вающей функции $F(t)$; применяя теорему 1 § 6, получим:

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}-z}{re^{it}+z}\,dF_r(t)+i\beta\to\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}-z}{e^{it}+z}\,dF(t)+i\beta,$$

что и утверждалось.

Замечание. По формуле (1) может быть представлена и постоянная $\alpha\geqslant 0$; для этого достаточно положить $F(t)=\alpha t$.

§ 8. Дифференцирование функций множеств

1. Теоремы о дифференцировании функций от множеств можно сформулировать наиболее общим образом, отвлекаясь от природы того основного множества, по которому производится дифференцирование.

Пусть дано некоторое абстрактное множество X и некоторое семейство L вещественных функций $f(x)$, определенных на множестве X. Относительно семейства L предполагается, что оно представляет собой линейное пространство с обычными операциями сложения и умножения на числа, содержит все постоянные и вместе с каждой функцией $f(x)$ содержит ее модуль $|f(x)|$. Отсюда можно вывести, что из $f\in L$ следует $f^+\in L$, $f^-\in L$ и из $f\in L$, $g\in L$ следует $\max(f, g)\in L$ и $\min(f, g)\in L$.

Пусть, далее, на семействе L задан «интеграл» I, иными словами, задан линейный функционал, обладающий приведенными ниже свойствами а) — ж):

а) *Из $\varphi(x)\geqslant 0$ следует $I\varphi\geqslant 0$.*

Отсюда вытекает, что $I\varphi\leqslant I\psi$ для $\varphi\leqslant\psi$ и что $|I\varphi|\leqslant I(|\varphi|)$.

б) *Если φ_n, монотонно возрастая, стремится к функции φ и $I\varphi_n$ ограничены, то $\varphi\in L$ и $I\varphi=\lim I\varphi_n$.*

Функция $\varphi(x)$, для которой $I(|\varphi|)=0$, называется I-эквивалентной нулю, а множество, где такая функция отлична от нуля,— множеством I-меры нуль.

в) *Любая функция $\varphi(x)$, отличная от нуля только на множестве I-меры нуль, входит в пространство L, и $I\varphi=0$.*

г) *Пространство L_I классов I-эквивалентных функций есть полное нормированное пространство с нормой*

$$\|\varphi\|=I(|\varphi|).$$

Из г) можно вывести, что совокупность тех $\varphi\in L$, для которых $|\varphi|^2\in L$, образует полное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)=I(\varphi, \psi).$$

д) *Имеется некоторая совокупность ограниченных функций L_0, плотная в пространстве L_I.*

Совокупность всех функций $\varphi\in L_I$, которые являются пределами возрастающих последовательностей функций $\varphi_n\in L_0$, обозначается через L_I^+.

е) *Каждая функция $\varphi\in L_I$ есть разность двух функций, входящих в класс L_I^+.*

Имея множества меры нуль, естественно определить и понятие «почти всюду». Например, последовательность функций сходится почти всюду, если она сходится во всех точках множества X, кроме, быть может, множества меры нуль. Предел последовательности функций $\varphi_n(x)\in L_I$, сходящейся почти всюду, мы назовем I-измеримой функцией.

ж) *Произведение двух I-измеримых функций есть I-измеримая функция: частное $1/\varphi$ есть I-измеримая функция, если знаменатель φ I-измерим и обращается в нуль самое большее на множестве I-меры нуль.*

Можно доказать, так же как и в гл. IV, что I-измеримая функция, ограниченная по модулю I-суммируемой (т. е. функцией $\varphi \in L_I$), сама I-суммируема. В частности, всякая ограниченная I-измеримая функция является I-суммируемой.

Примерами совокупностей L_I могут служить пространства интегрируемых функций по мере Лебега или мере Стильтьеса на отрезке оси или в области n-мерного пространства.

2. Нашей задачей является сравнение двух интегралов I и J, удовлетворяющих поставленным условиям. Предполагается, что совокупность L_I функций φ, интегрируемых с помощью функционала I (короче, I-интегрируемых), и совокупность L_J функций ψ, интегрируемых с помощью функционала J (J-интегрируемых), определены на одном и том же множестве X и имеют пересечение L_0 (функции, одновременно I- и J-интегрируемые), плотное в L_I по метрике L_I и в L_J по метрике L_J.

Будем говорить, что интеграл I абсолютно непрерывен относительно интеграла J, если для любой $\psi \in L_0$ из $\psi \geqslant 0$, $J\psi = 0$, вытекает $I\psi = 0$.

Пусть, например, I есть интеграл Стильтьеса на отрезке $[a, b]$ с абсолютно непрерывной неотрицательной интегрирующей функцией $F(x)$, а J — интеграл Лебега на том же отрезке. В качестве множества L_0 возьмем совокупность всех ограниченных измеримых функций. Если $\psi \in L_0$, $\psi \geqslant 0$ и $J\psi = 0$, то, как мы знаем, функция ψ равна нулю почти всюду; но тогда и

$$I\psi = \int_0^b \psi \, dF = \int_a^b \psi F'(x) \, dx = 0,$$

т. е. интеграл I абсолютно непрерывен относительно интеграла J в только что определенном смысле. Как мы видели в § 5, в этом случае I-интегрируемые функции φ характеризуются тем, что произведение функции φ на некоторую фиксированную J-интегрируемую функцию $g(=F'(x))$ есть снова J-интегрируемая функция.

Аналогичный факт справедлив и в общем случае; мы докажем далее следующую основную теорему:

Теорема (Радона — Никодима). *Для того чтобы интеграл I был абсолютно непрерывен относительно интеграла J, необходимо и достаточно, чтобы существовала J-интегрируемая функция ψ_0 такая, что произведение ψ_0 и любой I-интегрируемой функции φ есть снова J-интегрируемая функция и*

$$I\varphi = J(\varphi\psi_0).$$

Доказательство[1]. Достаточность условия теоремы очевидна: если $\psi \in L_0$, $\psi \geqslant 0$, $J\psi = 0$, то множество, на котором $\psi > 0$, имеет J-меру нуль; в силу аксиомы в) функция $\psi\psi_0 \in L_J$, $J(\psi\psi_0) = 0$ и, следовательно, $I\psi = J(\psi\psi_0) = 0$. Мы должны показать, что условие теоремы необходимо для абсолютной непрерывности I относительно J.

Рассмотрим сначала случай, когда $I \leqslant J$, т. е. для любой $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi \in L_0$, имеет место неравенство $I\varphi \leqslant J\varphi$. В этом случае всякое множество J-меры нуль будет и множеством I-меры нуль. Всякая J-измеримая функция, как предел J-почти всюду сходящейся последовательности $\varphi_n \in L_0$, будет и I-измеримой функцией.

Мы утверждаем далее, что в этом случае интеграл I можно доопределить *на всех* функциях $\varphi \in L_J$.

---

[1] По Ф. Риссу.

Действительно, можно образовать последовательность $\varphi_n \in L_0$, сходящуюся к заданной функции $\varphi \in L_J$ по метрике L_J, так что

$$J(|\varphi_n - \varphi|) \to 0.$$

Но тогда

$$|I\varphi_n - I\varphi_m| \leqslant I(|\varphi_n - \varphi_m|) \leqslant J(|\varphi_n - \varphi_m|) \to 0,$$

так что последовательность φ_n фундаментальна по норме L_I. Положим $I\varphi = \lim I\varphi_n$. Это определение, как легко видеть, однозначно, и для $\varphi \geqslant 0$ всегда $I\varphi \leqslant J\varphi$.

Мы утверждаем, во-вторых, что функционал I, доопределенный, как указано, на все пространство L_J, является на любом пространстве $L_J^p (p \geqslant 1)$ ограниченным функционалом по норме L_J^p. Действительно, для $\varphi \in L_J^p$ имеет место неравенство

$$I(|\varphi|^p) \leqslant J(|\varphi|^p),$$

так что функционал I заведомо ограничен на единичном шаре пространства L_J^p. Мы рассмотрим только значение $p = 2$. Согласно теореме об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве (гл. V, § 2) существует функция $g \in L_J^2$ такая, что для любой $\varphi \in L_J^2$

$$I\varphi = J(g\varphi). \tag{1}$$

Мы утверждаем, что функция g заключена в границах $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ почти всюду по мере J. Действительно, положим в равенстве (1) $\varphi = g^-$; тогда мы получим:

$$Ig^- = J(gg^-) = J(-(g^-)^2) = -J((g^-)^2),$$

и так как $Ig^- \geqslant 0$, $J((g^-)^2) \geqslant 0$, то

$$Ig^- = J((g^-)^2) = 0,$$

так что множество точек, где $g^-(x) \geqslant 0$, имеет J-меру нуль. Итак, почти всюду по мере J мы имеем $g(x) \geqslant 0$. Второе неравенство $g(x) \leqslant 1$ получается заменой в предыдущих рассуждениях функционала I на $J - I$.

Равенство (1) установлено для всех $\varphi \in L_J^2$. Перенесем его теперь на все функции $\varphi \in L_I$. Достаточно рассмотреть функции класса L_I^+. По определению каждую функцию $\varphi \in L_I^+$ можно представить в виде предела возрастающей последовательности функций $\varphi_n \in L_0$. Для функций φ_n равенство (1) справедливо:

$$I\varphi_n = J(g\varphi_n).$$

Вместе с соотношением $\varphi_n \nearrow \varphi$ также имеет место и соотношение $g\varphi_n \nearrow g\varphi$. В силу свойства б) функция $g\varphi$ принадлежит L_I, причем

$$J(g\varphi) = \lim J(g\varphi_n) = \lim I\varphi_n = I\varphi.$$

Итак, для любой $\varphi \in L_I$ мы имеем $g\varphi \in L_J$ и $J(g\varphi) = I\varphi$. Имеет место и обратное утверждение в следующей форме: если φ I-измерима и $g\varphi \in L_J$, то $\varphi \in L_I$ и $I\varphi = J(g\varphi)$[1]). Для доказательства положим $\varphi_N = \min\{|\varphi|, N\}$. Функция φ_N ограничена и I-измерима, следовательно, I-суммируема, и по доказанному $I\varphi_N = J(g\varphi_N)$. Так как $J(g\varphi_N) \leqslant J(g|\varphi|)$, то числа $I\varphi_N$ ограничены; отсюда $|\varphi| = \lim \varphi_N$ принадлежит L_I, что и требовалось.

---

[1]) Если к числу наших аксиом добавить аксиомы, связывающие, как у Лебега, измеримые функции с измеримыми множествами, то условие I-измеримости φ станет излишним (ср. § 5, п. 3).

Мы доказали теорему Радона — Никодима в случае $I \leqslant J$. Переходим теперь к общему случаю.

Пусть I и J — произвольные неотрицательные функционалы, удовлетворяющие условиям п. 1, причем I абсолютно непрерывен относительно J. Введем функционал $K = I + J$. Так как $I \leqslant K$, $J \leqslant K$, то существуют функции k и l, принадлежащие пространству L_K^2 и заключенные между 0 и 1 такие, что для любой $\varphi \in L_I$

$$I\varphi = K(k\varphi) \tag{2}$$

и для любой $\psi \in L_J$

$$J\psi = K(l\psi). \tag{3}$$

При $\varphi = \psi \in L_0$ мы получаем:

$$I\varphi + J\varphi = K\varphi = K[(k+l)\varphi],$$

и так как L_0 плотно в L_K, то и для любой $\varphi \in L_K$

$$K\varphi = K[(k+l)\varphi].$$

Мы утверждаем, что почти всюду по мере K имеет место равенство

$$k + l = 1. \tag{4}$$

Для этого возьмем в качестве φ характеристическую функцию e_0 множества $E_0 = \{k + l < 1\}$. Мы получим:

$$Ke_0 = K[(k+l)e_0]$$

или

$$K[(1-(k+l)e_0] = 0. \tag{5}$$

Но функция $[1-(k+l)]e_0$ неотрицательна; в силу равенства (5) она почти всюду по K равна нулю. Следовательно, неравенство $k+l<1$ может выполняться лишь на множестве K-меры нуль. Аналогично и неравенство $k+l>1$ может выполняться лишь на множестве K-меры нуль. Таким образом, (4) выполняется почти всюду по мере K, что и утверждалось.

Итак, для всякой J-суммируемой функции ψ произведение $(1-k)\psi$ K-суммируемо и имеет место равенство

$$J\psi = K[(1-k)\psi]. \tag{6}$$

Равенство (6) имеет место и в том случае, когда функция ψ J-измерима, а $(1-k)\psi$ K-суммируема; как мы видели выше, отсюда следует J-суммируемость функции ψ. Возьмем в качестве функции φ в (2) и в качестве ψ в (3) характеристическую функцию e множества Z, где $k(x) = 1$; тогда получим.

$$Ie = K(ke) = K(e),$$
$$Je = K((1-k)e) = K(0) = 0.$$

Мы видим, что множество Z имеет J-меру нуль. Так как I абсолютно непрерывен относительно J, то и $Ie = 0$ и $Ke = 0$; множество Z имеет I-меру нуль и K-меру нуль. Пусть теперь φ — любая функция из пространства L_I. Найдем функцию ψ из условия

$$k\varphi = (1-k)\psi.$$

Имеем:

$$\psi = \frac{k}{1-k}\varphi = \frac{1}{1-k}k\varphi.$$

Здесь $k\varphi \in L_K$ есть K-измеримая функция. Коэффициент $\frac{1}{1-k}$ — также K-измеримая функция, поскольку знаменатель обращается в нуль на множестве

K-меры нуль. Поэтому ψ есть I-измеримая функция, а следовательно, и J-измеримая функция. Так как $(1-k)\psi = k\varphi \in L_K$, то ψ J-суммируема и

$$I\varphi = K(k\varphi) = K((1-k)\psi) = J\psi = J\left(\frac{k}{1-k}\varphi\right). \tag{7}$$

Полагая в (7) $\varphi = 1$, находим, что $\psi_0 = \frac{k}{1-k}$ есть J-интегрируемая функция. Тем самым теорема Радона — Никодима доказана полностью.

Заключительное замечание. Связь дифференцирования и интегрирования, описанная нами в §§ 1—3, была найдена впервые Лебегом (1902) и является одним из важнейших достижений лебеговской теории интегрирования. Несколько ранее (1894) Т. Стильтьес (голландский математик, 1856—1894), занимаясь теорией непрерывных дробей, пришел к новому понятию интеграла, называемого теперь интегралом Римана — Стильтьеса. С работы Ф. Рисса, который в 1909 г. получил представление общего вида линейного функционала в пространстве непрерывных функций с помощью интеграла Стильтьеса, начинается широкое проникновение интеграла Стильтьеса в самые различные области анализа; вместе с тем развивается и общая теория меры, переходя постепенно с прямой на многомерное пространство и затем на абстрактные множества. Именно в таком общем виде теория меры и интеграла оказалась способной участвовать в задачах высшего анализа, таких, как гармонический анализ на группах, теория случайных процессов, динамические системы и др. Рекомендуемая литература: П. Халмош, Теория меры, ИЛ, 1953.