$F(x, y)$, должна удовлетворять неравенству (1). Разумеется, предположение о непрерывности сверху, обеспечивающее полную аддитивность меры $\rho\Delta$, должно быть сохранено и в этом, более общем случае.

§ 7. Применение интеграла Стильтьеса в анализе

Интеграл Стильтьеса имеет многочисленные применения. Мы приведем в этом параграфе вывод трех формул из трех разных разделов математического анализа. Еще одна формула — именно представление положительно определенной функции — дается в § 7 гл. VII.

1. Линейные функционалы в пространстве $C(a, b)$. Простейшим линейным непрерывным функционалом в пространстве $C(a, b)$ всех непрерывных функций $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ является значение функции $\varphi(x)$ в фиксированной точке $x = \xi$. Оказывается, что общий вид линейного функционала в этом пространстве получается «стильтьесовским комбинированием» таких простейших функционалов; именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1 (Ф. Рисс). *Всякий линейный непрерывный функционал $f[\varphi]$ в пространстве $C(a, b)$ может быть записан в форме*

$$f[\varphi] = \int_a^b \varphi(\xi)\, dF(\xi), \tag{1}$$

где $F(\xi)$ — некоторая функция с ограниченным изменением, непрерывная справа.

Доказательство будет проведено в несколько этапов.

I. Рассмотрим линейное пространство K ограниченных функций $\varphi(x)$, заданных на некотором множестве X. Предположим, что на пространстве K задан линейный функционал $f[\varphi]$, удовлетворяющий условию

$$|f[\varphi]| \leqslant C \sup |\varphi(x)| \tag{2}$$

с фиксированной постоянной C.

Мы утверждаем, что *всякой ограниченной и возрастающей последовательности $\varphi_n(x) \in K$ отвечает сходящаяся последовательность $f[\varphi_n]$*. В самом деле, для любой $\varphi \in K$ можно написать:

$$|f[\varphi]| = \pm f[\varphi] = f[\pm\varphi]$$

при соответствующем выборе знака «+» или «—». Для заданной ограниченной (например, числом M) возрастающей последовательности $\varphi_n(x) \in K$ можно составить ряд

$$|f[\varphi_2 - \varphi_1]| + |f[\varphi_3 - \varphi_2]| + \ldots + |f[\varphi_{n+1} - \varphi_n]| + \ldots;$$

n-ю частную сумму этого ряда в соответствии со сказанным можно записать в форме

$$f[\pm(\varphi_2 - \varphi_1)] + f[\pm(\varphi_3 - \varphi_2)] + \ldots + f[\pm(\varphi_{n+1} - \varphi_n)] = \\ = f[\pm(\varphi_2 - \varphi_1) \pm (\varphi_3 - \varphi_2) \pm \ldots \pm (\varphi_{n+1} - \varphi_n)].$$

Но

$$|\pm(\varphi_2 - \varphi_1) \pm \ldots \pm (\varphi_{n+1} - \varphi_n)| \leqslant (\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \\ = \varphi_{n+1} - \varphi_1 \leqslant 2M,$$

откуда в силу (2)

$$|f[\varphi_2 - \varphi_1]| + \ldots + |f[\varphi_{n+1} - \varphi_n]| \leqslant 2MC$$

и, следовательно, ряд

$$f[\varphi_2-\varphi_1]+f[\varphi_3-\varphi_2]+\ldots+f[\varphi_{n+1}-\varphi_n]+\ldots$$

сходится; а это и означает сходимость последовательности $f[\varphi_n]$.

Естественно возникает вопрос: одинаково ли предельное значение $f[\varphi_n]$ для двух разных последовательностей φ_n, сходящихся, возрастая, к одной и той же функции φ?

Мы ограничимся здесь следующим простым утверждением: *исходя из данных последовательностей* $\varphi_n\nearrow\varphi$ *и* $\psi_n\nearrow\psi$, *построим строго возрастающие последовательности* $\overline{\varphi}_n=\varphi_n-\frac{1}{n}$, $\overline{\psi}_n=\psi_n-\frac{1}{n}$; *если для любого* n *можно найти* k *и* m *так, что* $\overline{\psi}_m>\overline{\varphi}_n$, $\overline{\varphi}_k>\overline{\psi}_n$, *то* $\lim f[\varphi_n]=\lim f[\psi_n]$. Действительно, в этом случае мы можем построить новую последовательность

$$\overline{\varphi}_1<\overline{\psi}_{n1}<\overline{\varphi}_{n2}<\overline{\psi}_{n3}<\ldots,$$

также сходящуюся к φ; по доказанному значения функционала f на этой последовательности имеют предел; но это означает, что числа $f[\varphi_n]$ и $f[\psi_n]$ стремятся к одному и тому же пределу.

То же относится, очевидно, к убывающим последовательностям.

Такое положение всегда имеет место, например, в случае, когда K есть пространство C всех непрерывных функций на отрезке или на замкнутом ограниченном множестве в p-мерном пространстве. Действительно, фиксируем n и будем неограниченно увеличивать m. Предположим, что для каждого m множество E_m точек, где $\psi_m-\frac{1}{m}\leqslant\varphi_n-\frac{1}{n}$, будет непустым. Замкнутые множества E_m образуют убывающую последовательность ($E_1\supset E_2\supset\ldots$), и если каждое из них непусто, то у всех этих множеств найдется общая точка x_0. Переходя в неравенстве

$$\psi_m(x_0)-\frac{1}{m}\leqslant\varphi_n(x_0)-\frac{1}{n}$$

к пределу при $m\longrightarrow\infty$, получим:

$$\varphi(x_0)\leqslant\varphi_n(x_0)-\frac{1}{n}$$

или

$$\varphi_n(x_0)\geqslant\varphi(x_0)+\frac{1}{n},$$

что невозможно.

Таким образом, в случае пространства C функционал f может быть *однозначно* определен на классе ограниченных функций C^+, которые являются пределами возрастающих последовательностей непрерывных функций. На классе C^+, очевидно, сохраняется равенство $f[\varphi+\psi]=f[\varphi]+f[\psi]$. Образуем класс R из разностей $g=\varphi-\psi$, $\varphi\in C^+$, $\psi\in C^+$, и положим $f[g]=f[\varphi]-f[\psi]$. И это определение приводит к однозначному результату (ср. § 2 гл. IV). Функционал f остается аддитивным и однородным на всем классе R. Если в классе K вместе с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ содержится $\max\{\varphi,\psi\}$ и $\min\{\varphi,\psi\}$, то в классе R сохраняется и неравенство (2); точнее говоря, из $g\in R$ следует, что

$$|f[g]|\leqslant C\sup|g(x)|. \tag{3}$$

В самом деле, пусть

$$g=\varphi-\psi,\quad \varphi_n\nearrow\varphi,\quad \psi_n\nearrow\psi\quad (\varphi_n,\ \psi_n\in K).$$

Обозначим $\sup|\varphi(x)-\psi(x)|=\mu$. Если $\sup|\varphi_n(x)-\psi_n(x)|\leqslant\mu$ при любом n, то искомое неравенство (3) получится предельным переходом из неравенства

$$|f[\varphi_n-\psi_n]|\leqslant C\sup|\varphi_n(x)-\psi_n(x)|,$$

имеющего место, поскольку $\varphi_n-\psi_n\in K$. В общем случае мы заменим функцию φ_n на $\bar\varphi_n$ по формуле

$$\bar\varphi_n=\max[\psi_n-\mu,\quad \min(\varphi_n, \psi_n+\mu)],$$

которая «обрезает» функцию φ_n в границах $\psi_n\pm\mu$. Вместе с функциями φ_n и ψ_n функции $\bar\varphi_n$ также возрастают и стремятся к φ. Но теперь уже $|\bar\varphi_n-\psi_n|\leqslant\mu$, и, следовательно, утверждение справедливо.

II. В качестве пространства K рассмотрим пространство $C(a, b)$ всех непрерывных функций $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$. Заданный линейный непрерывный функционал $f[\varphi]$ согласно I однозначно распространяется на некоторый класс разрывных функций; не описывая этот класс в целом, заметим только, что он содержит характеристические функции любых промежутков оси. Введем функцию

$$F(\xi)=f[\chi_{[a,\xi]}(x)],$$

где $\chi_{[a,\xi]}(x)$ равна 1 при $a\leqslant x\leqslant\xi$ и 0 при $\xi<x\leqslant b$.

Покажем, что функция $F(\xi)$ обладает ограниченным изменением. Пусть $a=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_n=b$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$; оценим сумму

$$\sum_{j=0}^{n-1}|F(\xi_{j+1})-F(\xi_j)|.$$

Очевидно,

$$|F(\xi_{j+1})-F(\xi_j)|=\pm[F(\xi_{j+1})-F(\xi_j)]=\pm f[\chi_{[\xi_j,\xi_{j+1}]}(x)]=$$
$$=f[\pm\chi_{(\xi_j,\xi_{j+1})}(x)]$$

и

$$\sum_{j=0}^{n-1}|F(\xi_{j+1})-F(\xi_j)|=f[\sum_{j=0}^{n-1}\pm\chi_{(\xi_j,\xi_{j+1})}(x)].$$

Функция, стоящая под знаком f, по модулю не превосходит 1; поэтому в силу неравенства (3)

$$\sum_{j=0}^{n-1}|F(\xi_{j+1})-F(\xi_j)|\leqslant C,$$

откуда и вытекает, что функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение.

Проверим далее, что $F(x)$ непрерывна справа, т. е. при любом $\xi<b$ и любой последовательности $\xi_n\searrow\xi$

$$F(\xi)=\lim F(\xi_k). \tag{4}$$

Последовательность $\psi_n(x)=\chi_{[a,\xi_n]}(x)$, убывая, стремится к функции $\psi(x)=\chi_{[a,\xi]}(x)$. Числа $f[\psi_n]$ и $f[\psi]$ определены однозначно; в частности, $f[\psi]$ есть предел чисел $f[\varphi_n]$, где $\varphi_n(x)$ — непрерывная функция, равная, например, 1 при $x\leqslant\xi+\frac{1}{n}$, равная 0 при $x\geqslant\xi+\frac{2}{n}$ и линейная в промежутке $\left[\xi+\frac{1}{n},\ \xi+\frac{2}{n}\right]$.

Чтобы установить искомое соотношение $f[\psi_n] \to f[\psi]$, нам достаточно показать, что для любого n можно найти k и m так, чтобы выполнялись неравенства

$$\psi_m + \frac{1}{m} < \varphi_n + \frac{1}{n}, \quad \varphi_k + \frac{1}{k} < \psi_n + \frac{1}{n}.$$

Но элементарным геометрическим построением (рис. 13) легко показать, что для заданного n искомые k и m всегда существуют. Таким образом, соотношение (4) справедливо.

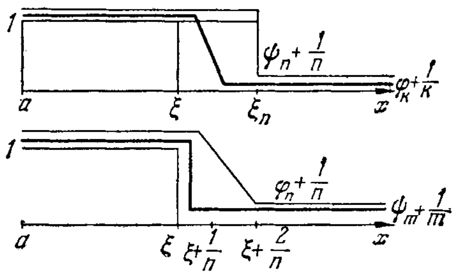

Рис. 13.

Заметим, в частности, что если функционал $f[\varphi]$ неотрицателен, т. е. принимает значения $\geqslant 0$ на функциях $\varphi(x) \geqslant 0$, то это свойство сохраняется и при расширении функционала на указанный класс разрывных функций. Поскольку при $\xi < \eta$ мы имеем $\chi_{[a,\xi]}(x) \leqslant \chi_{[a,\eta]}(x)$ в этом случае $F(\xi) \leqslant F(\eta)$, т. е. $F(\xi)$ — неубывающая функция.

Функция $F(x)$ как функция с ограниченным изменением может служить интегрирующей функцией для интеграла Стильтьеса. Мы имеем при этом

$$f[\chi_{[a,\xi]}(x)] = F(\xi) = \int_a^\xi dF(x) = \int_a^b \chi_{[a,\xi]}(x)\, dF(x), \tag{5}$$

вместе с характеристическими функциями интегралов равенство (5) справедливо для всех ступенчатых функций; а так как каждая непрерывная функция есть предел равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций, то, переходя к пределу, получаем равенство

$$f[\varphi] = \int_a^b \varphi(x)\, dF(x),$$

справедливое уже для любой непрерывной функции $\varphi(x)$. Теорема доказана.

III. Наметим путь обобщения этой теоремы на случай функций нескольких независимых переменных.

Функционал $f[\varphi]$ на пространстве C непрерывных функций (для простоты двух переменных x и y), меняющихся в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$[1]), в соответствии с п. I можно продолжить на класс разрывных функций, содержащий характеристические функции всех прямоугольников. Введем функцию двух переменных

$$F(\xi, \eta) = f[\chi_{[a,\, a,\, \xi,\, \eta]}(x, y)],$$

[1]) К этому случаю сводится и общий случай, когда функции $\varphi(x, y)$ меняются на произвольном ограниченном замкнутом множестве F. Множество F можно заключить в квадрат Q указанного вида и каждую непрерывную функцию, не увеличивая верхней грани ее модуля, продолжить до непрерывной функции на Q. Так как, обратно, каждая непрерывная функция на Q непрерывна и на F, то можно считать функционал f заданным на всем $C(Q)$.

где $\chi_{[a,\, a,\, \xi,\, \eta]}(x, y)$ есть характеристическая функция прямоугольника $[a \leqslant x \leqslant \xi,$ $a \leqslant y \leqslant \eta] = D_{\xi, \eta}$. Тем же приемом, что и в п. II, можно доказать, что функция $F(\xi, \eta)$ имеет ограниченное изменение и непрерывна сверху (см. конец § 6) и, следовательно, является интегрирующей для некоторого интеграла Стильтьеса. Далее, поскольку

$$f[\chi_{[a,\, a,\, \xi,\, \eta]}(x, y)] = F(\xi, \eta) = \iint\limits_{D_{\xi\eta}} dF(x, y) = \int\limits_a^b\int\limits_a^b \chi_{[a,\, a,\, \xi,\, \eta]}(x, y)\, dF(x, y),$$

переходом к линейным комбинациям и пополнением по метрике C мы получаем для любой непрерывной функции

$$f[\varphi] = \int\limits_a^b\int\limits_a^b \varphi(x, y)\, dF(x, y).$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для случая любого числа переменных.

2. Абсолютно монотонные функции. Бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ $(-\infty \leqslant a,\ b \leqslant \infty)$, называется *абсолютно монотонной*, если она сама и все ее производные неотрицательны:

$$f^{(n)}(x) \geqslant 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Абсолютно монотонной функцией является положительная постоянная, а также функция вида $e^{\alpha x}$ $(\alpha > 0)$. Оказывается, если отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ имеет бесконечную протяженность, то всякая абсолютно монотонная функция получается «стильтьесовским комбинированием» простейших абсолютно монотонных функций $e^{\alpha x}$. Ограничимся для определенности полупрямой $-\infty < x < 0$.

Теорема 2 (С. Н. Бернштейн). *Всякая абсолютно монотонная при $x < 0$ функция $f(x)$ может быть записана в форме*

$$f(x) = C + \int\limits_0^\infty e^{\alpha x}\, dF(\alpha), \tag{1}$$

где $F(\alpha)$ — некоторая неубывающая ограниченная функция.

Впрочем, постоянную C можно включить в интеграл, если добавить еще скачок функции $F(\alpha)$ при $\alpha = 0$.

Прежде чем доказывать эту теорему[1]), выясним некоторые свойства абсолютно монотонных функций. Так как $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ и не убывает, то существует предел $\theta_n = \lim\limits_{x \to -\infty} f^{(n)}(x)$; очевидно, что $\theta_0 \geqslant 0$, $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = 0$. Мы утверждаем далее, что функции $f^{(n)}(x)$ стремятся при $x \to -\infty$ к нулю настолько быстро, что сходятся все интегралы

$$I_n = \int\limits_{-\infty}^0 (-x)^n f^{(n+1)}(x)\, dx,$$

причем значение интеграла I_n таково:

$$I_n = Mn!,$$

[1]) По Б. И. Коренблюму, Успехи матем. наук, 1951, т. 6, № 4.

где $M=f(0)-f(-\infty)$. Действительно, для любого $n\geqslant 1$ и $x<0$

$$f^{(n)}(x)\leqslant\frac{2}{|x|}\int_{x}^{\frac{x}{2}}f^{(n)}(\xi)\,d\xi\leqslant\frac{2}{|x|}\left[f^{(n-1)}\left(\frac{x}{2}\right)-f^{(n-1)}(x)\right],$$

так что следующая производная убывает при $x\to-\infty$ по крайней мере на один порядок (по степени x) быстрее, чем предыдущая; так как $f\left(\frac{x}{2}\right)-$ $-f(x)\to 0$, то $f^{(n)}(x)\,x^n\to 0$ при любом n. Поэтому при интегрировании по частям

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{(-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\,dx=\frac{(-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)\Big|_{-\infty}^{0}+\int_{-\infty}^{0}\frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\,dx$$

внеинтегральный член обращается в нуль. Продолжая интегрирование, получим:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{(-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}f'(x)\,dx=f(0)-f(-\infty)=M,$$

что и требовалось.

Переходим к доказательству теоремы 2. По формуле Дирихле

$$f(x)-f(-\infty)=\int_{-\infty}^{x}f'(\xi)\,d\xi=\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{x}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)\,d\xi=$$
$$=\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{x}\xi^n\left(1-\frac{x}{\xi}\right)^n f^{(n+1)}(\xi)\,d\xi.$$

В этом интеграле произведем подстановку $\xi=-nt$; тогда получим:

$$f(x)-f(-\infty)=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_{-\frac{x}{n}}^{\infty}n^n t^n\left(1+\frac{x}{nt}\right)^n n^{n+1}f^{(n+1)}(-nt)\,n\,dt=$$
$$=\int_{-\frac{x}{n}}^{\infty}\left(1+\frac{x}{nt}\right)^n dF_n(t),$$

где

$$F_n(t)=\frac{(-1)^{n+1}\,n^{2n+2}}{n!}\int_{0}^{t}\tau^n f^{(n+1)}(-n\tau)\,d\tau. \tag{2}$$

Мы утверждаем, что функции $F_n(t)$ равномерно ограничены при всех $t \geqslant 0$. Действительно, заменяя в интеграле (2) величину $-n\tau$ на η, получим:

$$0 \leqslant F_n(t) = \frac{n^{2n+2}}{n!} \int\limits_{-nt}^{0} \frac{\eta^n}{n^n} f^{(n+1)}(\eta) \frac{1}{n^n+1} \frac{d\eta}{n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n!} \int\limits_{-\infty}^{0} f^{(n+1)}(\eta) \, |\eta|^n \, d\eta = M.$$

введем функции

$$\varphi_n(t, x) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{x}{nt}\right)^n, & t \geqslant -\dfrac{x}{n} > 0, \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant -\dfrac{x}{n}. \end{cases}$$

Эти функции стремятся при $n \to \infty$ равномерно по $t \, (t \geqslant 0)$ к пределу

$$\varphi(t, x) = e^{\frac{x}{t}}.$$

Отметим, что эта экспонента возрастает при $t \to \infty$ до значения 1 в силу предположения $x < 0$.

В силу теоремы 2 Хелли (§ 6) из последовательности неубывающих функций $F_n(t)$ можно выбрать всюду сходящуюся последовательность; по теореме 1 о сходимости интегралов Стильтьеса (см. Замечания 1 и 2 после этой теоремы) имеем:

$$\int\limits_0^\infty \varphi_n(t, x) \, dF_n(t) \to \int\limits_0^\infty \varphi(t, x) \, dF(t).$$

Следовательно, при $x < 0$

$$f(x) = f(-\infty) + \int\limits_0^\infty e^{\frac{x}{t}} dF(t);$$

заменяя здесь $\frac{1}{t}$ на α, мы получаем искомую формулу (1).

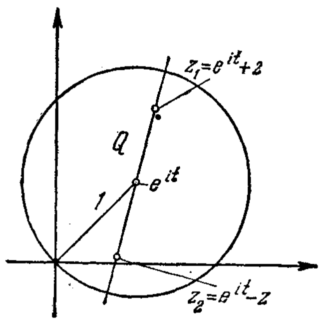

Рис. 14.

3. **Отображение единичного круга в правую полуплоскость.** Найдем общий вид функции $w = f(z)$, аналитической в круге $|z| < 1$ и имеющей неотрицательную вещественную часть, т. е. отображающей круг $|z| < 1$ в правую полуплоскость. Примером служат постоянная $\alpha + i\beta$, $\alpha \geqslant 0$, а также функция

$$f_t(z) = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$$

с произвольным вещественным t. В самом деле, при заданном t и $|z| \leqslant 1$ точки $z_1 = e^{it} + z$ и $z_2 = e^{it} - z$ находятся в пределах круга Q радиуса 1 с центром в точке e^{it} на одном диаметре этого круга (рис. 14). Весь этот диаметр виден из начала координат (находящегося на окружности круга Q) под углом $\frac{\pi}{2}$; отрезок диаметра между точками z_1 и z_2 виден под углом

$\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $|\arg f_t(z)| = |\arg z_1 - \arg z_2| \leqslant \frac{\pi}{2}$, откуда вытекает, что $\operatorname{Re} f_t(z) \geqslant 0$.

Оказывается, всякая функция $w = f(z)$, аналитическая в круге $|z| < 1$ и отображающая этот круг в правую полуплоскость, получается «стильтьесовским комбинированием» указанных простейших функций; именно имеет место следующая теорема:

Теорема 3. (Г. Херглотц). *Всякая аналитическая функция в круге $|z| < 1$ с неотрицательной вещественной частью может быть записана в виде*

$$f(z) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, dF(t), \tag{1}$$

где β — вещественное число, а $F(t)$ — неубывающая функция.

Доказательство[1]). Как известно аналитическая функция $f(z)$ в круге $|z| \leqslant r < 1$ может быть представлена через граничные значения своей вещественной части $u(z)$ по формуле Шварца

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}\, u(re^{it})\, dt + i\beta.$$

Этот интеграл можно записать в форме

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}\, dF_r(t) + i\beta,$$

где

$$F_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t u(re^{i\tau})\, d\tau$$

— неубывающая функция от t. Мы имеем, далее, по теореме о среднем для гармонических функций

$$F_r(t) \leqslant F_r(2\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau})\, d\tau = \frac{1}{2\pi} u(0),$$

так что семейство функций $F_r(t)$ равномерно ограничено при всех $r < 1$. Функции $\frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}$ ($|z| < 1$ фиксировано) сходятся при $r \to 1$ равномерно по t к функции $\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$. Из последовательности $F_r(t)$ $(r \to 1)$ согласно теореме 2 § 6 можно извлечь подпоследовательность, всюду сходящуюся к некоторой неубы-

[1]) По Н. И. Ахиезеру и И. М. Глазману (Теория линейных операторов. Гостехиздат, 1950). Формулу Шварца см., например, А. И. Маркушевич. Краткий курс теории аналитических функций, изд. 2-е, Физматгиз, 1961, гл. 6.

вающей функции $F(t)$; применяя теорему 1 § 6, получим:

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}-z}{re^{it}+z}\,dF_r(t)+i\beta\to\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}-z}{e^{it}+z}\,dF(t)+i\beta,$$

что и утверждалось.

Замечание. По формуле (1) может быть представлена и постоянная $\alpha\geqslant 0$; для этого достаточно положить $F(t)=\alpha t$.

§ 8. Дифференцирование функций множеств

1. Теоремы о дифференцировании функций от множеств можно сформулировать наиболее общим образом, отвлекаясь от природы того основного множества, по которому производится дифференцирование.

Пусть дано некоторое абстрактное множество X и некоторое семейство L вещественных функций $f(x)$, определенных на множестве X. Относительно семейства L предполагается, что оно представляет собой линейное пространство с обычными операциями сложения и умножения на числа, содержит все постоянные и вместе с каждой функцией $f(x)$ содержит ее модуль $|f(x)|$. Отсюда можно вывести, что из $f\in L$ следует $f^+\in L$, $f^-\in L$ и из $f\in L$, $g\in L$ следует $\max(f, g)\in L$ и $\min(f, g)\in L$.

Пусть, далее, на семействе L задан «интеграл» I, иными словами, задан линейный функционал, обладающий приведенными ниже свойствами а) — ж):

а) *Из* $\varphi(x)\geqslant 0$ *следует* $I\varphi\geqslant 0$.

Отсюда вытекает, что $I\varphi\leqslant I\psi$ для $\varphi\leqslant\psi$ и что $|I\varphi|\leqslant I(|\varphi|)$.

б) *Если* φ_n, *монотонно возрастая, стремится к функции* φ *и* $I\varphi_n$ *ограничены, то* $\varphi\in L$ *и* $I\varphi=\lim I\varphi_n$.

Функция $\varphi(x)$, для которой $I(|\varphi|)=0$, называется I-эквивалентной нулю, а множество, где такая функция отлична от нуля,— множеством I-меры нуль.

в) *Любая функция* $\varphi(x)$, *отличная от нуля только на множестве* I-*меры нуль, входит в пространство* L, *и* $I\varphi=0$.

г) *Пространство* L_I *классов* I-*эквивалентных функций есть полное нормированное пространство с нормой*

$$\|\varphi\|=I(|\varphi|).$$

Из г) можно вывести, что совокупность тех $\varphi\in L$, для которых $|\varphi|^2\in L$, образует полное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)=I(\varphi, \psi).$$

д) *Имеется некоторая совокупность ограниченных функций* L_0, *плотная в пространстве* L_I.

Совокупность всех функций $\varphi\in L_I$, которые являются пределами возрастающих последовательностей функций $\varphi_n\in L_0$, обозначается через L_I^+.

е) *Каждая функция* $\varphi\in L_I$ *есть разность двух функций, входящих в класс* L_I^+.

Имея множества меры нуль, естественно определить и понятие «почти всюду». Например, последовательность функций сходится почти всюду, если она сходится во всех точках множества X, кроме, быть может, множества меры нуль. Предел последовательности функций $\varphi_n(x)\in L_I$, сходящейся почти всюду, мы назовем I-измеримой функцией.

ж) *Произведение двух* I-*измеримых функций есть* I-*измеримая функция: частное* $1/\varphi$ *есть* I-*измеримая функция, если знаменатель* φ I-*измерим и обращается в нуль самое большее на множестве* I-*меры нуль.*