ГЛАВА VII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. О сходимости рядов Фурье

1. Во многих вопросах анализа используется разложение функций в ряд Фурье. В простейшем случае, для отрезка $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, это разложение, будучи записано в комплексной форме, имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}. \tag{1}$$

Разложение в ряд Фурье, сравнительно с другими возможными разложениями, появляется чаще по следующим причинам. Во-первых, функции e^{imx} при различных m ортогональны [в метрике комплексного гильбертова пространства $L_2(-\pi, \pi)$], так что разложение (1) есть разложение по ортогональному базису. Во-вторых, функции $e^{imx} = u_m(x)$, будучи продолженными на всю ось с периодом 2π, остаются превосходными по своим аналитическим качествам (целые аналитические функции) и удовлетворяют простым функциональным уравнениям, таким, как

$$u_m(x+\xi) = u_m(x)\, u_m(\xi)$$

или

$$u'_m(x) = imu_m(x).$$

В-третьих, коэффициенты разложения (1) вычисляются по простым формулам:

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi)\, e^{-im\xi} d\xi. \tag{2}$$

Вопрос о сходимости ряда Фурье (1) может иметь разные формы. Во-первых, можно выяснять, сходится ли ряд Фурье в данной точке x_0. Во-вторых, можно рассматривать сходимость ряда (1) в различных нормах. Вторую постановку мы уточним в п. 2; здесь же мы займемся первой постановкой, т. е. изучением сходимости ряда Фурье в отдельной точке в обычном числовом смысле.

Мы докажем здесь следующую теорему, дающую достаточное условие сходимости ряда Фурье (1) к значению $\varphi(x)$ в данной точке x_0.

Теорема 1. *Если для суммируемой функции* $\varphi(x)$ *сходится интеграл*

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)|}{|h|}\,dh,$$

то частные суммы ряда Фурье функции $\varphi(x)$ *в точке* $x=x_0$ *сходятся к значению* $\varphi(x_0)$.

Условие суммируемости отношения $\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$ при $|t|<\delta$ называется *условием Дини*. Оно выполняется, например, если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет *условию Липшица порядка* α:

$$|\varphi(x+t)-\varphi(x)|\leqslant C|t|^{\alpha} \qquad (0<\alpha\leqslant 1).$$

В частности, если функция φ имеет в точке x конечную производную (или хотя бы конечные производные числа, гл. VI, § 1), то выполняется условие Липшица порядка 1 и, следовательно, числа $s_n(x)$ сходятся к числу $\varphi(x)$.

Приступая к доказательству теоремы, мы начинаем с преобразования выражения частной суммы $s_n(x)$ ряда (1). Имеем:

$$s_n(x)=\sum_{-n}^{n} a_k e^{ikx}=\frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\xi)\,e^{ik(x-\xi)}\,d\xi.$$

Произведем подстановку $x-\xi=-t$. Будем считать, что функция $\varphi(\xi)$ продолжена с отрезка $[-\pi, \pi]$ на всю прямую, как периодическая функция с периодом 2π; тогда новые пределы интегрирования $-\pi-x$ и $\pi-x$ можно будет заменить на $-\pi$ и π, и в результате мы получим:

$$\sum_{-n}^{n} a_k e^{ikx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{-n}^{n} e^{ikt}\,dt.$$

Далее, суммируя геометрическую прогрессию, получаем:

$$\sum_{-n}^{n} e^{ikt}=\frac{e^{int}-e^{-i(n+1)t}}{1-e^{-it}}=\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}}=\frac{\sin\left(h+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

и, таким образом,

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \qquad (3)$$

Функция

$$D_n(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

называется *ядром Дирихле*. Если положить $\varphi(x)\equiv 1$, то, очевидно, $s_n(x)\equiv 1$ при любом n; в этом случае формула (3) дает:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt=1.$$

Разность $s_n(x)-\varphi(x)$ теперь можно привести к виду

$$s_n(x)-\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{4}$$

Мы хотим выяснить, при каких условиях $s_n(x)$ стремится к $\varphi(x)$, или, что то же, интеграл (4) стремится к нулю. Для этого докажем лемму:

Лемма 1. *Если $\varphi(x)$ — суммируемая функция на отрезке $[a, b]$, то интегралы*

$$\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x\,dx,\qquad \int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx$$

стремятся к нулю при $\lambda\to\infty$.

Доказательство. Пусть сначала $\varphi(x)$ — характеристическая функция интервала $(c, d)\subset[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x\,dx=\int_c^d \sin\lambda x\,dx=\frac{\cos\lambda c-\cos\lambda d}{\lambda}\to 0.$$

Любая ступенчатая функция $h(x)$ есть линейная комбинация характеристических функций интервалов, поэтому для любой ступенчатой функции утверждение леммы также справедливо.

Если же $\varphi(x)$ — произвольная суммируемая функция, то для заданного $\varepsilon>0$ мы найдем ступенчатую функцию $h(x)$ так, чтобы иметь

$$\int_a^b|\varphi(x)-h(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2},$$

и далее найдем $\lambda_0 > 0$ так, чтобы при $|\lambda| > \lambda_0$ было

$$\left|\int_a^b h(x)\sin\lambda x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при этих значениях λ

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x\,dx\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(x)-h(x)|\,dx + \left|\int_a^b h(x)\sin\lambda x\,dx\right| < \varepsilon,$$

откуда все следует. Для множителя $\cos\lambda x$ доказательство аналогичное.

В частности, мы приходим к выводу: *Коэффициенты Фурье a_n всякой интегрируемой функции $\varphi(x)$ стремятся к нулю при $n\to\infty$.*

Вернемся теперь к интегралу (4)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = I_n.$$

Предположим, что при данном значении x суммируемая функция $\varphi(x)$ определена и конечна и отношение

$$\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$$

интегрируемо по t в пределах $|t|\leqslant\delta$, и, следовательно, и по всему интервалу $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$. Тогда и функция

$$\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}\,\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}$$

интегрируема в пределах $-\pi<t<\pi$ и к интегралу I_n можно применить лемму 1; в силу этой леммы I_n стремится к нулю при $n\to\infty$, что нам и требуется. Таким образом, теорема 1 доказана.

Замечание. Условие Дини в ряде случаев можно ослабить, но вовсе отбросить его с сохранением сходимости ряда Фурье нельзя. Существуют даже непрерывные функции, у которых ряд Фурье в отдельных точках расходится (см. п. 3). А. Н. Колмогоров построил пример суммируемой функции, у которой ряд Фурье расходится в каждой точке[1]). До сих пор нет решения проблемы, поставленной Н. Н. Лузиным в 1915 г.: будет ли сходиться почти всюду ряд Фурье для функции $f\in L_2$?

В тех же терминах можно дать и условие равномерной сходимости ряда Фурье.

---

[1]) См. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939, гл. 8.

Теорема 1'. *Если на некотором множестве $E \subset [-\pi, \pi]$ суммируемая функция $\varphi(x)$ ограничена и условие Дини выполняется равномерно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\varphi(x+t)-\varphi(x)|}{|t|}\,dt < \varepsilon$$

одновременно для всех $x \in E$, то ряд Фурье функции $\varphi(x)$ сходится к ней равномерно на множестве E.

Для доказательства используем лемму, являющуюся усилением леммы 1.

Лемма 1'. *Соотношение*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt = 0$$

осуществляется равномерно на любом множестве B суммируемых на $[a, b]$ функций $f(t)$, компактном по метрике $L_1(a, b)$.

Действительно, по заданному $\varepsilon > 0$ мы можем построить в $L_1(a, b)$ конечную $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для множества B; пусть это будут функции $f_1(t), \ldots, f_m(t)$. По лемме 1 можно найти λ_0 так, чтобы при $\lambda > \lambda_0$ выполнялись неравенства

$$\left|\int_a^b f_j(t)\sin\lambda t\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Если теперь $f(t) \in B$ — любая функция и для некоторого j мы имеем $\|f(t) - f_j(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, то при $\lambda > \lambda_0$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)-f_j(t)|\,dt + \left|\int_a^b f_j(t)\sin\lambda t\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Переходим к доказательству теоремы 1'. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ так, чтобы иметь при всех $x \in E$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\varphi(x+t)-\varphi(x)|}{|t|}\,dt < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Тогда

$$s_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}\,\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}. \tag{6}$$

Так как $\dfrac{t}{2\pi \sin \frac{t}{2}} < 1$, то первое слагаемое в силу (5) не превосходит $\frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \in E$. Для оценки остальных слагаемых покажем, что функции

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{\sin \frac{t}{2}},$$

как функции от $t \in [\delta, \pi]$ с параметром $x \in E$, образуют компактное множество B в пространстве $L_1(\delta, \pi)$. Пусть $x_n \in E$ — любая последовательность точек; можно считать, что x_n стремятся к некоторой точке x_0 и что значения $\varphi(x_n)$ стремятся к некоторому числу c_0. Тогда в метрике $L_1(\delta, \pi)$ мы получим $\varphi(x_n + t) \longrightarrow \varphi(x_0 + t)$ и, значит,

$$\| f_{x_n}(t) - f_{x_0}(t) \| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{\varphi(x_n+t) - \varphi(x_0+t)}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|} \right\| + \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{\varphi(x_n) - c_0}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} [\| \varphi(x_n + t) - \varphi(x_0 + t) \| + \pi | \varphi(x_n) - c_0 |] \longrightarrow 0,$$

т. е. последовательность $f_{x_n}(t)$ фундаментальна в $L_1(\delta, \pi)$.

Таким образом, множество B компактно. По лемме 1' можно найти λ_0 так, что при $n > \lambda_0$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{\sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

одновременно для всех $x \in E$. Аналогичное построение можно провести для последнего слагаемого в (6). В результате мы видим, что при достаточно больших n величина $| s_n(x) - \varphi(x) |$ становится $< \varepsilon$ сразу для всех $x \in E$, чем теорема 1' и доказана.

Следствие. *Если в некотором промежутке* $[\alpha, \beta] \subset [-\pi, \pi]$ *все производные числа суммируемой функции* $\varphi(x)$ *остаются ограниченными некоторой постоянной* K, *то ряд Фурье функции* $\varphi(x)$ *сходится равномерно на любом отрезке* $[\alpha', \beta']$ *таком, что* $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$.

Действительно, при $x \in [\alpha', \beta']$ мы имеем:

$$| \varphi(x+t) - \varphi(x) | \leqslant K | t |$$

для всех $| t | \leqslant \min(\beta - \beta', \alpha' - \alpha)$, так что на отрезке $[\alpha', \beta']$ функция $\varphi(x)$ ограничена и условие Дини выполняется равномерно.

Например, если суммируемая функция $\varphi(x)$ равна нулю на отрезке $[\alpha, \beta]$ то ее ряд Фурье сходится к нулю равномерно в любом внутреннем по отношению к $[\alpha, \beta]$ отрезке $[\alpha', \beta']$.

Задачи. 1. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и в окрестности точки x_0 имеет ограниченное изменение, то ряд Фурье функции $\varphi(x)$ при $x = x_0$ сходится к $\varphi(x_0)$.

Указание. Достаточно рассмотреть неубывающую $\varphi(x)$. Использовать вторую теорему о среднем:

$$\int_0^h \varphi(t) g(t)\, dt = \varphi(h) \int_\xi^h g(t)\, dt, \qquad 0 < \xi < h,$$

и равномерную ограниченность интеграла $\int\limits_{n\xi}^{nh} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

2. Без предположения непрерывности $\varphi(x)$ в задаче 1 ряд Фурье сходится к значению $\frac{1}{2}[\varphi(x_0+0)+\varphi(x_0-0)]$.

Указание: В силу четности ядра Дирихле

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) D_n(t)\, dt = \int_0^{\pi} [\varphi(x+t)+\varphi(x-t)]\, D_n(t)\, dt.$$

2. Переходим к вопросам о сходимости ряда Фурье

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx} \tag{1}$$

по нормам различных функциональных пространств. Сначала напомним известные факты относительно сходимости рядов Фурье. В элементарных курсах анализа доказывается, что всякая непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция $\varphi(x)$, кусочно-гладкая и удовлетворяющая условию $\varphi(\pi) = \varphi(-\pi)$ (обеспечивающему непрерывность 2π-периодического продолжения функции $\varphi(x)$ на всю ось), разлагается в ряд Фурье, сходящийся абсолютно и равномерно, т. е., в частности, по норме пространства $C(-\pi, \pi)$. С другой стороны, в гл. V мы видели, что всякая квадратично интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция $\varphi(x)$ есть сумма ряда Фурье (1), сходящегося к $\varphi(x)$ в среднем квадратическом [т. е. по метрике пространства $L_2(-\pi, \pi)$].

Ряды по функциям e^{imx} можно строить и изучать и в других нормированных пространствах функций на отрезке $[-\pi, \pi]$. Но всех нормированных пространств функций слишком много; мы ограничимся важным классом пространств, содержащим большинство тех, которые используются в аналитических применениях.

Определение. Нормированное пространство R функций, определенных на отрезке $[-\pi, \pi]$, называется *однородным пространством* функций, если выполняются следующие условия:

1) Все функции $\varphi(x) \in R$ суммируемы, и из сходимости $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ по норме R вытекает сходимость $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ по норме $L_1(-\pi, \pi)$, т. е. соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx \to 0.$$

2) Если функцию $\varphi(x)$ продолжить на всю ось x, как периодическую функцию с периодом 2π, то при любом вещественном h будут иметь смысл функции $\varphi(x+h)$ — сдвиги функции $\varphi(x)$. Требуется, чтобы все эти сдвиги принадлежали пространству R вместе с функцией $\varphi(x)$ и чтобы норма со сдвигом не менялась:

$$\|\varphi(x+h)\| = \|\varphi(x)\| \quad \text{при любом } h. \tag{2}$$

3) Пространство R содержит все тригонометрические многочлены — линейные комбинации функций e^{imx}, и их совокупность образует всюду плотное множество в пространстве R.

Условиям 1—3 удовлетворяют многие из известных нам пространств функций. Например, эти условия выполнены в пространствах $L_p(-\pi, \pi)$ для всех $p \geqslant 1$. В пространстве $C(-\pi, \pi)$ всех непрерывных функций на $[-\pi, \pi]$ условие 2 не выполнено, так как непрерывная функция $\varphi(x)$ при $\varphi(\pi) \neq \varphi(-\pi)$ перестает быть непрерывной после периодического продолжения на всю ось и, например, $\varphi(x+\pi)$ уже не входит в $C(-\pi, \pi)$. Но если мы рассмотрим не все пространство $C(-\pi, \pi)$, а только его подпространство $\hat{C}(-\pi, \pi)$, выделяемое условием $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, то $\hat{C}(-\pi, \pi)$ будет уже удовлетворять всем условиям 1—3. Аналогично подпространство $\hat{D}_n(-\pi, \pi)$ пространства $D_n(-\pi, \pi)$, выделяемое условиями $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, $\varphi'(-\pi) = \varphi'(\pi), \ldots, \varphi^{(n)}(-\pi) = \varphi^{(n)}(\pi)$, также удовлетворяет условиям 1—3.

Установим прежде всего вид ряда Фурье в однородном пространстве R. Собственно, нам понадобится здесь только условие 1.

Лемма 2. *Если для некоторой функции $\varphi(x)$, входящей в однородное пространство R, разложение*

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m e^{imx} \tag{3}$$

сходится по норме пространства R, то

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) e^{-im\xi} d\xi \tag{4}$$

есть обычные коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$.

Доказательство. В силу условия 1 имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{-n}^{n} a_m e^{imx} - \varphi(x) \Big| dx \to 0.$$

Но тогда и при каждом фиксированном k

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big\{ \Big| e^{-ikx} \sum_{-n}^{n} a_m e^{imx} - e^{-ikx} \varphi(x) \Big\} dx \to 0,$$

откуда, в силу ортогональности функций e^{imx} на $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-ikx} dx = \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \sum_{-n}^{n} a_m e^{imx} dx = a_k \cdot 2\pi,$$

что и приводит нас к формуле (4).

Следующее свойство функций, входящих в однородное пространство, играет важную роль в дальнейшем.

Лемма 3. *Всякая функция $\varphi(x)$, входящая в однородное пространство R, непрерывна относительно сдвига по норме: для любого $\varepsilon < 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $|h| < \delta$ имеем $\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Обозначим через Q совокупность всех функций $\varphi(x) \in R$, непрерывных по норме относительно сдвига. Очевидно, что совокупность Q есть подпространство пространства R: оно содержит вместе с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ любую их линейную комбинацию. Покажем, что Q замкнуто по норме. Пусть $\varphi_n \to \varphi$, где $\varphi_n \in Q$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем номер n так, чтобы иметь $\|\varphi - \varphi_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Затем подберем δ из условия непрерывности относительно сдвига функции $\varphi_n(x)$ так, чтобы иметь $\|\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $|h| < \delta$. В силу условия 2 мы будем иметь одновременно и $\|\varphi(x+h) - \varphi_n(x+h)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Отсюда

$$\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| \leq \|\varphi(x+h) - \varphi_n(x+h)\| + \\ + \|\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)\| + \|\varphi_n(x) - \varphi(x)\| < \varepsilon,$$

так что функция $\varphi(x)$ также непрерывна относительно сдвига. Наконец, заметим, что каждая из функций e^{imx} непрерывна относительно сдвига, так как

$$\|e^{im(x+h)} - e^{imx}\| = |e^{imh} - 1| \, \|e^{imx}\| \to 0 \text{ при } |h| \to 0.$$

Таким образом, совокупность Q содержит все тригонометрические многочлены и замкнута; поэтому в силу условия 3 $Q = R$, и лемма доказана.

Теперь мы переходим к формулировке основных наших проблем.

А. *Дана функция $\varphi(x)$ из однородного пространства R, и по формулам* (4) *вычислены ее коэффициенты Фурье. Будет ли ряд Фурье $\sum_{-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}$ сходиться к функции $\varphi(x)$ по норме пространства R?*

Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный: существуют однородные пространства, и притом самые привычные нам, как

$\hat{C}(-\pi, \pi)$ и $L_1(-\pi, \pi)$, в которых ряд Фурье, во всяком случае для некоторых функций, оказывается расходящимся.

Такой ответ вызывает естественное пожелание:

Б. *Указать по возможности простой единообразный процесс, позволяющий эффективно восстанавливать функцию $\varphi(x)$ по ее ряду Фурье, невзирая на возможную расходимость этого ряда.*

В направлении выполнения этого пожелания мы получим здесь следующий результат:

Теорема 2. *Для любой функции $\varphi(x) \in R$ средние арифметические частных сумм $s_n(x) = \sum_{-n}^{n} a_m e^{imx}$ ее ряда Фурье*

$$\sigma_p(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_{p-1}(x)}{p}$$

сходятся по норме к функции $\varphi(x)$ при $p \to \infty$.

3. В этом пункте мы убедимся, что в пространствах $\hat{C}(-\pi, \pi)$ и $L_1(-\pi, \pi)$ имеются функции, ряды Фурье которых не сходятся по норме пространства. Вначале мы покажем, что интегралы

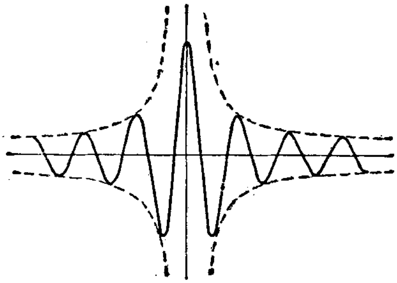

Рис. 15.

$$D_n = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt,$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}},$$

неограниченно возрастают при $n \to \infty$. График функции $D_n(t)$ дан на рис. 15.

В точках t, где $\left(n + \frac{1}{2}\right) t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \ldots,$ величина $\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right|$ обращается в единицу; в интервалах

$$\left|\left(n + \frac{1}{2}\right) t - \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi\right| < \frac{\pi}{3} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

эта величина превосходит $\frac{1}{2}$. В этих же интервалах величина $\sin \frac{t}{2}$ не превосходит

$$\sin \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{1}{3}\pi}{2\left(n + \frac{1}{2}\right)} < \frac{(k+1)\pi}{2n}.$$

Поэтому интеграл от $|D_n(t)|$, распространенный только на указанные промежутки, заведомо превосходит

$$\frac{2\pi}{3\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{(k+1)\pi}{2n}}=\frac{2n}{3\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\to\infty.$$

Собственно, в этом факте и заключается основная причина того, что ряд Фурье, вообще говоря, не сходится в пространствах $\hat{C}(-\pi, \pi)$ и $L_1(-\pi, \pi)$. Рассмотрим в пространстве $\hat{C}(-\pi, \pi)$ функционалы

$$\Phi_n[\varphi]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,D_n(t)\,dt,$$

дающие значение частной суммы $s_n(x)$ ряда Фурье для функции $\varphi(x)$ при $x=0$. Каждый из функционалов $\Phi_n(\varphi)$ ограничен на единичном шаре пространства $\hat{C}(-\pi, \pi)$, но *в совокупности* они не ограничены на этом шаре. Действительно, если брать в качестве $\varphi(t)$ непрерывные функции, приближающиеся к $+1$ на интервалах, где $D_n(t)$ положительно, и к -1 на интервалах, где $D_n(t)$ отрицательно, причем так, чтобы они по модулю не превосходили 1 и тем самым принадлежали единичному шару пространства $\hat{C}(-\pi, \pi)$, мы будем получать как угодно большие (при достаточно большом n) числовые значения $\Phi_n(\varphi)$. Мы утверждаем, что существует и индивидуальная функция $\varphi_0(x)$, на которой значения функционалов $\Phi_n(\varphi_0)$ не ограничены (и, значит, соответствующий ряд Фурье расходится при $x=0$). Это вытекает из следующей общей леммы функционального анализа:

Лемма 4. *Если в полном нормированном пространстве R последовательность линейных функционалов Φ_n не является ограниченной в шаре $|\varphi|\leqslant 1$, то имеется элемент φ_0, на котором $\Phi_n[\varphi_0]$ не ограничены.*

Доказательство этой леммы приводится в Дополнении, § 2 (стр. 427).

Таким образом, *заведомо имеется непрерывная функция, для которой ряд Фурье расходится в точке $x=0$.*

С небольшой технической доделкой такое же рассуждение можно провести и для пространства $L_1(-\pi, \pi)$. Предположим, что для любого $\varphi\in L_1$ частные суммы ряда Фурье $S_n\varphi$ стремятся по норме к элементу φ. Даже можно предположить и меньше, а именно, что числа $\|S_n\varphi\|$ ограничены для каждого $\varphi\in L_1$. Тогда мы можем утверждать, что *числа $\|S_n\varphi\|$ ограничены одной и той же постоянной K для всех $\|\varphi\|\leqslant 1$.* Если бы это было не так, то, применяя ту же лемму функционального анализа, мы нашли бы элемент φ_0, для которого числа $\|S_n\varphi_0\|$ не были бы ограниченными. Пусть теперь $\mu(x)$ — любая ограниченная измеримая функция, например, не превосходящая 1 по модулю. Справедливо неравенство

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}S_n\varphi(x)\,\mu(x)\,dx\right|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|S_n\varphi(x)|\,dx=\|S_n\varphi\|\leqslant K.$$

Вводя явное выражение оператора S_n, мы получаем:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) D_n(t) \mu(x)\, dt\, dx \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) D_n(x-t) \mu(x)\, dx\, dt \right| \leqslant K. \quad (1)$$

Но легко показать, что такое неравенство не может выполняться при всех n, любых $\varphi \in L_1$ с $\|\varphi\| \leqslant 1$ и любых измеримых $\mu(x)$ с $|\mu(x)| \leqslant 1$. Действительно, неравенство (1) можно записать в виде

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) M_n(t)\, dt \right| \leqslant K, \quad (2)$$

где $M_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) \mu(x)\, dx$ есть, очевидно, непрерывная функция от t.

Положим $\varphi(t)$ равной $\frac{1}{2\varepsilon}$ при $|t| \leqslant \varepsilon$ и 0 вне этого отрезка; при этом $\|\varphi\| = 1$, а интеграл в (2) превращается в среднее от функции $M_n(t)$ по отрезку $|t| \leqslant \varepsilon$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \longrightarrow 0$, получим:

$$|M_n(0)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) \mu(x)\, dx \right| \leqslant K.$$

Функция $\mu(x)$ у нас еще не определена. Положим ее равной $+1$ там, где $D_n(x) > 0$, и -1 там, где $D_n(x) < 0$; получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx \leqslant K.$$

Но мы уже доказали, что такое неравенство не может иметь места для всех n. Итак, *заведомо имеется элемент* $\varphi_0 \in L_1$, *для которого частные суммы* $S_n\varphi_0$ *не сходятся к* φ_0 *по норме* $L_1(-\pi, \pi)$.

Доказанные факты, разумеется, не исключают того, что в отдельных однородных пространствах сходимость $S_n\varphi \longrightarrow \varphi$ может иметь место для всякого элемента φ. Но такой факт, если он имеет место, является специфическим свойством рассматриваемого пространства R. Мы знаем, например, что этот факт имеет место в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$. Имеется также теорема М. Рисса, в силу которой аналогичный факт справедлив и в любом пространстве $L_p(-\pi, \pi)$ при $p > 1$ [1].

Замечание. Без предположения однородности пространства R и теорема 2 становится неверной; более того, может случиться, что никакие линейные комбинации частных сумм ряда Фурье функции $\varphi(x)$ не будут сходиться к $\varphi(x)$ по норме R.

Рассмотрим для примера пространство R, состоящее из функций $\varphi(x)$, непрерывных при $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, принадлежащих к L_2 при $|x| \leqslant \pi$ и имеющих норму

$$\|\varphi\| = \max_{|x| \leqslant \frac{\pi}{2}} |\varphi(x)| + \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|\, dx.$$

[1] См. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939, гл. 7.

Это пространство, очевидно, удовлетворяет условиям 1) и 3) однородного пространства, но не удовлетворяет условию 2). Функция $\varphi_0(x)$, равная $+\frac{\pi}{4}$ при $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$, и $-\frac{\pi}{4}$ в остальных точках промежутка $[-\pi,\pi]$, принадлежит R и имеет формальный ряд Фурье

$$\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\ldots$$

Все члены этого ряда обращаются в 0 при $x=\pm\frac{\pi}{2}$. Поэтому любая линейная комбинация частных сумм этого ряда также обращается в нуль при $x=\pm\frac{\pi}{2}$. Так как сама функция $\varphi_0(x)$ при $x=\pm\frac{\pi}{2}$ равна $-\frac{1}{2}$, а сходимость по норме R требует, в частности, равномерной сходимости в отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, то ясно, что не может существовать линейных комбинаций частных сумм ряда Фурье функции $\varphi_0(x)$, которые сходились бы к $\varphi_0(x)$ по норме пространства R.

4. Основным аппаратом при доказательстве теоремы 2 будет у нас *интегрирование непрерывных абстрактных функций со значениями в нормированном пространстве* R. В этом пункте мы приведем соответствующие определения и необходимые элементы теории.

Пусть $f(t)$ означает элемент полного нормированного пространства R, зависящий от вещественного параметра t, или, что то же, функцию параметра t с значениями в пространстве R. Такие функции называют *абстрактными функциями*. Будем говорить, что $f(t)$ непрерывно зависит от параметра t в точке $t=\tau$, если при $t\to\tau$ всегда

$$\|f(t)-f(\tau)\|\to 0.$$

Абстрактная функция $f(t)$, непрерывно зависящая от t при любом $t=\tau$ из отрезка $a\leqslant t\leqslant b$, называется *непрерывной абстрактной функцией от* t на $[a, b]$.

Следующие предложения, представляющие собой естественные обобщения известных элементарных теорем анализа, легко доказываются с помощью обычных рассуждений, использующих компактность отрезка:

а) *Абстрактная функция* $f(t)$, *непрерывная на отрезке* $[a, b]$, *ограничена по норме, так что* $\|f(t)\|<M$ *при всех* t.

б) *Абстрактная функция* $f(t)$, *непрерывная на отрезке* $[a, b]$, *равномерно непрерывна на нем: для любого* $\varepsilon>0$ *можно указать такое* $\delta>0$, *что из* $|t'-t''|<\delta$ *следует* $\|f(t')-f(t'')\|<\varepsilon$.

в) Последовательность абстрактных функций $f_n(t)$ называется сходящейся к абстрактной функции $f(t)$ *равномерно на* $[a, b]$, если для любого $\varepsilon>0$ можно найти такой номер $N=N(\varepsilon)$, что при $n>N$

$$\max_t\|f_n(t)-f(t)\|<\varepsilon.$$

Утверждается, что *предел $f(t)$ равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций $f_n(t)$ есть также непрерывная функция.*

Мы определим далее интеграл Римана от функции $f(t)$. Пусть Π означает разбиение промежутка $[a, b]$ точками деления $a = t_0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_n = b$ с разностями $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$. Величину $d(\Pi) = \max \Delta t_j$ называем параметром разбиения Π. Составим интегральную сумму

$$s_\pi = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)\,\Delta t_j. \qquad (1)$$

Величина s_π, очевидно, есть элемент того же пространства R. Утверждается, что при неограниченном измельчении разбиения Π, т. е. при $d(\Pi) \to 0$, интегральная сумма s_π стремится к однозначно определенному элементу If пространства R, который и называется ***интегралом Римана от абстрактной функции*** $f(t)$.

Приведем доказательство существования интеграла.

Лемма 5. *Пусть задано $\varepsilon > 0$ и выбрано $\delta > 0$ так, что $|f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ всякий раз, когда $|t' - t''| < \delta$; утверждается, что все суммы* (1) *с $d(\Pi) \leq \delta$ отличаются друг от друга по норме не более чем на $\varepsilon(b-a)$.*

Рассмотрим сначала интегральные суммы

$$s = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)\,\Delta t_j \quad \text{и} \quad s' = \sum_{k=0}^{m-1} f(t_k)\,\Delta t_k,$$

причем подразбиение основного промежутка, отвечающее второй сумме, получается из подразбиения, отвечающего первой сумме, добавлением нескольких новых точек. В этом случае каждое слагаемое первой суммы $f(t_j)\,\Delta t_j$ заменяется при переходе ко второй сумме величиной

$$f(t_{j1})\,\Delta t_{j1} + \ldots + f(t_{jr})\,\Delta t_{jr}.$$

Здесь по условию каждую из величин $f(t_{j1}), \ldots, f(t_{jr})$ можно заменить на $f(t_j)$ с ошибкой, по норме меньшей $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$f(t_{j1}) = f(t_j) + h_1, \ldots, f(t_{jr}) = f(t_j) + h_r, \quad \|h_i\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\|f(t_{j1})\,\Delta t_{j1} + \ldots + f(t_{jr})\,\Delta t_{jr} - f(t_j)\,\Delta t_j\| \leq \sum_{i=1}^{r} \|h_i\|\,\Delta t_{ji} < \frac{\varepsilon}{2}\,\Delta t_j,$$

откуда

$$\|s - s'\| < \sum \frac{\varepsilon}{2}\,\Delta t_j = \frac{\varepsilon}{2}(b-a).$$

Пусть теперь s_1 и s_2 — любые две интегральные суммы с единственным условием, чтобы элементы соответствующих подразбиений не превосходили указанного δ. Образуем интегральную сумму s, используя подразбиение с точками деления основного промежутка, участвующими и в первой сумме, и во второй сумме. Тогда по доказанному

$$\| s - s_1 \| < \frac{\varepsilon}{2}(b-a), \quad \| s - s_2 \| < \frac{\varepsilon}{2}(b-a),$$

откуда

$$\| s_1 - s_2 \| < \varepsilon (b-a),$$

что и требовалось.

Из леммы 5 уже легко вывести, что при неограниченном измельчении отрезка $[a, b]$ суммы (1) имеют предел. Действительно, пусть Π_n — произвольная последовательность подразбиений с $d(\Pi_n) \longrightarrow 0$. По доказанному соответствующие интегральные суммы s_n образуют фундаментальную последовательность; обозначим через If ее предел в пространстве R. Любая другая последовательность интегральных сумм s'_n с $d(\Pi'_n) \longrightarrow 0$ имеет тот же предел так как в силу доказанного $\| s_n - s'_n \| \longrightarrow 0$. Элемент If мы и будем называть *интегралом от функции $f(t)$ по промежутку* $[a, b]$.

Интеграл от абстрактной функции обладает обычными свойствами интеграла:

$$I(f+g) = If + Ig; \tag{2}$$

$$I(\alpha f) = \alpha If; \tag{3}$$

$$\text{если } \| f \| \leqslant M, \text{ то } \| If \| \leqslant M(b-a). \tag{4}$$

Произведение абстрактной непрерывной функции $f(t)$ на вещественную непрерывную функцию $\beta(t)$ есть снова абстрактная непрерывная функция. При этом, если $\beta(t) \geqslant 0$, $\| f \| \leqslant M$, то имеет место неравенство

$$\| I(\beta f) \| \leqslant M \int_a^b \beta(t)\, dt. \tag{5}$$

Все эти свойства легко доказываются предельным переходом от интегральных сумм.

Важным примером являются абстрактные функции, значения которых при каждом t принадлежат нормированному пространству R обычных функций от аргумента x, так что $f(t) = \varphi(x, t)$.

Из определения интеграла абстрактной функции очевидно, что в этом случае операция If и обычное интегрирование функции $\varphi(x, t)$ по переменному t приводят к одному и тому же результату.

5. В этом пункте мы докажем теорему 2: *для любой функции $\varphi(x)$, принадлежащей однородному пространству R, средние арифметические частных сумм ее ряда Фурье сходятся к $\varphi(x)$ по норме пространства R.*

Прежде чем доказывать эту теорему, найдем выражение для средних арифметических частных сумм ряда Фурье.

Положим

$$\sigma_n(x)=\frac{s_0(x)+s_1(x)+\ldots+s_{n-1}(x)}{n},$$

где $s_m(x)=\sum_{-m}^{m}a_k e^{ikx}$ есть частная сумма ряда Фурье функции $\varphi(x)$. Как мы видели выше,

$$s_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

поэтому

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Сумму, стоящую под знаком интеграла, лёгко вычислить, если умножить числитель и знаменатель каждого слагаемого на $\sin\frac{t}{2}$:

$$\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\sin\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\cos mt-\cos(m+1)t}{2\sin^2\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{1-\cos nt}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\sin^2\frac{n}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Итак, мы получаем:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\frac{\sin^2\frac{n}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt. \tag{1}$$

Функция

$$F_n(t)=\frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2\frac{n}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

называется ядром Фейера. В отличие от ядра Дирихле ядро Фейера неотрицательно. Далее, если $\varphi(x)\equiv 1$, то и $s_n(x)\equiv 1$, $\sigma_n(x)\equiv 1$ и из (1) следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\,dt=1.$$

Переходим к доказательству теоремы 2. Проверим сначала, что она справедлива для любого тригонометрического многочлена

$$\varphi(x)=\sum_{-n}^{n} a_m e^{imx}.$$

Среднее арифметическое первых p частных сумм ряда Фурье функции $\varphi(x)$ мы представим в форме

$$\sigma_p(x)=\frac{s_0(x)+\ldots+s_n(x)}{p}+\frac{s_{n+1}(x)+\ldots+s_p(x)}{p}=$$
$$=\frac{s_0(x)+\ldots+s_n(x)}{p}+\frac{p-n}{p}\varphi(x),$$

поскольку частные суммы $s_q(x)$ при $q>n$ совпадают с самой функцией $\varphi(x)$. Далее, при $p\to\infty$ первое слагаемое стремится к нулю, а второе — к $\varphi(x)$; тем самым при $p\to\infty$ мы имеем $\sigma_p(x)\to\varphi(x)$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь общий случай. Равенство (1) задает $\sigma_n(x)$ как результат применения к элементу $\varphi\in R$ линейного интегрального оператора — обозначим его, например, через A_n — с ядром Фейера. Применим к интегралу в правой части, рассматриваемому как интеграл от абстрактной непрерывной функции от t с значениями в пространстве R, неравенство (5) п. 4; мы получим оценку

$$\|\sigma_n(x)\|=\|A_n\varphi\|\leqslant\|\varphi\|\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\,dt=\|\varphi\|.$$

Это означает, что норма оператора A_n при любом n не превосходит 1. Мы используем сейчас следующую простую лемму:

Лемма 6. *Пусть в нормированном пространстве R задана последовательность линейных операторов A_n, нормы которых ограничены фиксированной постоянной K. Если соотношение $A_n\varphi\to\varphi$ справедливо для элементов φ, принадлежащих некоторому всюду плотному множеству $Q\subset R$, то оно справедливо и для всех элементов $\varphi\in R$.*

С помощью этой леммы доказательство теоремы 2 быстро завершается. Действительно, нам нужно доказать справедливость соотношения $A_n\varphi\to\varphi$, где A_n — операторы с ядром Фейера. Но мы видели, что нормы этих операторов ограничены числом 1 и что соотношение $A_n\varphi\to\varphi$ выполняется для тригонометрических многочленов, которые по условию всюду плотны в однородном пространстве R. В силу леммы 6 соотношение $A_n\varphi\to\varphi$ справедливо для всех $\varphi\in R$, чем теорема 2 и доказана.

Нам остается доказать лемму 6. Пусть $\varphi\in R$ — любой элемент и задано $\varepsilon>0$. Найдем элемент $\varphi_\varepsilon\in Q$ такой, что $\|\varphi-\varphi_\varepsilon\|<\varepsilon$, и затем такой номер N, что $\|A_n\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\| < \varepsilon$ при всех $n > N$. Тогда для этих же $n > N$ мы будем иметь:

$$\|A_n\varphi - \varphi\| \leqslant \|A_n\varphi - A_n\varphi_\varepsilon\| + \|A_n\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\| + \|\varphi_\varepsilon - \varphi\| \leqslant K\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,$$

откуда и следует, что $A_n\varphi \to \varphi$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 в применении к пространству $\tilde{C}(-\pi, \pi)$ приводит к следующему результату: *всякая функция* $\varphi(x)$, *непрерывная на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *и удовлетворяющая условию* $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, *есть предел равномерно сходящейся последовательности средних арифметических частных сумм своего ряда Фурье.* В этом частном виде теорема 2 была доказана впервые в 1905 г. Л. Фейером.

В применении к пространству $L_1(-\pi, \pi)$ теорема 2 приводит к важному свойству единственности:

Если все коэффициенты Фурье суммируемой функции $\varphi(x)$ *равны нулю, то сама функция* $\varphi(x)$ *равна нулю* (*почти всюду*). Действительно, из условия теоремы следует, что все члены ряда Фурье функции $\varphi(x)$ равны нулю; но тогда все $s_n(x)$ равны нулю, все $\sigma_n(x)$ равны нулю и, следовательно, по норме L_1

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = 0.$$

Другим выражением того же свойства служит утверждение:

Если у двух интегрируемых функций $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *все коэффициенты Фурье соответственно совпадают, то* $\varphi(x)$ *почти всюду совпадает с* $\psi(x)$.

Для доказательства достаточно образовать разность $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$; все ее коэффициенты Фурье по условию равны нулю, откуда $f(x)$ равна нулю почти всюду.

Задачи. 1. Точка x_0 называется обобщенной точкой Дини для суммируемой функции $\varphi(x)$, если при некотором c сходится интеграл

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|\varphi(x_0 + t) - c|}{|t|}\,dt.$$

Показать, что ряд Фурье функции $\varphi(t)$ сходится в обобщенной точке Дини к значению c.

2. Точка x_0 называется (обычной) точкой Дини для суммируемой функции $\varphi(x)$, если сходится интеграл

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)|}{|t|}\,dt.$$

Показать, что почти все обобщенные точки Дини являются обычными точками Дини.

Указание. Проверить, что каждая обобщенная точка Дини, которая одновременно является точкой Лебега для функции $\varphi(x)$, есть обычная точка Дини.

3. Если $f(t)$ — абстрактная непрерывная функция ($a \leqslant t \leqslant b$), то

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left\| \int f(t) \sin \lambda t \, dt \right\| = 0.$$

4. Доказать, что члены ряда Фурье функции $\varphi(x)$, принадлежащей однородному пространству R, стремятся к нулю по норме R.

Указание. Член ряда Фурье

$$a_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{in(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) e^{int} dt$$

истолковать как интеграл от абстрактной непрерывной функции. Применить результат задачи 3.

5. Если последовательность $\{y_n\}$ элементов нормированного пространства R сходится по норме к элементу y, то последовательность средних арифметических $s_n = \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$ также сходится по норме к элементу y.

6. Доказать, что для всякой суммируемой функции средние арифметические ряда Фурье сходятся к значению этой функции во всякой ее точке Лебега. Получить отсюда теорему единственности (см. стр. 352).

Указание. Положим $u(t) = |\varphi(x+t) - \varphi(x)|$, $U'(t) = u(t)$; тогда

$$\int_0^{\delta} u(t) \frac{\sin^2 \frac{n}{2} t}{t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} = I_1 + I_2,$$

$$I_1 \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{n}} u(t) \, dt < \frac{\varepsilon n}{4} \quad \text{(точка Лебега!)},$$

$$I_2 \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{u(t)}{t^2} dt = \frac{1}{t^2} U(t) \Big|_{\frac{1}{n}}^{\delta} + 2 \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{1}{t^3} U(t) \, dt < \frac{U(\delta)}{\delta^2} + 2\varepsilon \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2} < \frac{\varepsilon}{\delta} + 2\varepsilon n,$$

$$\frac{1}{n}(I_1 + I_2) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{n\delta} + 2\varepsilon < 4\varepsilon \text{ при } n > \frac{1}{\delta}.$$

7. Показать, что в определении однородного пространства функций условие 3) (стр. 342) можно заменить результатом леммы 3 (стр. 343).

8. Показать, что всякая функция с ограниченным изменением, непрерывная относительно сдвига по норме — полному изменению (см. задача 6 стр. 281), абсолютно непрерывна.

9. Доказать теорему: если подмножество A однородного пространства R функций $\varphi(x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, *равномерно ограничено*, т. е. $\|\varphi\| \leqslant C_1$, и *равностепенно непрерывно*, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ так, что

$$\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |h| < \delta,$$

то A компактно в R (см. теорему Арцела, гл. II, § 7, задача 5) (С. Б. Стечкин).

Указание. $\sigma_n(x)$ при достаточно большом n образуют компактную ε-сеть в A относительно R (§ 7 гл. II).