(x, y)$ не только измеримы, но даже «равноизмеримы» в том смысле, что при любом C множества $\{\xi: f(\xi) < C\}$ и $\{(x,y): \varphi(x, y) < C\}$ имеют равную меру. Отсюда следует далее, что интегралы от функций $f(\xi)$ и $\varphi(x, y)$ по соответствующим измеримым множествам E и $\mathscr{E}$ имеют равные значения.

3. Мы можем теперь приступить к решению проблемы III. Будем говорить, что последовательность $\mathscr{E}_n$ плоских измеримых множеств *правильно стягивается* к точке $P = (x, y)$, если существует последовательность квадратов Q_n плоской сети, содержащая точку P, причем $\mu Q_n \to 0$, $\mathscr{E}_n \subset Q_n$, $\mu\mathscr{E}_n \geqslant \alpha\mu Q_n$, где $\alpha > 0$ — фиксированная постоянная.

Теорема 2. *Если $\varphi(x, y)$ суммируема на прямоугольнике Δ, то почти для всех точек этого прямоугольника*

$$\varphi(x, y) = \lim_{\mathscr{E}_n \to (x, y)} \frac{1}{\mu\mathscr{E}_n} \iint_{\mathscr{E}_n} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{1}$$

какова бы ни была последовательность измеримых множеств $\mathscr{E}_n$, правильно стягивающаяся к точке (x, y).

Доказательство. Суммируемой функции $\varphi(x, y)$ в силу принципа соответствия отвечает суммируемая функция $f(\xi)$, точке (x, y) в плоскости — точка ξ на оси, последовательности квадратов Q_n — последовательность интервалов Δ_n, содержащих точку ξ, и последовательности множеств $\mathscr{E}_n$ — последовательность измеримых множеств $E_n \subset \Delta_n$, причем $\mu E_n \geqslant \alpha\mu\Delta_n$; кроме того, имеет место равенство

$$\frac{1}{\mu\mathscr{E}_n} \iint_{\mathscr{E}_n} \varphi(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{\mu E_n} \int_{E_n} f(\xi)\, d\xi.$$

По лемме § 2 (п. 4) последнее выражение имеет пределом $f(x)$ почти во всех точках, именно во всех точках Лебега функции $f(\xi)$. Возвращаясь к функции $\varphi(x, y)$, получаем, что предельное соотношение (1) выполнено почти во всех точках прямоугольника Δ, что и требовалось.

4. Переходим теперь к решению проблемы IV.

Нам задана функция $\Phi(\mathscr{E})$ измеримого множества $\mathscr{E}$; спрашивается: когда можно утверждать, что функция $\Phi(\mathscr{E})$ представляется в виде

$$\Phi(\mathscr{E}) = \iint_{\mathscr{E}} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{1}$$

где $\varphi(x, y)$ — суммируемая функция?

Укажем вначале необходимые условия такой представимости. Если функция $\Phi(\mathscr{E})$ имеет вид (1), то она обладает следующими очевидными свойствами:

а) аддитивность: $\Phi(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2) = \Phi(\mathscr{E}_1) + \Phi(\mathscr{E}_2)$, если измеримые множества $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ не имеют общих точек;

б) абсолютная непрерывность: для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что из $\mu\mathscr{E} < \delta$ следует $|\Phi(\mathscr{E})| < \varepsilon$ (см. стр. 169 и 174).

Покажем, что этих свойств функции $\Phi(\mathscr{E})$ — даже распространенных не на все измеримые множества, а лишь на те, которые составлены из квадратов сети,— достаточно, чтобы утверждать, что функция $\Phi(\mathscr{E})$ представляется в форме (1).

В силу принципа соответствия функции $\Phi(\mathscr{E})$ можно сопоставить функцию $\Psi(E)$, определенную на измеримых подмножествах оси x. От функции множества $\Psi(E)$ можно перейти к функции точки $F(x)$, полагая $F(x)$ равной значению $\Psi(E)$ на интервале $E = (a, x)$. Полученная функция $F(x)$ абсолютно непрерывна в обычном смысле; действительно, для заданной системы непересекающихся интервалов $\Delta_k = (a_k, b_k)$ с общей длиной $< \delta$

$$\sum [F(b_k) - F(a_k)] = \sum \Psi(\Delta_k) = \sum \Phi(\mathscr{E}_k) = \Phi\left(\sum \mathscr{E}_k\right), \tag{2}$$

где $\mathscr{E}_k$ — множество на плоскости, соответствующее интервалу Δ_k. Так как сумма мер множеств $\mathscr{E}_k$ вместе с суммой длин интервалов Δ_k меньше δ, то каждая из сумм (2) по абсолютной величине меньше ε, что и требовалось. Согласно основной теореме § 3 функция $F(x)$ представляется в форме интеграла от своей производной $\varphi(x) = F'(x)$:

$$F(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi + F(a).$$

Суммируемой функции $\varphi(\xi)$ отвечает по принципу соответствия суммируемая функция $\varphi(x, y)$ на плоскости. Покажем, что функция множества

$$G(\mathscr{E}) = \iint_{\mathscr{E}} \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

совпадает с исходной функцией $\Phi(\mathscr{E})$. Так как $\Phi(\mathscr{E})$ и $G(\mathscr{E})$ аддитивны и абсолютно непрерывны, то совпадение достаточно доказать для множеств $\mathscr{E}$, являющихся квадратами сети, поскольку согласно теореме п. 3 § 4 гл. IV любое измеримое множество может быть заменено конечной суммой таких квадратов с точностью до множества как угодно малой меры. Но если $\mathscr{E}$ — квадрат сети, то ему соответствует интервал сети на прямой, например $\Delta=(\alpha, \beta)$; поэтому

$$\Phi(\mathscr{E})=\Psi(\Delta)=F(\beta)-F(\alpha)=\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx,$$

$$G(\mathscr{E})=\iint_{\mathscr{E}} \varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta=\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx,$$

откуда $\Phi(\mathscr{E})=G(\mathscr{E})$, что и требовалось.

По доказанному выше функция $\varphi(\xi, \eta)$ может быть и непосредственно получена из $\Phi(\mathscr{E})$ с помощью предельной операции

$$\varphi(x, y)=\lim_{\mathscr{E}_n\to(x, y)} \frac{1}{\mu\mathscr{E}_n}\iint_{\mathscr{E}_n} \varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta=\lim_{\mathscr{E}_n\to(x, y)} \frac{\Phi(\mathscr{E}_n)}{\mu\mathscr{E}_n},$$

где $\mathscr{E}_n$ — правильно стягивающаяся к точке (x, y) последовательность измеримых множеств; предел существует почти в каждой точке. Итак, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Для того чтобы функция множеств $\Phi(\mathscr{E})$ имела почти в каждой точке плотность $\varphi(x, y)$ и была справедлива для каждого измеримого множества $\mathscr{E}$ формула*

$$\Phi(\mathscr{E})=\iint_{\mathscr{E}} \varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(\mathscr{E})$ была аддитивна и абсолютно непрерывна.

5. В качестве применения доказанной теоремы найдем общий вид линейного непрерывного функционала $f[\varphi]$ в пространстве $L_1(D)$ всех функций, интегрируемых в данной плоской области D.

Условие непрерывности функционала f можно записать в виде неравенства

$$|f[\varphi]|\leqslant C\|\varphi\|=C\iint_D |\varphi(x, y)|\,dx\,dy$$

с фиксированной постоянной C.

Сопоставим функционалу f функцию измеримого множества $F(\mathscr{E})$, равную значению функционала f на характеристической функции $\chi_{\mathscr{E}}$ множества $\mathscr{E}$. Функция $F(\mathscr{E})$ аддитивна вместе с функционалом f и удовлетворяет неравенству

$$|F(\mathscr{E})|=|f(\chi_{\mathscr{E}})|\leqslant C\iint_{\mathscr{E}} \chi_{\mathscr{E}}(x, y)\,dx\,dy=C\mu\mathscr{E}, \tag{3}$$

откуда следует, что $F(\mathscr{E})$ абсолютно непрерывна. По теореме 3 функция $F(\mathscr{E})$ обладает почти в каждой точке плотностью

$$g(x,\ y)=\lim_{\mathscr{E}_n\to(x,\ y)}\frac{F(\mathscr{E}_n)}{\mu\mathscr{E}_n}.$$

Очевидно, что функция $g(x,\ y)$ по модулю не превосходит C. Функция $F(\mathscr{E})$ по той же теореме 3 восстанавливается через $g(x,\ y)$ по формуле

$$F(\mathscr{E})=\iint_{\mathscr{E}} g(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta=\iint_D \chi_{\mathscr{E}}(\xi,\ \eta)\,g(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Итак, для характеристических функций измеримых множеств

$$f[\chi_{\mathscr{E}}]=F(\mathscr{E})=\iint_D \chi_{\mathscr{E}}(x,\ y)\,g(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Функционал

$$f_1[\varphi]=\iint_D \varphi(x,\ y)\,g(x,\ y)\,dx\,dy,$$

очевидно, является линейным непрерывным функционалом на пространстве $L_1(D)$. Он совпадает с функционалом $f[\varphi]$ на характеристических функциях измеримых множеств; но тогда он совпадает с f и на всех ступенчатых функциях и в пределе вообще на всех функциях $\varphi\in L_1(D)$.

Итак, $f=f_1$, и мы доказали следующую теорему:

Теорема. *Каждый линейный непрерывный функционал $f[\varphi]$ в пространстве $L_1(D)$ имеет вид*

$$f[\varphi]=\iint_D \varphi(x,\ y)\,g(x,\ y)\,dx\,dy,$$

где $g(x,\ y)$ — ограниченная измеримая функция.

Не требует разъяснений, что аналогичная теорема справедлива для случая функций любого числа независимых переменных.

6. Теорема 3, доказанная в п. 4, является аналогом теоремы о дифференцируемости и об интегральном представлении абсолютно непрерывной функции одного переменного (§ 3).

Рассмотрим теперь, какой аналог имеет теорема о разложении любой монотонной — например, неубывающей — непрерывной функции $F(x)$ на абсолютно непрерывную и сингулярную составляющие.

Неубывающей непрерывной функции $F(x)$ соответствует неотрицательная аддитивная функция интервала сети $(\alpha,\ \beta)$, равная $F(\beta)-F(\alpha)$, которую можно распространить и на любые конечные системы интервалов сети (пользуясь аддитивностью). По принципу соответствия на системах квадратов сети в плоскости будет задана неотрицательная аддитивная функция $\Phi(\mathscr{E})$. Функция $\Phi(\mathscr{E})$ непрерывна в том смысле, что если квадрат сети $\mathscr{E}_n$ стягивается в точку (может быть, граничную), то $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(\mathscr{E}_n)=0$. Обратно, любой аддитивной неотрицательной непрерывной функции $\Phi(\mathfrak{E})$, определенной на конечных системах квадратов сети, отвечает неотрицательная непрерывная функция интервалов сети (α, β) и, следовательно, неубывающая непрерывная функция $F(x)$.

Разложим функцию $F(x)$ на абсолютно непрерывную и сингулярную составляющие:

$$F(x) = G(x) + Z(x).$$

Этому разложению отвечает разложение функции множества также на две составляющие:

$$\Phi(\mathfrak{E}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{E}) + \mathfrak{Z}(\mathfrak{E}).$$

Первая составляющая $\mathfrak{G}(\mathfrak{E})$ абсолютно непрерывна и представляется в форме интеграла от своей плотности. Рассмотрим, каким свойством обладает вторая составляющая $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$. Пусть ξ_0 — любая точка, в которой производная функции $Z(x)$ равна нулю, и (x_0, y_0) — соответствующая точка в плоскости; пусть, далее, $\mathfrak{E}_n$ — последовательность измеримых множеств специального вида, именно конечных систем квадратов сети, правильно стягивающаяся к точке (x_0, y_0). Множество $\mathfrak{E}_n$ заключено в квадрате сети Q_n и $\mu\mathfrak{E}_n \geqslant \alpha\mu Q_n$, $\alpha > 0$. Квадрат сети Q_n соответствует интервалу (α_n, β_n), стягивающемуся к точке ξ_0. Поэтому

$$\frac{\mathfrak{Z}(\mathfrak{E}_n)}{\mu\mathfrak{E}_n} \leqslant \frac{\alpha^{-1}}{\mu Q_n}\mathfrak{Z}(\mathfrak{E}_n) \leqslant \frac{\alpha^{-1}}{\beta_n - \alpha_n}[Z(\beta_n) - Z(\alpha_n)] \to 0,$$

так как в точке ξ_0 производная у функции $Z(x)$ равна нулю. Таким образом, если определять плотность с помощью только квадратов сети и их конечных сумм, правильно стягивающихся к точке (x, y), то плотность функции $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$ также оказывается почти всюду равной нулю.

Замечание. При рассмотрении неабсолютно непрерывных функций множеств $\Phi(\mathfrak{E})$ мы были вынуждены ограничиться их значениями не на всех измеримых по Лебегу множествах, а только на квадратах сети и их конечных объединениях. Это ограничение было не случайным. На самом деле, пользуясь процессом, аналогичным построению системы измеримых по Лебегу множеств, начиная от интервалов (гл. IV, § 4), для каждой неотрицательной счетно-аддитивной функции прямоугольников $\Phi(\mathfrak{E})$ можно определить систему $\sigma(\Phi)$ множеств, измеримых по функции Φ, или, короче, Φ-измеримых. Но *если $\Phi(\mathfrak{E})$ непрерывна и не абсолютно непрерывна, то система $\sigma(\Phi)$ заведомо содержит не все множества, измеримые по Лебегу*. Действительно, в этом случае всегда существует несчетное множество $\mathfrak{E}_0$, у которого $\mu\mathfrak{E}_0 = 0$, $\Phi(\mathfrak{E}_0) > 0$; далее можно найти $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}_0$, уже Φ-неизмеримое, так что $\mathfrak{E}_1 \overline{\in} \sigma(\Phi)$; в то же время $\mathfrak{E}_1$ измеримо по Лебегу и $\mu\mathfrak{E}_1 = \mu\mathfrak{E}_0 = 0$.

§ 5. Интеграл Стильтьеса

1. При построении теории интеграла мы отправлялись от известных значений интегралов ступенчатых функций. Интеграл от «элементарной ступеньки» — функции, равной 1 на интервале Δ и 0 вне этого интервала,— мы полагали равным длине интервала Δ. Интервалам равной длины отвечали одинаковые значения интегралов, так что при интегрировании прямая представляла собой совершенно однородное многообразие, устроенное одинаково во всех своих частях. Но