причем

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dF(x). \tag{4}$$

Соображения, связывающие интеграл Стильтьеса с интегралом Лебега, будут развиты в конце следующего параграфа в применении к случаю функций нескольких переменных.

§ 6. Интеграл Стильтьеса (продолжение)

1. В предыдущем параграфе мера, определяющая интеграл Стильтьеса, предполагалась неотрицательной. Но, оказывается, схема наших построений может быть без труда распространена и на некоторые меры, которым разрешается принимать и неположительные значения.

Нам удобнее будет говорить сейчас не о самих мерах, а об их производящих функциях. Пусть $\Phi(x)$ — некоторая функция с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$, непрерывная справа. Как и всякая такая функция, она представляется в виде разности двух неубывающих функций, также непрерывных справа, одна из которых есть полное изменение функции $\Phi(x)$ (§ 2):

$$\Phi(x) = V(x) - G(x).$$

Функция Φ удовлетворяет относительно V условию Липшица с постоянной 1:

$$|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)| \leqslant V_\alpha^\beta[\Phi] = V(\beta) - V(\alpha).$$

Поэтому, в силу (3),

$$\Phi(x) = \int_a^x h(\xi)\,dV(\xi).$$

Руководствуясь аналогией с (4), для любой функции $\varphi(x)$, суммируемой по $V(x)$, положим по определению

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\Phi = \int_a^b \varphi(x)\,h(x)\,dV(x). \tag{1}$$

Этим определен интеграл по функции $\Phi(x)$. Напомним, что функция $\Phi(x)$ не предполагается неубывающей функцией, а лишь обладающей ограниченным изменением.

Интеграл (1) может быть выражен и непосредственно через интегралы по неубывающим функциям; именно, мы имеем

$$G(x) = V(x) - \Phi(x) = \int_a^x [1 - h(\xi)]\,dV(\xi),$$

откуда

$$\int_a^b \varphi dG = \int_a^b (1-h)\varphi dV = \int_a^b \varphi dV - \int_a^b \varphi h dV$$

и, следовательно,

$$\int_a^b \varphi h dV = \int_a^b \varphi dV - \int_a^b \varphi dG. \tag{2}$$

Наконец, и интеграл, определяемый равенством (1), можно получить и непосредственной конструкцией, аналогичной конструкции интеграла по неотрицательной мере. Пусть $\rho\Delta$ — мера, отвечающая производящей функции $V(x)$ и $\sigma\Delta$ — мера, отвечающая функции $G(x)$. Построим по формулам (2) — (6) § 5, п. 2 меру $\tau\Delta$, отправляясь от функции $\Phi(x)$:

$$\tau(x, x'] = \Phi(x') - \Phi(x), \qquad \tau[x, x') = \Phi(x'-0) - \Phi(x-0),$$
$$\tau(x, x') = \Phi(x'-0) - \Phi(x), \quad \tau[x, x'] = \Phi(x') - \Phi(x-0).$$

Функция промежутков $\tau\Delta$ аддитивна и непрерывна; это можно проверить, исходя как непосредственно из определения, так и из равенства $\tau\Delta = \rho\Delta - \sigma\Delta$. Эта функция может принимать и отрицательные значения; но при любом разбиении отрезка $[a, b]$ на промежутки

$$[a, b] = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_m$$

удовлетворяется условие

$$|\tau\Delta_1| + |\tau\Delta_2| + \ldots + |\tau\Delta_m| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \rho\Delta_j + \sum_{j=1}^{m} \sigma\Delta_j < C \tag{3}$$

с фиксированной постоянной C. Неравенство (3) отражает тот факт, что исходная функция $\Phi(x)$ имеет ограниченное изменение. Далее, невзирая на возможную отрицательность значений $\tau\Delta$, мы можем определить интегралы по мере $\tau\Delta$ от ступенчатых функций и затем обычным предельным переходом получить пространство L_τ. Во всех оценках вместо $\rho[a, b]$ придется ставить постоянную C из (3). Используя на каждом этапе равенство $\rho\Delta - \sigma\Delta = \tau\Delta$, мы получим формулу (2), а вместе с ней и формулу (1).

2. Интеграл Римана — Стильтьеса. Рассмотрим для произвольной функции $f(x)$ и некоторой производящей функции $\Phi(x)$ (с ограниченным изменением) суммы, аналогичные суммам Римана:

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_j)[\Phi(x_{j+1}) - \Phi(x_j)] \tag{1}$$
$$(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b, \ x_j \leqslant \xi_j \leqslant x_{j+1}).$$

Предел таких сумм при неограниченном измельчении интервалов $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, если он существует, называется *интегралом Римана — Стильтьеса от функции* $f(x)$ *по функции* $\Phi(x)$. Покажем, что он заведомо существует и совпадает с уже определенным выше интегралом Лебега — Стильтьеса от f по Φ в промежутке $(a, b]$, если $f(x)$ непрерывна. Написанная интегральная сумма есть интеграл Лебега — Стильтьеса от ступенчатой функции $h_m(x)$, определенной в промежутке $(a, b]$ и равной $f(\xi_j)$ в промежутке $\Delta_j = (x_j, x_{j+1}]$. При неограниченном измельчении промежутков Δ_j ступенчатая функция $h_m(x)$ равномерно стремится к функции $f(x)$; поэтому в силу основных теорем теории интеграла

$$\sum f(\xi_j)[\Phi(x_{j+1}) - \Phi(x_j)] = \int\limits_{(a,b]} h_m(x)\,d\Phi \to \int\limits_{(a,b]} f(x)\,d\Phi,$$

что и требовалось.

Из самого определения интеграла Римана — Стильтьеса вытекает справедливость оценки

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,d\Phi(x)\right| \leqslant \sup_{x \in (a,b]} |f(x)|\, V_a^b[\Phi],$$

заменяющей оценку

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|\,(b-a)$$

для обычного интеграла Римана.

Заметим, что при определении интеграла Римана — Стильтьеса нет необходимости заботиться о том, чтобы функция $\Phi(x)$ была непрерывна справа. В действительности, если функция $f(x)$ непрерывна, интегральные суммы (1) имеют предел при любой функции $\Phi(x)$ с ограниченным изменением, и этот предел не зависит от значений функции $\Phi(x)$ в ее точках разрыва. Для доказательства, имея некоторую функцию с ограниченным изменением $\Phi(x)$, положим:

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + D(x),$$

где $\Phi_0(x)$ совпадает с $\Phi(x)$ во всех точках непрерывности $\Phi(x)$, а в точках разрыва равна $\Phi(x+0)$ и, следовательно, непрерывна справа; функция $D(x)$, очевидно, может быть отличной от нуля самое большее лишь в счетном множестве $z_1, z_2, \ldots$ точек разрыва функции $\Phi(x)$.

Интегральные суммы, составленные по функции $\Phi_0(x)$, по доказанному имеют предел

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\Phi_0(x).$$

Покажем, что интегральные суммы, составленные по функции $D(x)$, стремятся к нулю. Так как $D(x)$ вместе с $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$ имеет ограниченное изменение, то сумма модулей всех значений $D(x)$ конечна. Найдем для заданного $\varepsilon > 0$ номер N так, чтобы иметь $\sum\limits_{n>N} |D(z_n)| < \varepsilon$. Положим далее

$$D(x) = D_1(x) + \ldots + D_N(x) + \overline{D}_N(x),$$

где $D_j(x)$ отлична от нуля лишь в точке z_j $(j=1, 2, \ldots, N)$, а $\overline{D}_N(x)$ отлична от нуля лишь в точках z_n $(n>N)$. Интегральная сумма, составленная по функции $D_j(x)$, равна или 0, или

$$[f(\xi_j') - f(\xi_j'')] D_j(z_j),$$

где $\xi_j' \leqslant z_j \leqslant \xi_j''$ и точки ξ_j' и ξ_j'' лежат в соседних элементах подразбиения отрезка $[a, b]$. В силу непрерывности $f(x)$ эта величина становится как угодно малой при измельчении подразбиения. Интегральная сумма, составленная по функции $\overline{D}_N(x)$, допускает оценку

$$\Big|\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[\overline{D}_N(x_{j+1}) - \overline{D}_N(x_j)]\Big| \leqslant 2M \sum_{n \geqslant N} |D(z_n)| \leqslant 2M\varepsilon,$$

где $M = \max|f(x)|$; как мы видим, эта сумма также сколь угодно мала. Таким образом, интегральные суммы, составленные по функции $D(x)$, действительно стремятся к нулю с измельчением подразбиений отрезка, и наше утверждение доказано.

Задачи. 1. Найти значения интегралов Стильтьеса:

$$I_1 = \int_{-1}^{3} x\,dF(x), \qquad F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } & x=-1, \\ 1 \text{ при } & -1<x<2, \\ -1 \text{ при } & 2 \leqslant x \leqslant 3; \end{cases}$$

$$I_2 = \int_{0}^{2} x^2\,dF(x), \qquad F(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 0 \text{ при } & \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{2}, \\ 2 \text{ при } & x = \frac{3}{2}, \\ -2 \text{ при } & \frac{3}{2} < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Отв. $I_1 = -5$; $I_2 = -\frac{17}{4}$.

2. Написать выражение статического момента относительно начала координат массы, распределенной на отрезке $[a, b]$ так, что масса отрезка $[a, x]$ равна числу $F(x)$.

Отв. $M = \int\limits_a^b x\,dF(x)$.

3. Предельный переход под знаком интеграла Римана — Стильтьеса.

Теорема 1 (Е. Хелли). *Если функции $F_n(x)$ с ограниченным изменением сходятся в каждой точке отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ к некоторой функции $F(x)$, причем полные изменения всех функций $F_n(x)$ ограничены в совокупности:*

$$\mathbf{V}_a^b[F_n] \leqslant C,$$

то предельная функция $F(x)$ также обладает ограниченным изменением и для любой непрерывной функции $\varphi(x)$

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b \varphi(x)\,dF_n(x) = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dF(x). \tag{1}$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что $F(x)$ имеет ограниченное изменение, не превосходящее C. Действительно, для любого разбиения отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ на части $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ мы имеем:

$$\sum_{j=0}^{m-1} |F(x_{j+1}) - F(x_j)| = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{m-1} |F_n(x_{j+1}) - F_n(x_j)| \leqslant C,$$

откуда и следует, что $\mathbf{V}_a^b[F] \leqslant C$.

Теперь переходим к доказательству соотношения (1). Пусть сначала $\varphi(x)$ есть ступенчатая функция, равная h_j на промежутке

$$\Delta_j = (x_j, x_{j+1}).$$

Тогда

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dF_n(x) = \sum h_j [F_n(x_{j+1}) - F_n(x_j)],$$

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dF(x) = \sum h_j [F(x_{j+1}) - F(x_j)].$$

Очевидно, что при достаточно большом $n \geqslant N$ эти выражения отличаются друг от друга меньше чем на заданное $\varepsilon > 0$. В общем случае для заданного $\varepsilon > 0$ мы построим ступенчатую функцию $\varphi_\varepsilon(x)$

так, чтобы иметь $|\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)|<\frac{\varepsilon}{C}$. Тогда

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x)-\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dF_n(x)\right|=$$
$$=\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\,dF_n(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{C}\,\mathbf{V}_a^b[F_n]\leqslant\varepsilon,$$

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dF(x)-\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dF(x)\right|=$$
$$=\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\,dF(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{C}\,\mathbf{V}_a^b[F]\leqslant\varepsilon,$$

и, следовательно, при $n>N$

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x)-\int_a^b \varphi(x)\,dF(x)\right|\leqslant\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\,dF_n(x)\right|+$$
$$+\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\,dF(x)\right|+\left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dF_n(x)-\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dF(x)\right|\leqslant 3\varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Замечание 1. Эту теорему можно несколько обобщить, допустив зависимость от n и интегрируемой функции $\varphi(x)$. Именно, мы утверждаем, что справедливо соотношение

$$\int_a^b \varphi(x)\,dF(x)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dF_n(x),$$

если выполнены условия:

а) функции $F_n(x)$ имеют равномерно ограниченные изменения и сходятся к функции $F(x)$ в каждой точке отрезка $[a,b]$;

б) непрерывные функции $\varphi_n(x)$ равномерно сходятся к своему пределу $\varphi(x)$.

Доказательство немедленно вытекает из оценок

$$\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_n(x)]\,dF_n(x)\right|\leqslant\max\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right|\mathbf{V}_a^b[F_n],$$
$$\left|\int_a^b [\varphi(x)-\varphi_n(x)]\,dF(x)\right|\leqslant\max\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right|\mathbf{V}_a^b[F]$$

и только что доказанной теоремы.

Замечание 2. Теорема 2 (вместе с замечанием 1) очевидным образом переносится и на бесконечный промежуток интегрирования, например $[0, \infty]$, если функции $F_n(x)$ имеют равномерно ограниченное изменение на всем этом промежутке и функция $\varphi(x)$ (или $\varphi_n(x)$, если речь идет о замечании 1) непрерывна, включая бесконечно удаленную точку; это последнее свойство позволяет равномерно аппроксимировать $\varphi(x)$ ступенчатыми функциями, что существенно используется в доказательстве.

Замечание 3. Если $\varphi(x)$ не является непрерывной на бесконечности, а только ограниченной, так что $|\varphi(x)| \leqslant M$, то теорема Хелли остается еще справедливой, если функции $F_n(x)$ удовлетворяют следующему дополнительному условию (роль которого сводится к тому, чтобы масса, несомая распределением $F_n(x)$, не уходила с возрастанием n в бесконечность):

(*) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать* $N = N(\varepsilon)$ *так, что для всех* n

$$\operatorname*{Var}_{|x| \geqslant N} F_n(x) \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Действительно, переходя к пределу при $n \to \infty$ в формуле (2), мы находим, что и для предельной функции $F(x)$

$$\operatorname*{Var}_{|x| \geqslant N} F(x) \leqslant \varepsilon.$$

Далее, для заданного $\varepsilon \geqslant 0$, найдя N из условия (*), мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF(x) = \int_{-N}^{N} \varphi(x)\, d[F_n(x) - F(x)] + \\ + \int_{|x| \geqslant N} \varphi(x)\, dF_n(x) - \int_{|x| \geqslant N} \varphi(x)\, dF(x). \tag{3}$$

Имея N, мы можем на основании теоремы Хелли для конечного промежутка $[-N, N]$ найти номер n_0 так, чтобы при $n > n_0$ иметь

$$\left| \int_{-N}^{N} \varphi(x)\, d[F_n(x) - F(x)] \right| < \varepsilon.$$

Оставшиеся два интеграла по построению не превосходят по модулю $2M\varepsilon$; мы видим, что вся левая часть в (3) не превосходит $(2M+1)\varepsilon$, что и доказывает справедливость предельного перехода под знаком интеграла Стильтьеса в указанном случае.

4. Применение теоремы 1 весьма облегчается следующей теоремой, дающей возможность из данного множества функций с (равномерно) ограниченным изменением выбрать сходящуюся последовательность.

Теорема 2 (Е. Хелли). *Из всякого бесконечного множества K функций $f(x)$, определенных на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и обладающих свойствами*

$$\max |f(x)| \leqslant C, \tag{1}$$

$$\mathbf{V}_a^b[f] \leqslant V \tag{2}$$

(*где C и V — постоянные, не зависящие от выбора $f \in K$*), *можно выбрать последовательность $f_n(x)$, сходящуюся в каждой точке отрезка $a \leqslant x \leqslant b$.*

Доказательство. Предположим сначала, что функции $f(x)$ не убывают. Пусть $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ — последовательность всех рациональных точек отрезка $[a, b]$. Так как числа $f(r_1)$ ограничены, то существует последовательность функций $f_{n1} \in K$, для которых числа $f_{n1}(r_1)$ имеют предел. Из этой последовательности $f_{n1}(x)$ можно выбрать подпоследовательность $f_{n2}(x)$, для которой сходятся числа $f_{n2}(r_2)$ (а также, конечно, и числа $f_{n2}(r_1)$); продолжая таким образом, получим для каждого k последовательность $f_{nk}(x)$, сходящуюся при $n \to \infty$ в точках $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Диагональная последовательность $f_{nn}(x)$ — будем ее обозначать просто $f_n(x)$ — сходится при каждом $x = r_1, r_2, \ldots$ Предел $f(x)$ последовательности $f_n(x)$, определенный пока еще в рациональных точках, представляет собой неубывающую функцию. Дополним ее определение во всех остальных точках, полагая для каждого иррационального x

$$f(x) = \lim_{r \to x-0} f(r) \qquad (r \text{ рационально}).$$

В результате мы получим неубывающую функцию, определенную уже для всех точек отрезка $[a, b]$. Покажем, что она остается пределом последовательности $f_n(x)$ во всех своих точках непрерывности. Пусть x_0 — точка непрерывности $f(x)$; для заданного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ так, чтобы из $|x - x_0| < \delta$ следовало $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, и выберем рациональные точки $r' < x_0 < r''$ так, чтобы иметь $r'' < x_0 + \delta$, $r' > x_0 - \delta$. Найдем номер N, начиная с которого, выполняются неравенства $|f_n(r') - f(r')| < \varepsilon$, $|f_n(r'') - f(r'')| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $|f_n(r') - f_n(r'')| < 4\varepsilon$. Так как функция $f_n(x)$ не убывает, то число $f_n(x_0)$ лежит между числами $f_n(r')$ и $f_n(r'')$; поэтому

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f_n(x_0)| &\leqslant \\ \leqslant |f(x_0) - f(r')| &+ |f(r') - f_n(r')| + |f_n(r') - f_n(x_0)| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon + |f_n(r') - f_n(r'')| \leqslant 6\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что $f(x_0) = \lim f_n(x_0)$.

Построенная нами последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ всюду, кроме, может быть, точек разрыва функции $f(x)$. Этих точек разрыва самое большее счетное множество. Поэтому, снова применяя диагональный процесс, мы из последовательности $f_n(x)$ сможем выделить подпоследовательность, которая сходится также и во всех точках разрыва функции $f(x)$. Итак, мы выделили из данного семейства неубывающих функций последовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка $[a, b]$, что и требовалось.

В общем случае, когда функции $f(x) \in K$ могут и не быть неубывающими, мы представим каждую из них в форме

$$f(x) = V(x) - G(x),$$

где $V(x)$ — полное изменение функции $f(x)$ на отрезке $[a, x]$. Функции $V(x)$ не убывают и по условию (2) ограничены; функции $G(x)$ также обладают этими свойствами. По доказанному существует последовательность $f_n(x) \in K$, для которой функции $V_n(x)$ сходятся в каждой точке отрезка $[a, b]$. Из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $f_{n_k}(x)$, для которой функции $G_{n_k}(x)$ сходятся в каждой точке отрезка $[a, b]$; но тогда и $f_{n_k}(x)$ сходятся в каждой точке отрезка $[a, b]$. Тем самым теорема 2 полностью доказана.

5. Интеграл Стильтьеса для нескольких переменных. Будем говорить для определенности о случае двух переменных x и y, меняющихся в квадрате $\Delta_0 = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b\}$. Назовем «промежутком» на плоскости множество точек (x, y), где каждая из координат пробегает некоторый промежуток (любого из пяти типов, указанных в п. 1) на своей оси. Предположим, что для каждого промежутка Δ в квадрате Δ_0 задана функция $\rho\Delta \geqslant 0$, удовлетворяющая условию полной аддитивности: если $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ взаимно не пересекаются и их объединение Δ есть снова промежуток, то

$$\rho\Delta = \rho\Delta_1 + \ldots + \rho\Delta_n + \ldots$$

Функцию $\rho\Delta$, как и выше, мы называем *мерой Стильтьеса*. Разобьем квадрат Δ_0 на конечное число промежутков $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ без общих точек; функция $h(x, y)$, равная постоянной h_j на множестве Δ_j, называется ступенчатой, и ее интеграл определяется по формуле

$$I_\rho h = \sum_j h_j \rho\Delta_j.$$

Применяя процессы расширения, уже много раз описанные выше, можно распространить понятие интеграла I_ρ на широкий класс функций L_ρ, которые называются *суммируемыми в смысле Лебега — Стильтьеса относительно меры* ρ. Объем этого класса функций и корректность построения проще всего получить, применяя метод установления соответствия с линейной мерой, подобно тому как это было сделано в § 4 для меры Лебега. Этот метод состоит в следующем. Построим по мере $\rho\Delta$ две функции, каждая от одного переменного:

$$F_1(x) = \rho\Delta_x, \quad F_2(y) = \rho\Delta_y.$$

Здесь Δ_x означает ту часть плоскости, точки которой (ξ, η) удовлетворяют неравенству $\xi \leqslant x$, а Δ_y — ту часть, которая отвечает неравенству $\eta \leqslant y$. Функции $F_1(x)$ и $F_2(y)$ не убывают и поэтому имеют не более счетного множества точек разрыва. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все точки разрыва функции $F_1(x)$. Можно построить на оси x совокупность чисел вида $x_0 + \frac{p}{2^q}$ (x_0 фиксировано, p и q — целые), не содержащую ни одной из точек $x_1, \ldots, x_n, \ldots$; это следует из того, что множество $\left\{x_n + \frac{p}{2^q}\right\}$ при всех $n, p, q = 1, 2, \ldots$ счетно и поэтому содержит заведомо не все точки оси; в качестве x_0 можно взять любую точку, не входящую в это множество. Таким же образом построим на оси y совокупность чисел $y_0 + \frac{p}{2^q}$, не содержащую ни одной из точек разрыва функции $F_2(y)$. Прямые $x = x_0 + \frac{p}{2^q}$ и $y = y_0 + \frac{p}{2^q}$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; q фиксировано) определяют сеть — разбиение плоскости на квадраты со стороной $\frac{1}{2^q}$, границы которых не несут положительной меры. Теперь можно устанавливать соответствие между квадратами сети на плоскости и интервалами оси так же, как мы делали в § 4, но с одним изменением: в § 4 квадрату плоскости мы ставили в соответствие интервал длины, равной площади квадрата, а теперь будем ставить в соответствие интервал длины, равной ρ-мере квадрата. Разумеется, нужно следить, чтобы при соответствии сохранялось отношение включения. Так же как и в § 4, мы убеждаемся в том, что построенное соответствие будет взаимно однозначным с точностью до множества ρ-меры нуль на плоскости и лебеговой меры нуль на прямой. Всякому множеству на плоскости, измеримому по мере ρ, будет соответствовать измеримое по Лебегу множество на оси той же меры Лебега. Отметим некоторые особенности этого соответствия. Точка (x_0, y_0) на плоскости, имеющая положительную ρ-меру, переходит в целый интервал оси соответствующей длины. Таких интервалов будет не более счетного множества, и мы обозначим их $\delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots$ С другой стороны, квадрату сети на плоскости, мера которого равна нулю, отвечает отдельная точка оси x.

Ступенчатой функции на плоскости, принимающей постоянные значения на квадратах сети, отвечает ступенчатая функция на оси, постоянная на каждом из интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots$ Интегралы ступенчатых функций, соответствующих друг другу,— первый по ρ-мере на плоскости, второй по мере Лебега на оси — равны. Предельным переходом от указанных ступенчатых функций на оси мы получим все суммируемые функции, постоянные на интервалах $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$; соответствующий предельный переход на плоскости приведет к совокупности функций, суммируемых по мере ρ. Каждому свойству интеграла Лебега на прямой, относящемуся к функциям, постоянным на интервалах $\{\delta_n\}$, соответствует некоторое свойство интеграла Лебега — Стильтьеса с мерой ρ. Таким образом, указанное соответствие освобождает нас от необходимости специально передоказывать для интеграла Лебега—Стильтьеса все те теоремы, которые мы доказали (гл. IV и VI) для интеграла Лебега; все эти теоремы автоматически оказываются справедливыми и для интеграла Лебега — Стильтьеса.

6. Производящая функция в случае нескольких переменных. Пусть ξ, η — произвольная точка в квадрате Δ_0 и $\Delta_{\xi\eta}$ — промежуток, выделяемый неравенствами $x \leqslant \xi$, $y \leqslant \eta$. Положим

$$F(\xi, \eta) = \rho\Delta_{\xi\eta}.$$

Функция $F(\xi, \eta)$ по формулам, аналогичным формулам (2) — (6) п. 2, § 5, позволяет восстановить меру $\rho\Delta$ для каждого промежутка Δ и называется поэтому производящей функцией меры $\rho\Delta$. Эта функция $F(\xi, \eta)$ «не убывает» — в том смысле, что при $\xi \leqslant \xi'$, $\eta \leqslant \eta'$ имеем:

$$F(\xi, \eta) \leqslant F(\xi', \eta'),$$

а также «непрерывна сверху», т. е.

$$F(\xi+0,\ \eta+0) = \lim_{\substack{x\to\xi+0\\ y\to\eta+0}} F(x, y) = F(\xi, \eta).$$

Обратно, каждая функция, которая не убывает и непрерывна сверху в указанном смысле, может служить производящей функцией для некоторой вполне аддитивной меры.

Интеграл Стильтьеса от функции $\varphi(x, y)$, построенный по производящей функции $F(\xi, \eta)$, записывается в виде

$$\int_a^b \int_a^b \varphi(x, y)\, dF(x, y).$$

Вместо неотрицательной меры $\rho\Delta$ можно рассматривать меру $\rho\Delta$ произвольного знака с *ограниченным изменением*; под этим последним свойством мы понимаем тот факт, что при любом разбиении основного квадрата Δ_0 на промежутки $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ имеет место неравенство

$$|\rho\Delta_1| + \ldots + |\rho\Delta_m| < C \tag{1}$$

с фиксированной постоянной C. В соответствии с этим и вместо неубывающей производящей функции $F(x, y)$ можно рассматривать производящую функцию $F(x, y)$ *с ограниченным изменением*; это последнее означает, что мера $\rho\Delta$, построенная по общим правилам по функции

$F(x, y)$, должна удовлетворять неравенству (1). Разумеется, предположение о непрерывности сверху, обеспечивающее полную аддитивность меры $\rho\Delta$, должно быть сохранено и в этом, более общем случае.

§ 7. Применение интеграла Стильтьеса в анализе

Интеграл Стильтьеса имеет многочисленные применения. Мы приведем в этом параграфе вывод трех формул из трех разных разделов математического анализа. Еще одна формула — именно представление положительно определенной функции — дается в § 7 гл. VII.

1. Линейные функционалы в пространстве $C(a, b)$. Простейшим линейным непрерывным функционалом в пространстве $C(a, b)$ всех непрерывных функций $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ является значение функции $\varphi(x)$ в фиксированной точке $x=\xi$. Оказывается, что общий вид линейного функционала в этом пространстве получается «стильтьесовским комбинированием» таких простейших функционалов; именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1 (Ф. Рисс). *Всякий линейный непрерывный функционал $f[\varphi]$ в пространстве $C(a, b)$ может быть записан в форме*

$$f[\varphi]=\int_a^b \varphi(\xi)\,dF(\xi), \tag{1}$$

где $F(\xi)$ — некоторая функция с ограниченным изменением, непрерывная справа.

Доказательство будет проведено в несколько этапов.

I. Рассмотрим линейное пространство K ограниченных функций $\varphi(x)$, заданных на некотором множестве X. Предположим, что на пространстве K задан линейный функционал $f[\varphi]$, удовлетворяющий условию

$$|f[\varphi]|\leqslant C\sup|\varphi(x)| \tag{2}$$

с фиксированной постоянной C.

Мы утверждаем, что *всякой ограниченной и возрастающей последовательности $\varphi_n(x)\in K$ отвечает сходящаяся последовательность $f[\varphi_n]$.* В самом деле, для любой $\varphi\in K$ можно написать:

$$|f[\varphi]|=\pm f[\varphi]=f[\pm\varphi]$$

при соответствующем выборе знака «+» или «—». Для заданной ограниченной (например, числом M) возрастающей последовательности $\varphi_n(x)\in K$ можно составить ряд

$$|f[\varphi_2-\varphi_1]|+|f[\varphi_3-\varphi_2]|+\ldots+|f[\varphi_{n+1}-\varphi_n]|+\ldots;$$

n-ю частную сумму этого ряда в соответствии со сказанным можно записать в форме

$$f[\pm(\varphi_2-\varphi_1)]+f[\pm(\varphi_3-\varphi_2)]+\ldots+f[\pm(\varphi_{n+1}-\varphi_n)]=$$
$$=f[\pm(\varphi_2-\varphi_1)\pm(\varphi_3-\varphi_2)\pm\ldots\pm(\varphi_{n+1}-\varphi_n)].$$

Но

$$|\pm(\varphi_2-\varphi_1)\pm\ldots\pm(\varphi_{n+1}-\varphi_n)|\leqslant(\varphi_2-\varphi_1)+\ldots+(\varphi_{n+1}-\varphi_n)=$$
$$=\varphi_{n+1}-\varphi_1\leqslant 2M,$$

откуда в силу (2)

$$|f[\varphi_2-\varphi_1]|+\ldots+|f[\varphi_{n+1}-\varphi_n]|\leqslant 2MC$$