§ 2. Преобразование Фурье

1. Когда мы желаем представить периодическую функцию $\varphi(x)$ с периодом 2π в виде наложения чистых гармонических колебаний, мы обращаемся к ряду Фурье

$$\varphi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}. \tag{1}$$

Если речь идет о функции с периодом $2\pi l$, то соответствующий ряд Фурье приобретает вид

$$\varphi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\frac{x}{l}}, \tag{2}$$

где коэффициенты a_n определяются по формуле

$$a_n=\frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l} \varphi(\xi)\, e^{-in\frac{\xi}{l}}\, d\xi. \tag{3}$$

Формула (3) получается из (2) умножением на $e^{-in\frac{x}{l}}$ и интегрированием по x в пределах от $-\pi l$ до πl.

Из (2) и (3) следует:

$$\varphi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l} \varphi(\xi)\, e^{\frac{in}{l}(x-\xi)}\, d\xi. \tag{4}$$

Естественно попытаться совершить в формуле (4) предельный переход $l\to\infty$, с тем чтобы иметь возможность представить в виде наложения гармонических колебаний по возможности любую функцию $\varphi(x)$, определенную на всей оси $-\infty<x<\infty$. Формальный переход к пределу $l\to\infty$ приводит к формуле

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{i\sigma(x-\xi)}\, d\xi\right\}, \tag{5}$$

где символом σ обозначен непрерывный аргумент, получающийся из дискретного аргумента $\sigma_n=\frac{n}{l}$. Итак, искомая формула разложения $\varphi(x)$ по гармоническим колебаниям должна иметь вид

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\, e^{i\sigma x}\, d\sigma, \tag{6}$$

где

$$\psi(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-i\sigma\xi}\,d\xi. \tag{7}$$

Функция $\psi(\sigma)$, определенная по формуле (7), называется *преобразованием Фурье* (или *интегралом Фурье*) функции $\varphi(x)$; формула (6) называется *формулой обращения* преобразования Фурье или *обратным преобразованием Фурье*. Обратное преобразование Фурье (6) отличается от прямого (7) по сути только знаком в показателе экспоненты и коэффициентом $\frac{1}{2\pi}$. Иногда пишут преобразование Фурье в форме

$$\psi(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{i\sigma\xi}\,d\xi; \tag{8}$$

тогда формула обращения принимает вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\,e^{-i\sigma\xi}\,d\sigma. \tag{9}$$

Чтобы придать формулам прямого и обратного преобразования Фурье бо́льшую симметричность, часто определяют преобразование Фурье формулой

$$\psi(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{i\sigma\xi}\,d\xi; \tag{10}$$

тогда формула обращения принимает вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\,e^{-i\sigma\xi}\,d\sigma. \tag{11}$$

При любой форме записи во всяком случае очевидно, что преобразование Фурье — линейное преобразование: сумму функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ оно переводит в сумму $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ и произведение функции $\varphi(x)$ на число λ переводит в произведение $\psi(\sigma)$ на то же число λ.

Мы будем придерживаться определения (7) с формулой обращения (6).

2. Вместо того, чтобы обосновывать законность предельного перехода к формуле (5), мы покажем непосредственно, что из (7) следует (6) в определенных предположениях относительно функции $\varphi(x)$.

Первое предположение состоит, естественно, в том, что *функция $\varphi(x)$ интегрируема на всей оси* $-\infty<x<\infty$. Это обеспечивает существование интеграла (7) при любом значении σ, $-\infty<\sigma<\infty$.

Вот первое следствие указанного предположения: *функция* $\psi(\sigma)$ *ограничена, непрерывна при всех* σ *и при* $|\sigma|\to\infty$ *имеет пределом* 0. Первое утверждение вытекает из оценки

$$|\psi(\sigma)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)|\,d\xi.$$

Из этой же оценки вытекает, что последовательность функций $\varphi_n(x)$, сходящаяся по метрике пространства $L_1(-\infty, \infty)$, переводится преобразованием Фурье в последовательность функций $\psi_n(\sigma)$, равномерно сходящуюся на оси $-\infty < \sigma < \infty$.

Второе и третье утверждения мы проверим вначале для характеристической функции интервала (c, d). В этом случае

$$\psi(\sigma) = \int_c^d e^{-i\sigma x}\,dx = \frac{e^{-i\sigma c} - e^{-i\sigma d}}{i\sigma}$$

и полученное выражение показывает, что $\psi(\sigma)$ непрерывна и стремится к нулю при $|\sigma|\to\infty$. Так как любая ступенчатая функция $h(x)$ есть линейная комбинация характеристических функций интервалов, то второе и третье утверждения справедливы и для всех ступенчатых функций. Наконец, любая суммируемая функция $\varphi(x)$ есть предел (по метрике $L_1(-\infty, \infty)$) ступенчатых функций. По доказанному ее преобразование Фурье $\psi(\sigma)$ есть предел (в смысле равномерной сходимости на оси σ) непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Но тогда и сама функция $\psi(\sigma)$ непрерывна и стремится к нулю на бесконечности, что и требовалось.

Теперь обратимся к доказательству формулы (6). Рассмотрим вначале интеграл в конечных пределах:

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} \psi(\sigma)\,e^{i\sigma x}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{i\sigma(x-\xi)}\,d\xi\right\}d\sigma.$$

Внутренний интеграл сходится равномерно по параметру σ, поэтому порядок интегрирования по σ и по ξ можно изменить:

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left\{\int_{-N}^{N} e^{i\sigma(x-\xi)}\,d\sigma\right\}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,\frac{e^{iN(x-\xi)} - e^{-iN(x-\xi)}}{i(x-\xi)}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,\frac{\sin N(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)\,\frac{\sin Nt}{t}\,dt. \qquad (1)$$

Последнее преобразование произведено путем замены переменного $x-\xi=-t$. Мы покажем, что *при* $N\to\infty$ *функция* $\varphi_N(x)$ *стремится к* $\varphi(x)$, *если* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условию Дини*

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|\varphi(x+t)-\varphi(x)|}{|t|}\,dt<\infty \quad \text{при некотором } \delta>0.$$

Для доказательства вспомним, что имеет место равенство [1])

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nt}{t}\,dt=1.$$

Поэтому разность $\varphi_N(x)-\varphi(x)$ можно записать в виде

$$\varphi_N(x)-\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{\sin Nt}{t}\,dt.$$

Интеграл мы разобьем на две части:

$$\int_{-\infty}^{\infty}=\int_{|t|\leqslant T}+\int_{|t|\geqslant T}.$$

Второе слагаемое можно записать в виде

$$\int_{|t|\geqslant T}\varphi(x+t)\frac{\sin Nt}{t}\,dt-\varphi(x)\int_{|t|\geqslant T}\frac{\sin Nt}{t}\,dt,$$

откуда видно, что при данном x и достаточно большом T это слагаемое делается как угодно малым независимо от значения N, если только N, например, больше 1.

Первое слагаемое имеет вид

$$\int_{-T}^{T}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}\sin Nt\,dt,$$

и, так как функция $\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$ в указанном промежутке суммируема (условие Дини!), оно стремится к нулю с возрастанием N по лемме 2 § 1. Отсюда

$$\lim\varphi_N(x)=\varphi(x),$$

что и требовалось.

Итак, если функция $\varphi(x)$ суммируема и удовлетворяет условию Дини, то она восстанавливается по своему преобразованию Фурье $\psi(\sigma)$ по формуле (6).

---

[1]) См., например, А. Я. Хинчин, Краткий курс математического анализа, 1953, гл. 26, § 111, стр. 503.

Подчеркнем, что интеграл (6) не является, вообще говоря, абсолютно сходящимся и не может быть определен по формуле

$$\lim_{N_1, N_2 \to \infty} \int_{N_1}^{N_2},$$

где N_1 и N_2 стремятся к бесконечности независимо друг от друга.

3. Рассмотрим несколько примеров на вычисление преобразований Фурье.

1) Найдем преобразование Фурье для функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{(x-\lambda)^m}, \tag{1}$$

где m — натуральное число, а λ — невещественная постоянная; пусть, например, $\operatorname{Im}\lambda > 0$.

Интеграл

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma x}}{(x-\lambda)^m} dx \tag{2}$$

абсолютно сходится при $m > 1$, но и при $m = 1$ он существует как условно сходящийся в смысле

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N}.$$

При любом $m \geqslant 1$ интеграл (2) удобно вычислять методом контурного интегрирования. При $\sigma > 0$ мы рассмотрим контур в плоскости $z = x + iy$, состоящий из участка оси x в пределах $-N \leqslant x \leqslant N$ и полуокружности в нижней полуплоскости, опирающейся на этот участок как на диаметр (рис. 16). В нижней полуплоскости функция $e^{-i\sigma z} = e^{-i\sigma x} e^{\sigma y}$ при $\sigma > 0$ ограничена, и интеграл по полуокружности стремится к нулю в силу известной леммы Жордана [1]). Так как особая точка подынтегральной функции находится в верхней полуплоскости при $\sigma > 0$, получаем $\psi(\sigma) = 0$.

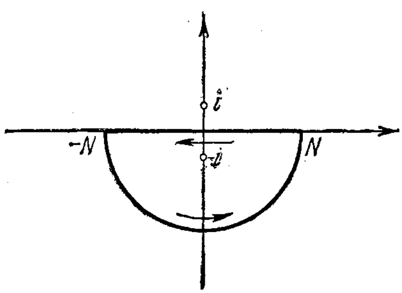

Рис. 16.

При $\sigma < 0$, чтобы использовать лемму Жордана, нужно рассматривать полуокружность в верхней полуплоскости, и мы получаем по

[1]) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, 1951, стр. 224.

теореме о вычетах:

$$\psi(\sigma) = 2\pi i \text{ Выч } \left. \frac{e^{-i\sigma z}}{(z-\lambda)^m} \right|_{z=\lambda}.$$

Указанный вычет легко сосчитать, если разложить функцию $e^{-i\sigma z}$ в ряд Тейлора по степеням $z-\lambda$:

$$e^{-i\sigma z} = e^{-i\sigma(z-\lambda)} e^{-i\sigma\lambda} = e^{-i\sigma\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-i\sigma(z-\lambda)]^n}{n!}.$$

Вычет есть коэффициент при $(z-\lambda)^{-1}$; следовательно,

$$\psi(\sigma) = 2\pi i e^{-i\sigma\lambda} \frac{(-i\sigma)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Итак, при $\operatorname{Im}\lambda > 0$

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \sigma > 0, \\ 2\pi i e^{-i\sigma\lambda} \dfrac{(-i\sigma)^{m-1}}{(m-1)!} & \text{при} \quad \sigma < 0. \end{cases} \tag{3}$$

При $\operatorname{Im}\lambda < 0$ мы найдем аналогично

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} -2\pi i e^{-i\sigma\lambda} \dfrac{(-i\sigma)^{m-1}}{(m-1)!} & \text{при } \sigma > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Любая дробно-рациональная функция, не имеющая особенностей на вещественной оси и стремящаяся к нулю на бесконечности, разлагается на простейшие дроби вида $\frac{A}{(x-\lambda)^m}$, где $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Поэтому полученные формулы позволяют написать и преобразование Фурье от любой такой дробно-рациональной функции. Функции $\psi(\sigma)$, определяемые формулами (3) и (4), как легко проверить, экспоненциально убывают при $|\sigma| \to \infty$; поэтому и преобразование Фурье любой дробно-рациональной функции экспоненциально убывает при $|\sigma| \to \infty$.

2) Найдем преобразование Фурье от функции

$$\varphi(x) = e^{-ax^2} \quad (a > 0).$$

Выражение

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\sigma x}\, dx$$

есть интеграл от аналитической функции $e^{-az^2 - i\sigma z}$, $z = x + iy$, по вещественной оси. Так как

$$\left| e^{-a(x+iy)^2 - i\sigma(x+iy)} \right| = e^{-ax^2 + ay^2 + \sigma y},$$

то в любой горизонтальной полосе $|y| \leqslant y_0$ подынтегральная функция при $x \to \pm\infty$ стремится к нулю равномерно по y. Поэтому, используя теорему Коши, можно при интегрировании перейти на любую параллельную прямую в z-плоскости, не изменяя результата:

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} e^{-i\sigma(x+iy)}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ay^2+\sigma y-2aixy-i\sigma x}\, dx = e^{ay^2+\sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix(2ay+\sigma)}\, dx.$$

Положим $y = -\frac{\sigma}{2a}$; тогда мы получим $ay^2+\sigma y = -\frac{\sigma^2}{4a}$ и по известной формуле [1])

$$\psi(\sigma) = e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = -e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

В частности, для $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\left(a = \frac{1}{2}\right)$ получаем $\psi(\sigma) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$ — функцию того же вида, отличающуюся от исходной функции только множителем $\sqrt{2\pi}$.

Задача. Заполнить пустые места в таблице

№	$\varphi(x)$	$\psi(\sigma)$
1	$\frac{1}{x^2+a^2}$	
2		$\frac{1}{\sigma+\sigma_0+i\tau_0}$
3		$\frac{\sin a\sigma}{\sigma}$
4		$\frac{\sin^2 a\sigma}{\sigma}$
5	$\frac{\sin^2 ax}{x^2}$	

Отв. $\psi_1(\sigma) = \frac{\pi}{\sigma} e^{-a|\sigma|}$, $\varphi_2(x) = e^{x(\tau_0 - i\sigma_0)}$ при $x<0$ и 0 при $x>0$; $\varphi_3(x) = \frac{1}{2}$ при $|x|<a$ и 0 при $|x|>a$; $\varphi_4(x) = \frac{i}{4}$ при $0<x<2a$, $-\frac{i}{4}$ при $-2a<x<0$, 0 при $|x|>2a$; $\psi_5(\sigma) = \pi\left(a - \frac{|\sigma|}{2}\right)$ при $|\sigma|<2a$ и 0 при $|\sigma|>2a$.

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II (Физматгиз, 1958), гл. III, § 8, п. 78.

4. Теперь рассмотрим вопрос о средних арифметических интеграла Фурье, аналогично тому, как это было сделано в отношении средних арифметических ряда Фурье в § 1. Вместо среднего арифметического n сумм ряда Фурье мы рассмотрим, естественно, среднее интегральное

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N}\int_0^N \varphi_\nu(x)\,d\nu. \tag{1}$$

Подставляя значение $\varphi_\nu(x)$ из формулы (1) п. 2, находим:

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi N}\int_0^N \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\frac{\sin \nu t}{t}\,dt\right\} d\nu =$$

$$= \frac{1}{\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+t)}{t}\left\{\int_0^N \sin \nu t\,d\nu\right\} dt = \frac{1}{\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+t)}{t}\,\frac{1-\cos Nt}{t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\,\frac{\sin^2\frac{N}{2}t}{t^2}\,dt.$$

Выражение

$$F_N(t) = \frac{2}{\pi N}\,\frac{\sin^2\frac{N}{2}t}{t^2}$$

называется *ядром Фейера для интеграла Фурье*. Ядро Фейера обладает следующими свойствами:

а) $F_N(t) \geqslant 0$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_N(t)\,dt = 1$;

в) $\int\limits_{|t|\geqslant\delta} F_N(t)\,dt \to 0$ при $N\to\infty$ и любом фиксированном $\delta>0$.

Неравенство а) очевидно; равенство б) выводится из равенства

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \nu t}{t}\,dt = 1 \tag{2}$$

интегрированием по параметру ν в пределах от ε до N с последующим предельным переходом $\varepsilon\to 0$ [1]).

[1]) Интеграл (2) сходится равномерно по параметру ν в области $\varepsilon\leqslant\nu\leqslant N$, что обеспечивает законность интегрирования по параметру подынтегральной функции в этом промежутке. При $0<\nu\leqslant N$ он не сходится равномерно.

Соотношение в) следует из оценки

$$\int\limits_{|t|\geqslant\delta} F_N(t)\,dt \leqslant \frac{2}{\pi N}\int\limits_{|t|\geqslant\delta}\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{\pi N\delta}.$$

Из равенства б) вытекает соотношение

$$\sigma_N(x)-\varphi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\,F_N(t)\,dt. \tag{3}$$

Мы будем далее рассматривать вопрос о сходимости средних арифметических интеграла Фурье в различных нормированных пространствах. Несколько изменяя определения § 1, относящиеся к функциям на отрезке $[-\pi, \pi]$, мы будем называть далее *однородным пространством* нормированное пространство R функций $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) все функции $\varphi(x)\in R$ суммируемы на $(-\infty, \infty)$, и из сходимости $\varphi_n \to \varphi$ в R следует сходимость $\varphi_n \to \varphi$ по норме $L_1(-\infty, \infty)$;

2) все сдвиги $\varphi(x+h)$ входят в R вместе с $\varphi(x)$, и

$$\|\varphi(x+h)\| = \|\varphi(x)\| \text{ при любом вещественном } h;$$

3) норма в R непрерывна относительно сдвига, т. е.

$$\lim_{h\to 0}\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|=0.$$

Мы докажем следующую теорему:

Теорема. *Если функция $\varphi(x)$ принадлежит однородному пространству R, то средние арифметические $\sigma_N(x)$ ее интеграла Фурье также принадлежат R и $\lim\limits_{N\to\infty}\sigma_N(x)=\varphi(x)$ по норме R.*

Доказательство этой теоремы, так же как и аналогичной теоремы § 1, будет основано на интегрировании абстрактных функций с значениями в пространстве R. Необходимо рассмотреть также и несобственные интегралы абстрактных функций; приведем соответствующие определения.

Несобственные интегралы от абстрактных функций. Допустим, что абстрактная функция $f(t)$ с значениями в нормированном пространстве R определена и непрерывна на полуоси (a, ∞). Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{\infty} f(t)\,dt \tag{4}$$

мы определяем как предел собственного интеграла

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

при $b \to \infty$, если только этот предел существует.

В частности, если конечен обычный несобственный интеграл

$$\int_a^\infty \|f(t)\|\,dt, \tag{5}$$

то существует и несобственный интеграл (4). Действительно, в этом случае при любых b', b''

$$\left\|\int_{b'}^{b''} f(t)\,dt\right\| \leqslant \int_{b'}^{b''} \|f(t)\|\,dt \to 0 \quad \text{при} \quad b' \to \infty,\ b'' \to \infty,$$

так что любая последовательность собственных интегралов

$$\int_a^{b_n} f(t)\,dt \qquad (b_n \to \infty)$$

удовлетворяет критерию Коши; в силу полноты R предел (4) существует. В случае существования интеграла (5) интеграл (4) называется абсолютно сходящимся.

Аналогично определяются несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{a}$ и $\int_{-\infty}^{\infty}$.

Из оценки

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,dt$$

предельным переходом $b \to \infty$ получается оценка

$$\left\|\int_a^\infty f(t)\,dt\right\| \leqslant \int_a^\infty \|f(t)\|\,dt. \tag{6}$$

Аналогичная оценка имеет место и для абсолютно сходящихся интегралов двух других типов.

Переходим теперь к доказательству теоремы.

Интеграл (3) можно рассматривать как несобственный интеграл абстрактной функции $f(t) = [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\,F_N(t)$, входящей при каждом значении t в пространство R. По условию функция $f(t)$ непрерывна. Интеграл (3) сходится абсолютно в силу неравенства

$$\|[\varphi(x+t) - \varphi(x)]\,F_N(t)\| \leqslant 2\,\|\varphi(x)\|\,F_N(t) \in L_1(-\infty, \infty).$$

В частности, мы получаем $\sigma_N(x)-\varphi(x)\in R$; отсюда и $\sigma_N(x)\in R$.

Далее для заданного $\varepsilon>0$ найдем $\delta>0$ так, чтобы из $|t|<\delta$ следовало $\|\varphi(x+t)-\varphi(x)\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Используя свойства б) — в) ядра Фейера, находим:

$$\|\sigma_N(x)-\varphi(x)\|\leqslant\int\limits_{|t|\leqslant\delta}\|\varphi(x+t)-\varphi(x)\|F_N(t)\,dt+$$
$$+\int\limits_{|t|\geqslant\delta}\|\varphi(x+t)-\varphi(x)\|F_N(t)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\max_{|t|\leqslant\delta}\|\varphi(x+t)-\varphi(x)\|\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_N(t)\,dt+2\|\varphi(x)\|\int\limits_{|t|\geqslant\delta}F_N(t)\,dt.$$

Первое слагаемое при любом N не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$, второе становится $<\frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно большом $N>N_0$. В итоге при $N>N_0$ получаем:

$$\|\sigma_N(x)-\varphi(x)\|<\varepsilon,$$

чем теорема и доказана.

Применим данную теорему к пространству $R=L_1(-\infty,\infty)$. Нужно, конечно, проверить, что $L_1(-\infty,\infty)$ — однородное пространство. Условия 1 и 2 выполняются здесь очевидным образом. Для проверки условия 3 заметим следующее:

а) всякая характеристическая функция промежутка непрерывна в метрике L_1 относительно сдвига (легко проверяется непосредственно);

б) совокупность $Q\subset L_1$ всех функций, непрерывных относительно сдвига, есть замкнутое подпространство в L_1 (доказывается так же, как в лемме 3 § 1).

Соединяя а) и б) и вспоминая, что линейные комбинации характеристических функций (т. е. ступенчатые функции) всюду плотны в пространстве L_1, мы получаем, что $Q\equiv L_1$. Иными словами, всякая функция $\varphi(x)\in L_1$ непрерывна относительно сдвига, что и требуется.

В итоге мы получили теорему:

Средние арифметические интеграла Фурье любой суммируемой функции $\varphi(x)$ на оси $-\infty<x<\infty$ сходятся к $\varphi(x)$ в метрике $L_1(-\infty,\infty)$. Как следствие получается теорема о единственности преобразования Фурье:

Если преобразование Фурье $\psi(\sigma)$ суммируемой функции $\varphi(x)$ равно нулю при всех σ, то и $\varphi(x)\equiv 0$ (почти всюду).

Действительно, в этом случае $\psi(\sigma)\equiv 0$, $\varphi_\nu(x)\equiv 0$, $\sigma_N(x)\equiv 0$, и, следовательно, $\varphi(x)=\lim\sigma_N(x)=0$.

Другим примером может служить пространство $CL_1(-\infty, \infty)$ всех равномерно непрерывных и суммируемых на $(-\infty, \infty)$ функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi(x)\| = \max_{-\infty<x<\infty} |\varphi(x)| + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, dx.$$

Проверку выполнения свойств 1—3 однородного пространства мы предоставляем читателю. Применяя теорему 2, получаем: *средние арифметические интеграла Фурье любой равномерно непрерывной суммируемой функции* $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, *сходятся к* $\varphi(x)$ *равномерно на всей оси и по метрике* $L_1(-\infty, \infty)$. Эта теорема представляет собой обобщение теоремы Фейера на случай интеграла Фурье.

§ 3. Преобразование Фурье (продолжение)

В этом параграфе и далее мы будем оператор Фурье обозначать символом F:

$$F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx.$$

Оператор F есть, как мы знаем, линейный оператор, обладающий обратным оператором

$$F^{-1}[\psi(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\, e^{i\sigma x}\, d\sigma.$$

1. Преобразование Фурье и операция дифференцирования. Предположим, что абсолютно интегрируемая функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна в окрестности каждой точки и ее производная также интегрируема на оси $-\infty < x < \infty$. Выясним, как связаны преобразования Фурье функции $\varphi(x)$ и ее производной. Заметим, что по предположению об интегрируемости $\varphi'(x)$, функция

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(\xi)\, d\xi$$

имеет предел при $x \to \infty$; этот предел может быть только нулем, так как иначе $\varphi(x)$ не была бы интегрируемой. То же относится к случаю $x \to -\infty$. Далее, интегрируя по частям, получаем:

$$F[\varphi'] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\, e^{-ix\sigma}\, dx = \varphi(x)\, e^{-ix\sigma}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-ix\sigma}\, dx.$$

По доказанному внеинтегральный член равен нулю; получаем равенство

$$F[\varphi'] = i\sigma F[\varphi].$$