неотрицательной непрерывной функции $\Phi(\mathfrak{E})$, определенной на конечных системах квадратов сети, отвечает неотрицательная непрерывная функция интервалов сети (α, β) и, следовательно, неубывающая непрерывная функция $F(x)$.

Разложим функцию $F(x)$ на абсолютно непрерывную и сингулярную составляющие:

$$F(x) = G(x) + Z(x).$$

Этому разложению отвечает разложение функции множества также на две составляющие:

$$\Phi(\mathfrak{E}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{E}) + \mathfrak{Z}(\mathfrak{E}).$$

Первая составляющая $\mathfrak{G}(\mathfrak{E})$ абсолютно непрерывна и представляется в форме интеграла от своей плотности. Рассмотрим, каким свойством обладает вторая составляющая $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$. Пусть ξ_0 — любая точка, в которой производная функции $Z(x)$ равна нулю, и (x_0, y_0) — соответствующая точка в плоскости; пусть, далее, $\mathfrak{E}_n$ — последовательность измеримых множеств специального вида, именно конечных систем квадратов сети, правильно стягивающаяся к точке (x_0, y_0). Множество $\mathfrak{E}_n$ заключено в квадрате сети Q_n и $\mu\mathfrak{E}_n \geqslant \alpha\mu Q_n$, $\alpha > 0$. Квадрат сети Q_n соответствует интервалу (α_n, β_n), стягивающемуся к точке ξ_0. Поэтому

$$\frac{\mathfrak{Z}(\mathfrak{E}_n)}{\mu\mathfrak{E}_n} \leqslant \frac{\alpha^{-1}}{\mu Q_n}\mathfrak{Z}(\mathfrak{E}_n) \leqslant \frac{\alpha^{-1}}{\beta_n - \alpha_n}[Z(\beta_n) - Z(\alpha_n)] \to 0,$$

так как в точке ξ_0 производная у функции $Z(x)$ равна нулю. Таким образом, если определять плотность с помощью только квадратов сети и их конечных сумм, правильно стягивающихся к точке (x, y), то плотность функции $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$ также оказывается почти всюду равной нулю.

З а м е ч а н и е. При рассмотрении неабсолютно непрерывных функций множеств $\Phi(\mathfrak{E})$ мы были вынуждены ограничиться их значениями не на всех измеримых по Лебегу множествах, а только на квадратах сети и их конечных объединениях. Это ограничение было не случайным. На самом деле, пользуясь процессом, аналогичным построению системы измеримых по Лебегу множеств, начиная от интервалов (гл. IV, § 4), для каждой неотрицательной счетно-аддитивной функции прямоугольников $\Phi(\mathfrak{E})$ можно определить систему $\sigma(\Phi)$ множеств, измеримых по функции Φ, или, короче, Φ-измеримых. Но *если $\Phi(\mathfrak{E})$ непрерывна и не абсолютно непрерывна, то система $\sigma(\Phi)$ заведомо содержит не все множества, измеримые по Лебегу.* Действительно, в этом случае всегда существует несчетное множество $\mathfrak{E}_0$, у которого $\mu\mathfrak{E}_0 = 0$, $\Phi(\mathfrak{E}_0) > 0$; далее можно найти $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}_0$, уже Φ-неизмеримое, так что $\mathfrak{E}_1 \overline{\in} \sigma(\Phi)$; в то же время $\mathfrak{E}_1$ измеримо по Лебегу и $\mu\mathfrak{E}_1 = \mu\mathfrak{E}_0 = 0$.

§ 5. Интеграл Стильтьеса

1. При построении теории интеграла мы отправлялись от известных значений интегралов ступенчатых функций. Интеграл от «элементарной ступеньки» — функции, равной 1 на интервале Δ и 0 вне этого интервала, — мы полагали равным длине интервала Δ. Интервалам равной длины отвечали одинаковые значения интегралов, так что при интегрировании прямая представляла собой совершенно однородное многообразие, устроенное одинаково во всех своих частях. Но во многих вопросах по существу нельзя считать ось однородной. В некоторых случаях, как, например, для неоднородной струны или неоднородного стержня, мы учитывали неоднородность введением переменной плотности. К сожалению, введение плотности не всегда спасает от затруднений (пример: струна, нагруженная точечными бусинками). Наиболее целесообразный подход к рассмотрению такого рода проблем — введение меры промежутков, учитывающей неоднородность оси.

Промежутком оси будем считать любой из пяти следующих видов множеств:

1) отрезок $[\alpha, \beta]$ (концы включены);
2) интервал (α, β) (концы исключены);
3) полуинтервал $(\alpha, \beta]$ (включен правый конец);
4) полуинтервал $[\alpha, \beta)$ (включен левый конец);
5) отдельная точка $[\alpha]$.

Пусть каждому промежутку Δ на отрезке $[a, b]$ сопоставлено некоторое неотрицательное число $\rho\Delta$, причем выполняется условие полной аддитивности: если промежуток Δ есть объединение промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \ldots$ без общих точек, то

$$\rho\Delta = \rho\Delta_1 + \rho\Delta_2 + \ldots + \rho\Delta_n + \ldots$$

Мы говорим в таком случае, что нам задана *мера Стильтьеса.*

Возможны случаи, когда отдельные точки имеют положительную меру Стильтьеса. Впрочем, это может случиться сравнительно редко, самое большее для счетного множества точек, поскольку лишь конечное число точек могут иметь меру, превосходящую заданную постоянную $c > 0$.

Примеры. *1.* $\rho\Delta$ есть длина промежутка Δ (мера Лебега).

2. $\rho\Delta = \int\limits_{\Delta} \varphi(x)\, dx,$

где $\varphi(x)$ — фиксированная неотрицательная суммируемая функция.

3. $\rho\Delta$ равна 1 для всякого Δ, содержащего точку c, и 0 для всякого Δ, не содержащего точки c.

Условие полной аддитивности меры можно заменить на два условия: условие ее (конечной) аддитивности и условие непрерывности.

а) Условие аддитивности: если промежутки Δ_1 и Δ_2 не имеют общих точек, то

$$\rho(\Delta_1 + \Delta_2) = \rho\Delta_1 + \rho\Delta_2.$$

Естественно, что свойство аддитивности, если оно имеет место для каждой пары непересекающихся слагаемых, остается справедливым и для любого конечного числа непересекающихся слагаемых $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$:

$$\rho(\Delta_1 + \ldots + \Delta_n) = \rho\Delta_1 + \ldots + \rho\Delta_n.$$

б) Условие непрерывности: если последовательность вложенных друг в друга промежутков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ имеет в пересечении промежуток Δ, то $\rho\Delta = \lim \rho\Delta_n$.

Легко убедиться, что свойства а) и б) вытекают из условия полной аддитивности. Обратное,— что условие полной аддитивности есть следствие условий а) и б),— менее просто; мы получим этот вывод ниже из теории интеграла (стр. 304).

Можно рассматривать меру $\rho\Delta$ не только на отрезке $[a, b]$, но и на всей прямой $-\infty < x < \infty$. При этом, если мера всей прямой конечна, то этот случай ничем не отличается от случая меры, заданной на конечном отрезке, так что во всем дальнейшем можно без всяких изменений заменить отрезок $[a, b]$ на всю прямую при условии конечности ее меры.

Имея меру Стильтьеса, мы определим и соответствующий интеграл. Начинаем, как обычно, с интегрирования ступенчатых функций. Разобьем отрезок $[a, b]$ на конечное множество неперекрывающихся промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Функция $h(x)$, принимающая постоянное значение h_j на интервале Δ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, называется ступенчатой функцией. Определим интеграл Стильтьеса от функции $h(x)$ по формуле

$$I_\rho h = \sum_{j=1}^{n} h_j \rho\Delta_j.$$

Далее мы будем распространять понятие интеграла со ступенчатых функций на ρ-измеримые функции — пределы последовательностей ступенчатых функций, как мы делали в гл. IV для интеграла Лебега. На пути этого построения важным этапом было понятие множества меры нуль. В нашей новой схеме множество $Z \subset [a, b]$ называется множеством (стильтьесовской) меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ оно покрывается конечной или счетной системой интервалов с общей мерой Стильтьеса $< \varepsilon$. Заметим, что теперь отдельные точки могут быть множествами положительной меры и целые отрезки могут иметь меру нуль (как в примере 3). Последовательность функций $f_n(x)$ называется почти всюду сходящейся, если она сходится во всех точках отрезка, кроме, может быть, множества (стильтьесовской) меры нуль.

В частности, последовательность, сходящаяся почти всюду, должна фактически сходиться в точках, несущих положительную меру; зато она может вести себя совершенно произвольно на отрезках, несущих меру 0.

Мы должны определить интеграл для функций класса C_ρ^+, состоящего из функций $f(x)$, являющихся пределами (почти всюду) возрастающих последовательностей ступенчатых функций. В § 2 гл. IV это построение базировалось на двух леммах, относящихся к убывающим последовательностям ступенчатых функций и утверждающих, что соотношения $h_n \searrow 0$, $Ih_n \searrow 0$ равносильны. В доказательстве этих лемм было существенно, что множество всех точек разрыва функций h_n $(n=1, 2, \ldots)$ имеет меру нуль. В нашем случае, если отправляться от произвольных ступенчатых функций, это условие заведомо не будет выполняться, так как ничто не мешает ступенчатой функции делать скачок как раз в точке, несущей положительную меру. Из этого затруднения мы выйдем очень просто: мы потребуем, чтобы исходные ступенчатые функции не имели скачков в точках, несущих положительную меру. (Таких точек, самое большее, лишь счетное множество, как мы видели выше.)

С выполнением этого условия можно далее повторить целиком схему §§ 2—3 гл. IV. Класс C_ρ^+ (стильтьесовский) образуют функции $f(x)$, которые являются пределами почти всюду сходящихся возрастающих последовательностей ступенчатых функций $h_n(x)$ с ограниченными интегралами $I_\rho h_n$, не имеющих скачков в точках оси, несущих положительную меру. Интеграл Стильтьеса $I_\rho f$ определяется по формуле

$$I_\rho f = \lim I_\rho h_n.$$

Разности функций из класса C^+ образуют класс функций L_ρ, которые называются *суммируемыми в смысле Лебега — Стильтьеса.*

Если $\varphi = f_1 - f_2$, где $f_1 \in C_\rho^+$, $f_2 \in C_\rho^+$, то интеграл Стильтьеса от функции φ определяется по формуле

$$I_\rho \varphi = I_\rho f_1 + I_\rho f_2.$$

Проверка корректности всех этих определений проводится по схеме гл. IV.

Интеграл $I_\rho \varphi$ называется *интегралом Лебега — Стильтьеса по мере* ρ и обозначается более подробно так:

$$I_\rho \varphi = \int_a^b \varphi(x)\,\rho(dx).$$

Заметим, что ступенчатая фукция $h(x)$ с разрывом в точке положительной меры всегда может быть представлена в виде предела возрастающей или убывающей последовательности допустимых ступенчатых функций и потому $h(x)$ заведомо войдет в класс C_ρ^+ или в L_ρ, так что наше ограничение класса ступенчатых функций при построении интеграла не ведет к уменьшению всей совокупности суммируемых функций. Класс L_ρ есть линейное нормированное полное пространство с нормой

$$\|\varphi\| = I_\rho(|\varphi|).$$

Аналогично определяются пространства L_ρ^p $(p \geqslant 1)$. Естественно определяются ρ-измеримые функции, как пределы почти всюду (по мере ρ) сходящихся последовательностей ступенчатых функций. Можно определить далее ρ-измеримые множества, как множества, характеристические функции которых ρ-измеримы; ρ-мера ρ-измеримого множества E определяется по формуле

$$\rho E = I_\rho(\chi_E(x)), \qquad \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} E. \end{cases}$$

На совокупности ρ-измеримых множеств ρ-мера счетно-аддитивна, т. е.

$$\rho(E_1 + E_2 + \ldots) = \rho E_1 + \rho E_2 + \ldots,$$

если множества E_1, $E_2, \ldots$ ρ-измеримы и не имеют общих точек.

Теперь ρ-измеримая функция может быть определена как такая функция $f(x)$, у которой множество $\{x : f(x) < C\}$ ρ-измеримо при любом C. Это позволяет перенести на ρ-интегралы и всю лебеговскую теорию (гл. IV, § 4, п. 6).

Условие счетной аддитивности ρ-меры на промежутках или формально более слабые условия аддитивности и непрерывности (стр. 301—302) играют во всех этих построениях существенную роль. Во-первых, эти условия существенны при определении множеств ρ-меры нуль. С одной стороны, промежуток Δ имеет меру нуль, если ему приписана ρ-мера: $\rho\Delta = 0$. С другой стороны, в соответствии с приведенным выше условием промежуток Δ меры нуль возможно покрыть системой интервалов — здесь даже одним интервалом — меры как угодно малой. Условие непрерывности обеспечивает согласование этих определений. Далее, по нашему построению, мера промежутка Δ, у которого один или оба конца несут положительную меру, определяется через интеграл как $I_\rho(\Delta)$, что есть предел мер промежутков $\rho\Delta_n$, концы которых имеют меру нуль; условие непрерывности обеспечивает равенство $I_\rho(\Delta) = \rho\Delta$. Заметим, наконец, что мы получили через теорию интеграла и доказательство полной аддитивности конечно-аддитивной и непрерывной меры Стильтьеса.

2. Мере ρ можно сопоставить неубывающую функцию

$$F(x) = \rho[a, x].$$

По функции $F(x)$ мера ρ единственным образом восстанавливается для всякого промежутка, а именно мы имеем:

$$\rho[a, x] = F(x), \tag{1}$$

$$\rho(x, x'] = \rho[a, x'] - \rho]a, x] = F(x') - F(x). \tag{2}$$

Для полуинтервала $[a, x)$ можно написать следующее равенство:

$$\rho[a, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}] + \rho[a, x_1]$$

$$(a < x_1 < x_2 < \ldots < x, \lim_{n\to\infty} x_n = x).$$

Заметим, что на этом месте использована полная аддитивность функции ρ. С помощью функции F последнее соотношение записывается так:

$$\rho[a, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [F(x_{n+1}) - F(x_n)] + F(x_1) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x-0).$$

Теперь уже легко найти $\rho\Delta$ для всех остальных типов промежутков:

$$\rho[x, x') = \rho[a, x') - \rho[a, x) = F(x'-0) - F(x-0), \tag{3}$$

$$\rho(x, x') = \rho[a, x') - \rho[a, x] = F(x'-0) - F(x), \tag{4}$$

$$\rho[x, x'] = \rho[a, x'] - \rho[a, x) = F(x') - F(x+0), \tag{5}$$

$$\rho[x] = \rho[a, x] - \rho[a, x) = F(x) - F(x-0). \tag{6}$$

Функция $F(x)$, определяемая равенством (1), непрерывна справа в каждой точке, так как

$$F(x+0) = \lim_{x_n\to x+0} F(x_n) = F(x_1) - [F(x_1) - F(x_2)] - \ldots =$$

$$= \rho[a, x_1] - \rho[x_2, x_1] - \ldots = \rho[a, x] = F(x).$$

Как показывает равенство (6), в каждой точке x, несущей ненулевую ρ-меру, функция $F(x)$ претерпевает скачок, равный ρ-мере точки x; в остальных точках функция $F(x)$ непрерывна.

Обратно, произвольная неубывающая непрерывная справа функция $F(x)$ определяет по формулам (1)—(6) неотрицательную функцию промежутков; нетрудно проверить, что эта функция промежутков $\rho\Delta$ аддитивна и непрерывна, а следовательно, и счетно аддитивна. Функция $F(x)$ называется по отношению к мере Стильтьеса ρ ***производящей функцией***.

В случае конечной меры на бесконечном промежутке, уходящем влево до $-\infty$, производящая функция соответственно задается равенством

$$F(x) = \rho[-\infty, x],$$

формально получающимся из (1) заменой a на $-\infty$. Заметим, что точка $-\infty$ (и $+\infty$) также может нести положительную меру.

В общем случае интеграл Лебега — Стильтьеса, построенный по производящей функции $F(x)$, обозначается символом

$$I_\rho\varphi=\int_a^b \varphi(x)\,dF(x). \tag{7}$$

Это обозначение очень удобно и находится, как мы увидим ниже, в соответствии с остальными общепринятыми обозначениями. Укажем на одно отличие. Полагая $\varphi(x)\equiv 1$, получим согласно определению

$$\int_a^b dF(x)=\rho\,[a,\ b]=F(b),$$

а не $F(b)-F(a)$, как было бы естественно. Это исключение имеет значение, разумеется, лишь если $F(a)\neq 0$, т. е. если точка a несет положительную меру. Функция $F(x)$ по отношению к интегралу (7) называется *интегрирующей функцией*.

3. Рассмотрим некоторые отдельные типы интегрирующих функций.

а) Интегрирующая функция $F(x)$ есть функция скачков: имеются точки x_n и числа p_n, $\sum p_n<\infty$, так что $F(x)$ задана формулой вида

$$F(x)=\sum_{x_n\leqslant x} p_n.$$

Как было показано в § 1, п. 3, $F(x)$ непрерывна справа.

В этом случае мера $\rho\Delta$ промежутка Δ есть сумма всех p_n, соответствующих точкам x_n, лежащим в Δ. Интеграл от ступенчатой функции $h(x)$, принимающей значение h_j в промежутке Δ_j, равен

$$\sum_j h_j\rho\Delta_j=\sum_j h_j\sum_{x_n\in\Delta_j} p_n=\sum_{n=1}^{\infty} h(x_n)\,p_n.$$

Если последовательность ступенчатых функций $h_\nu(x)$, возрастая, стремится почти всюду по мере ρ к функции $f(x)$, причем $I_\rho h_\nu$ ограничены, то это значит, что функции $h_\nu(x)$ при $\nu\to\infty$ стремятся к $f(x)$ в каждой из точек x_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, причем

$$I_\rho f=\lim_{\nu\to\infty} I_\rho h_\nu=\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\,p_n.$$

Переходя к разностям, получаем, что класс L_ρ образован функциями $\varphi(x)$, определенными (однозначно) только в точках x_n $(n=1, 2, \ldots)$, причем

$$I_\rho\varphi=\sum_n \varphi(x_n)\,p_n \quad\text{и}\quad \sum_n p_n\,|\varphi(x_n)|<\infty.$$

Легко проверить, что любая функция $\varphi(x)$ с $\sum\limits_n p_n |\varphi(x_n)| < \infty$ попадает в пространство L_ρ. Этим пространство L_ρ полностью описано.

б) Интегрирующая функция $F(x)$ абсолютно непрерывна. Тогда значение меры Стильтьеса на любом промежутке имеет вид

$$\rho[\alpha, \beta] = \rho[\alpha, \beta) = \rho(\alpha, \beta) = \rho(\alpha, \beta] = F(\beta) - F(\alpha) = \int\limits_\alpha^\beta g(\xi)\, d\xi,$$

где $g(\xi) \geqslant 0$ — производная функции $F(x)$. Точек с положительной ρ-мерой вовсе нет. Интеграл от ступенчатой функции $h(x)$, принимающей значение h_j в промежутке Δ_j, равен

$$I_\rho(h) = \sum h_j \rho\Delta_j = \sum h_j \int\limits_{\Delta_j} g(\xi)\, d\xi = \int\limits_a^b h(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = I(hg),$$

где I обозначает интеграл Лебега.

Если последовательность h_n, возрастая, стремится почти всюду по мере ρ к функции f, причем интегралы $I_\rho h_n$ ограничены, то это означает, что ограничены интегралы Лебега $I(h_n g)$ и, следовательно, предел fg последовательности $h_n g$ есть суммируемая в обычном смысле функция; при этом

$$I_\rho f = \lim I_\rho h_n = \lim I(h_n g) = I(fg).$$

Переходя к разностям, получаем, что класс L_ρ состоит из функций φ, для которых произведения φg суммируемы в обычном смысле; при этом для любой $\varphi \in L_\rho$ имеет место равенство

$$\int\limits_a^b \varphi\, dF = I_\rho \varphi = I(g\varphi) = \int\limits_a^b \varphi g\, dx \tag{1}$$

(так что в этом случае можно заменять dF на $F'(x)\, dx = g\, dx$).

Всякое множество лебеговской меры нуль (будем коротко писать: L-меры 0) покрывается конечной или счетной системой S промежутков с общей длиной как угодно малой; ρ-мера этой системы промежутков равна интегралу по S от функции $g(x)$ и, следовательно, стремится к нулю вместе с обычной мерой S. Отсюда следует, что всякое множество L-меры 0 будет и множеством ρ-меры 0. Рассмотрим любое L-измеримое множество E. Мы знаем, что существуют замкнутое множество F и открытое G, $F \subset E \subset G$, причем разность $G - F$ имеет L-меру как угодно малую. Множества G и F ρ-измеримы, и по доказанному ρ-мера множества $G - F$ также как угодно мала; отсюда следует, что множество E ρ-измеримо. Итак, *любое L-измеримое множе-*

ство является и ρ-измеримым. При этом ρ-мера множества E согласно формуле (1) равна

$$I_\rho \chi_E = I(\chi_E g) = \int\limits_E g(x) dx.$$

Рассмотрим теперь строение ρ-измеримых множеств. Пусть E есть ρ-измеримое множество и $\chi(x)$ — его характеристическая функция; тогда по доказанному χg суммируема в обычном смысле и

$$\rho E = \int\limits_a^b \chi(x)\, dF(x) = \int\limits_a^b \chi g dx.$$

Пусть E_1 — множество точек, где $\chi g > 0$; оно содержится в E и L-измеримо. Само множество E может быть и неизмеримым в обычном смысле; но, представляя его в форме

$$E = E_1 + (E - E_1),$$

мы видим, что оно *имеет вид суммы двух множеств, из которых одно L-измеримо, а на другом функция $g(x)$ равна* 0. Справедливо и обратное: *если некоторое множество E представляется в виде суммы двух множеств E_1 и E_2 без общих точек, одно из которых L-измеримо, а на другом $g(x)$ равна* 0, *то E ρ-измеримо.* Так как L-измеримое множество является ρ-измеримым, то достаточно показать, что множество E_2, на котором функция $g(x)$ равна нулю, ρ-измеримо (и имеет ρ-меру нуль). Но множество E_0 *всех* точек, где $g(x)$ равна 0, измеримо в обычном смысле. Следовательно, оно ρ-измеримо, и его ρ-мера

$$\rho E_0 = \int\limits_{E_0} g\, dx = 0.$$

Поэтому и всякое подмножество $E \subset E_0$ ρ-измеримо и имеет ρ-меру нуль, чем доказательство и завершается.

Выше было доказано, что если функция φ ρ-суммируема, то произведение φg L-суммируемо. Покажем, что верно и обратное: если для некоторой функции φ произведение φg L-суммируемо, то φ ρ-суммируема. Проверим сначала, что φ есть ρ-измеримая функция. Рассмотрим при заданном C множество E тех точек, где выполняется неравенство $\varphi(x) \leqslant C$. Это множество совпадает с множеством E', где выполняется неравенство $\varphi(x)\, g(x) \leqslant Cg(x)$, за вычетом некоторого множества E'', где $g(x)$ равна нулю. Множество E' L-измеримо и, следовательно, ρ-измеримо, множество E'' имеет ρ-меру нуль; поэтому E ρ-измеримо. Так как C произвольно, то мы приходим к выводу, что функция φ ρ-измерима. Для доказательства ρ-суммируемости функции φ нам достаточно доказать, что ограничены интегралы $I_\rho \varphi_N$, где $\varphi_N = \min(|\varphi|, N)$.

Но функция φ_N ограничена и ρ-измерима, следовательно, ρ-суммируема, а тогда по формуле (1)

$$I_\rho\varphi_N = I(\varphi_N g) \leqslant I(|\varphi| g),$$

что и требуется. Итак, мы получили полную характеристику ρ-суммируемых функций: *это те и только те функции $\varphi(x)$, для которых произведение φg суммируемо в обычном смысле.*

4. Можно и в общем случае, когда интегрирующая функция $F(x)$ — произвольная неубывающая функция, дать некоторую характеристику соответствующего пространства L_ρ, хотя и менее эффективную. Для этого рассмотрим отображение оси x на ось y, осуществляемое функцией $y = F(x)$. В точках непрерывности это отображение однозначно; точке разрыва x_0 мы будем сопоставлять целый промежуток $[F(x_0 - 0), F(x_0)]$. Обратная функция $x = G(y)$ обладает теми же свойствами; она может сопоставлять каждому значению y одну точку x или целый интервал — последнее лишь в случае, если имеется интервал оси x, на котором $F(x)$ сохраняет постоянное значение y_0 (таких значений y_0 может быть самое большее счетное множество). Каждому множеству E оси x сопоставляется некоторое множество $\mathscr{E}$ оси y; при этом промежутку Δ оси x сопоставляется промежуток оси y, длина которого в точности равна ρ-мере промежутка Δ. Каждой функции $f(x)$ соответствует функция $g(y) = f(G(y))$, определенная при тех значениях y, для которых $G(y)$ однозначна. Таким образом, функция $g(y)$ может не быть определенной самое большее на фиксированном счетном множестве точек. Ступенчатой функции $h(x)$, принимающей значение h_j в промежутке Δ_j, отвечает ступенчатая функция $k(y)$, принимающая значение h_j в промежутке $F(\Delta_j)$; при этом

$$I_\rho h = \sum h_j \rho\Delta_j = \sum h_j |F(\Delta_j)| = Ik,$$

где $|F(\Delta_j)|$ означает длину промежутка $F(\Delta_j)$. Мы видим, что при указанном сопоставлении ступенчатой функции h на оси x отвечает ступенчатая функция k на оси y с обычным интегралом Ik, равным ρ-интегралу функции h.

Теперь ясно, что предельный процесс, приводящий к построению ρ-суммируемой функции $\varphi(x)$ на оси x, соответствует на оси y предельному процессу, приводящему к функции $\psi(y) = \varphi(G(y))$, суммируемой в обычном смысле. Таким образом, если $\varphi(x)$ ρ-суммируема, то соответствующая функция $\psi(y) = \varphi(G(y))$ суммируема по Лебегу и $I_\rho\varphi = I\psi$. Функция $\psi(y)$, кроме того, постоянна на каждом интервале, соответствующем точке x положительной ρ-меры. Обратно, если функция $\psi(y)$ суммируема по Лебегу и постоянна на системе интервалов, отвечающих точкам x положительной ρ-меры, то ее можно аппроксимировать по метрике L_1 ступенчатыми функциями, также постоянными на этой системе интервалов; отсюда следует, что функция $\varphi(x)= =\psi(F(x))$ ρ-суммируема и $I_\rho\varphi=I\psi$. Таким образом, *функция* $\varphi(x)$ *ρ-суммируема тогда и только тогда, когда функция* $\psi(y)=\varphi(G(y))$ *суммируема в обычном смысле.* В частности, множество E на оси x ρ-измеримо тогда и только тогда, когда измеримо по Лебегу соответствующее множество $F(E)$.

Из этих результатов, в частности, можно получить обобщение формулы (1) п. 3, относящейся к случаю абсолютно непрерывной интегрирующей функции, на общий случай.

Назовем функцию $\Phi(x)$ *абсолютно непрерывной относительно неубывающей функции* $F(x)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что, какова бы ни была система непересекающихся интервалов (a_k, b_k) $(k=1, 2, \ldots, m)$, из условия

$$\sum[F(b_k)-F(a_k)]<\delta$$

следует

$$\sum|\Phi(b_k)-\Phi(a_k)|<\varepsilon.$$

Абсолютная непрерывность Φ относительно F имеет место, например, если Φ удовлетворяет относительно F «условию Липшица», т. е. при любых α и β

$$|\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)|\leqslant[F(\beta)-F(\alpha)]C \tag{2}$$

с фиксированной постоянной C.

Согласно сказанному выше функция $\Phi(G(y))=\Psi(y)$ абсолютно непрерывна относительно обычной меры Лебега на оси y и поэтому представляется как интеграл от своей производной $\psi(y)$:

$$\Psi(y)=\int_{a_1}^{y}\psi(\eta)\,d\eta \quad (a_1=F(a)).$$

В свою очередь это означает, что *функция* $\Phi(x)$ *есть интеграл от функции* $g(x)=\psi(G(y))$ *по мере* dF:

$$\Phi(x)=\int_a^x g(\xi)\,dF(\xi). \tag{3}$$

Заметим, что при выполнении условия Липшица (2) функция $g(x)$ ограничена по модулю постоянной C.

Предположим далее, что Φ — также неубывающая функция. Тогда тем же путем легко проверить, что *произведение любой функции* $f(x)$, *суммируемой по мере* $d\Phi$, *и функции* $g(x)$ *суммируемо и по мере* dF, *причем*

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dF(x). \tag{4}$$

Соображения, связывающие интеграл Стильтьеса с интегралом Лебега, будут развиты в конце следующего параграфа в применении к случаю функций нескольких переменных.

§ 6. Интеграл Стильтьеса (продолжение)

1. В предыдущем параграфе мера, определяющая интеграл Стильтьеса, предполагалась неотрицательной. Но, оказывается, схема наших построений может быть без труда распространена и на некоторые меры, которым разрешается принимать и неположительные значения.

Нам удобнее будет говорить сейчас не о самих мерах, а об их производящих функциях. Пусть $\Phi(x)$ — некоторая функция с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$, непрерывная справа. Как и всякая такая функция, она представляется в виде разности двух неубывающих функций, также непрерывных справа, одна из которых есть полное изменение функции $\Phi(x)$ (§ 2):

$$\Phi(x) = V(x) - G(x).$$

Функция Φ удовлетворяет относительно V условию Липшица с постоянной 1:

$$|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)| \leqslant V_\alpha^\beta[\Phi] = V(\beta) - V(\alpha).$$

Поэтому, в силу (3),

$$\Phi(x) = \int_a^x h(\xi)\,dV(\xi).$$

Руководствуясь аналогией с (4), для любой функции $\varphi(x)$, суммируемой по $V(x)$, положим по определению

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\Phi = \int_a^b \varphi(x)\,h(x)\,dV(x). \tag{1}$$

Этим определен интеграл по функции $\Phi(x)$. Напомним, что функция $\Phi(x)$ не предполагается неубывающей функцией, а лишь обладающей ограниченным изменением.

Интеграл (1) может быть выражен и непосредственно через интегралы по неубывающим функциям; именно, мы имеем

$$G(x) = V(x) - \Phi(x) = \int_a^x [1 - h(\xi)]\,dV(\xi),$$