Другим примером может служить пространство $CL_1(-\infty, \infty)$ всех равномерно непрерывных и суммируемых на $(-\infty, \infty)$ функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi(x)\| = \max_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x)| + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, dx.$$

Проверку выполнения свойств 1—3 однородного пространства мы предоставляем читателю. Применяя теорему 2, получаем: *средние арифметические интеграла Фурье любой равномерно непрерывной суммируемой функции* $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, *сходятся к* $\varphi(x)$ *равномерно на всей оси и по метрике* $L_1(-\infty, \infty)$. Эта теорема представляет собой обобщение теоремы Фейера на случай интеграла Фурье.

§ 3. Преобразование Фурье (продолжение)

В этом параграфе и далее мы будем оператор Фурье обозначать символом F:

$$F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x}\, dx.$$

Оператор F есть, как мы знаем, линейный оператор, обладающий обратным оператором

$$F^{-1}[\psi(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{i\sigma x}\, d\sigma.$$

1. Преобразование Фурье и операция дифференцирования. Предположим, что абсолютно интегрируемая функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна в окрестности каждой точки и ее производная также интегрируема на оси $-\infty < x < \infty$. Выясним, как связаны преобразования Фурье функции $\varphi(x)$ и ее производной. Заметим, что по предположению об интегрируемости $\varphi'(x)$, функция

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(\xi)\, d\xi$$

имеет предел при $x \to \infty$; этот предел может быть только нулем, так как иначе $\varphi(x)$ не была бы интегрируемой. То же относится к случаю $x \to -\infty$. Далее, интегрируя по частям, получаем:

$$F[\varphi'] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) e^{-ix\sigma}\, dx = \varphi(x) e^{-ix\sigma}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix\sigma}\, dx.$$

По доказанному внеинтегральный член равен нулю; получаем равенство

$$F[\varphi'] = i\sigma F[\varphi].$$

Иными словами, дифференцирование функции $\varphi(x)$ отвечает умножению функции $\psi(\sigma)=F[\varphi]$ на множитель $i\sigma$. Если у функции $\varphi(x)$ интегрируемы производные до порядка m, то, повторяя процесс, получаем:

$$F[\varphi^{(k)}(x)]=(i\sigma)^k F[\varphi] \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, m).$$

Так как $F[\varphi^{(k)}(x)]$ как преобразование Фурье интегрируемой функции есть ограниченная функция от σ (и даже стремящаяся к нулю при $|\sigma|\to\infty$), то для $F(\varphi(x))$, мы получим оценку

$$F[\varphi]=\frac{|F[\varphi^{(k)}(x)]|}{|\sigma|^k}\leqslant\frac{C}{|\sigma|^k}.$$

Итак, *чем больше функция $\varphi(x)$ имеет интегрируемых производных, тем быстрее ее преобразование Фурье стремится к нулю на бесконечности.*

В частности, при некоторой гладкости функции $\varphi(x)$ ее преобразование Фурье $\psi(\sigma)$ становится также абсолютно интегрируемой функцией. Из неравенства (1) видно, что для этого достаточно существования (в L_1) φ, φ' и φ''. Можно ограничиться и требованием существования φ и φ', но при дополнительном условии, что они принадлежат не только L_1, но и L_2. В самом деле, как мы увидим в § 6, из $\varphi\in L_2$, $\varphi'\in L_2$ следует $\sigma\psi(\sigma)\in L_2$, откуда

$$|\psi(\sigma)|=|\sigma\psi(\sigma)\cdot\frac{1}{\sigma}|\leqslant\frac{1}{2}\left\{|\sigma\psi(\sigma)|^2+\frac{1}{\sigma^2}\right\}$$

есть интегрируемая функция, что и требуется.

Для любого дифференциального оператора $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ порядка $\leqslant m$ мы получаем формулу

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi\right]=P(i\sigma)F[\varphi].$$

Линейное дифференциальное уравнение на оси x относительно функции $\varphi(x)$ переходит в алгебраическое уравнение на оси σ относительно $\psi(\sigma)$. Это открывает новые возможности для решения дифференциальных уравнений. Поскольку дифференциальные уравнения, к которым можно применять этот метод, должны быть линейными с постоянными коэффициентами, для обыкновенных дифференциальных уравнений применение этого метода мало что может дать (учитывая тем более, что мы обязаны оставаться в границах класса интегрируемых функций на всей оси). Но для уравнений с частными производными метод преобразования Фурье уже оказывается полезным. Мы покажем это в п. 3 на примере уравнения теплопроводимости.

2. Преобразование Фурье и свертка. Пусть $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ — преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$; выясним, преобразованием Фурье какой функции является произведение $\psi_1(\sigma)\psi_2(\sigma)$. Мы имеем:

$$\psi_1(\sigma)\psi_2(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)e^{-i\sigma\xi}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(\eta)e^{-i\sigma\eta}d\eta=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\varphi_2(\eta)e^{-i\sigma(\xi+\eta)}d\xi\,d\eta,$$

причем двойной интеграл абсолютно сходится (см. замечание к теореме Фубини, гл. IV, § 5, п. 2). Чтобы от двух экспонент перейти к одной, совершим замену переменного $\eta=x-\xi$; тогда получим:

$$\psi_1(\sigma)\psi_2(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x-\xi)e^{-i\sigma x}dx\right\}d\xi=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\sigma x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\varphi_2(x-\xi)d\xi\right\}d\eta, \tag{1}$$

причем перестановка интегралов законна в силу теоремы Фубини. Функция

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\varphi_2(x-\xi)d\xi,$$

существующая (в силу одного из утверждений теоремы Фубини) почти при каждом x, и абсолютно интегрируемая по x (в силу другого утверждения этой же теоремы), называется *сверткой* функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Формула (1) показывает, что *произведение функций* $\psi_1(\sigma)$ *и* $\psi_2(\sigma)$ *является преобразованием Фурье от свертки* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$.

Свертка $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ обозначается через $\varphi_1*\varphi_2$. Эта операция коммутативна и ассоциативна, поскольку преобразованием Фурье она переводится в коммутативную и ассоциативную операцию $\psi_1\psi_2$.

Задачи. 1. Пусть $e_a(x)$ есть характеристическая функция интервала $0<x<a$. Найти свертку

$$e_b(x)*\frac{e_{a+h}(x)-e_a(x)}{h}.$$

Отв. См. рис. 17.

2. Доказать, что для любой $\varphi(x)\in L_1(-\infty,\infty)$

$$\lim_{h\to 0}\varphi(x)*\frac{e_{a+h}(x)-e_a(x)}{h}=\varphi(x-a) \tag{2}$$

(предел в смысле метрики $L_1(-\infty,\infty)$).

Указание. Проверить (2) для функций $\varphi(x)=e_b(x)$ и их линейных комбинаций. При переходе к пределу воспользоваться ограниченностью нормы второго множителя.

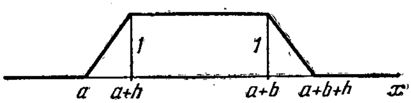

Рис. 17.

3. Если A есть замкнутое подпространство в $L_1(-\infty, \infty)$, содержащее вместе с каждой функцией $\varphi(x)$ все ее сдвиги $\varphi(x-h)$, то A содержит и свертку $\varphi(x)$ со всякой функцией $\psi(x) \in L_1(-\infty, \infty)$.

Указание. Свертка есть предел линейных комбинаций сдвигов.

3. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности. Найдем решение $u(x,t)$ уравнения теплопроводности $(-\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0)$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

обращающееся в заданную функцию $u_0(x)$ при $t=0$. Физический смысл указанной задачи состоит в определении температуры одномерного однородного континуума (бесконечного стержня) в любой момент времени $t>0$ по известной его температуре в момент $t=0$. Сделаем следующие предположения:

а) функции $u(x, t)$, $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ интегрируемы по x при $-\infty<x<\infty$ и любом фиксированном $t \geqslant 0$;

б) функция $u_t(x, t)$ имеет в каждом интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ интегрируемую мажоранту:

$$|u_t(x, t)| \leqslant \Phi(x), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\, dx < \infty.$$

Перейдем в уравнении (1) к преобразованию Фурье, умножив это уравнение на $e^{-i\sigma x}$ и проинтегрировав по x от 0 до ∞. В силу условия б) можно написать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)\, e^{-i\sigma x}\, dx=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{-i\sigma x}\, dx=v_t(\sigma, t),$$

где

$$v(\sigma, t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{-i\sigma x}\, dx$$

есть преобразование Фурье искомого решения $u(x, t)$.

В силу условия а) и результатов п. 1

$$F[u_{xx}(x, t)] = -\sigma^2 F[u] = -\sigma^2 v(\sigma, t).$$

В результате мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$v_t(\sigma, t) = -\sigma^2 v(\sigma, t).$$

Нужно найти решение этого уравнения, обращающееся при $t=0$ в

$$v_0(\sigma) = F[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) e^{-i\sigma x} dx.$$

Искомое решение, очевидно, имеет вид

$$v(\sigma, t) = e^{-\sigma^2 t} v_0(\sigma).$$

Мы знаем $\left(\text{см. пример 2 § 2, где положено } a = \frac{1}{4t}\right)$, что

$$e^{-\sigma^2 t} = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right].$$

По формуле свертки (п. 2)

$$v(\sigma, t) = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] F[u_0] = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right],$$

и так как $v(\sigma, t) = F[u(x, t)]$, то окончательно

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} u_0(x-\xi)\, d\xi.$$

Полученная формула решения называется *интегралом Пуассона*.

4. Связь между убыванием функции $\varphi(x)$ при $|x| \to \infty$ и гладкостью ее преобразования Фурье. Мы знаем, что преобразование Фурье $\psi(\sigma)$ абсолютно интегрируемой функции $\varphi(x)$ — ограниченная непрерывная функция от σ, $-\infty < \sigma < \infty$, стремящаяся к нулю при $|\sigma| \to \infty$. Предположим теперь, что не только $\varphi(x)$, но и $x\varphi(x)$ — интегрируемая функция на оси $-\infty < x < \infty$. Тогда можно утверждать, что функция $\psi(\sigma)$ дифференцируема. Действительно, формальное дифференцирование по параметру σ интеграла Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx = \psi(\sigma)$$

приводит к интегралу

$$-i\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,e^{-i\sigma x}\,dx,$$

который является абсолютно сходящимся и равномерно сходящимся по параметру σ. В силу известной теоремы о дифференцировании равномерно сходящегося интеграла функция $\psi(\sigma)$ дифференцируема и

$$\psi'(\sigma)=-i\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,e^{-i\sigma x}\,dx.$$

Мы получаем выразительную формулу

$$iF'[\varphi]=F[x\varphi], \tag{1}$$

показывающую, что операция умножения на x переходит после преобразования Фурье в операцию $i\frac{d}{d\sigma}$. Как преобразование Фурье интегрируемой функции, функция $\psi'(\sigma)$ снова непрерывна, ограничена и стремится к 0 при $|\sigma|\to\infty$. Если вместе с функцией $\varphi(x)$ интегрируемыми на оси x являются и функции $x\varphi(x)$, $x^2\varphi(x)$, ..., $x^m\varphi(x)$, то процесс дифференцирования можно продолжить; мы получим, что функция $\psi(\sigma)=F[\varphi]$ имеет производные до порядка m, непрерывные, ограниченные и стремящиеся к нулю при $|\sigma|\to\infty$, и имеет место формула

$$i^kF^{(k)}[\varphi]=F[x^k\varphi] \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m). \tag{2}$$

Для произвольного многочлена $P(x)$ степени $\leqslant m$ мы получим формулу

$$P\left(i\frac{d}{d\sigma}\right)F[\varphi]=F[P(x)\varphi]. \tag{3}$$

Если *все* произведения $x^m\varphi(x)$ интегрируемы ($m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$), то функция $F[\varphi]=\psi(\sigma)$ имеет производные по σ *всех* порядков и каждая из ее производных непрерывна и стремится к нулю при $|\sigma|\to\infty$.

Мы видим, что чем более сильные условия убывания на бесконечности мы накладываем на функцию $\varphi(x)$, тем более гладкой получается функция $\psi(\sigma)$.

В связи с изложенным можно указать важный класс функций, который при преобразовании Фурье переходит в себя самого, только с заменой аргумента x на аргумент σ. Рассмотрим совокупность S_x бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, которые для всех k, $q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ удовлетворяют неравенствам

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_{kq}, \tag{4}$$

где C_{kq} — постоянная, зависящая от выбора функции φ. Через S_σ мы обозначим класс таких же функций $\psi(\sigma)$ от аргумента σ.

Заметим прежде всего, что каждая из функций $x^k\varphi^{(q)}(x)$ не только ограничена, но и интегрируема на оси, поскольку вместе с неравенством (4) справедливо и неравенство

$$|x^{k+2}\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{k+2,q}, \quad |x^k\varphi^{(q)}(x)| \leqslant \frac{C_{k+2,q}}{x^2}.$$

Пусть $\psi(\sigma) = F[\varphi]$ есть преобразование Фурье функции $\varphi(x) \in S_x$. По доказанному функция $\psi(\sigma)$ бесконечно дифференцируема, причем

$$i^q\psi^{(q)}(\sigma) = F[x^q\varphi(x)].$$

Далее, функция $x^q\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема вместе с $\varphi(x)$ и все ее последовательные производные сами являются интегрируемыми, поскольку по формуле Лейбница они линейно выражаются через интегрируемые функции $x^j\varphi^{(q-j)}(x)$. Поэтому функции

$$(i\sigma)^k\psi^{(q)}(\sigma) = (-i)^q F[(x^q\varphi(x))^{(k)}],$$

как преобразования Фурье интегрируемых функций, ограничены при всех k и q. Итак, *если* $\varphi(x) \in S_x$, *то* $\psi(\sigma) \in S_\sigma$. Обратно, пусть дана функция $\psi(\sigma) \in S_\sigma$. Построим функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\, e^{i\sigma x} d\sigma.$$

Функция $2\pi\varphi(-x)$ есть, очевидно, преобразование Фурье функции $\psi(\sigma)$ и поэтому входит в S_x. Но тогда, очевидно, и $\varphi(x) \in S_x$. По формуле обращения

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\varphi(-x)\, e^{i\sigma x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx,$$

так что $\psi(\sigma)$ есть преобразование Фурье функции $\varphi(x)$. Итак, *каждая функция* $\psi \in S_\sigma$ *есть преобразование Фурье функции* $\varphi \in S_x$. Таким образом, *при преобразовании Фурье класс* S_x *отображается на весь класс* S_σ. Символически этот факт можно записать равенством

$$F[S_x] = S_\sigma.$$

Посмотрим, как будут улучшаться свойства гладкости функций $\psi(\sigma)$ при наложении дальнейших ограничений на поведение функций $\varphi(x)$ на бесконечности.

Пусть интегрируемым является произведение $\varphi(x)\, e^{b|x|}$, где $b > 0$ — фиксированная постоянная. Можно утверждать, что в этом случае преобразование Фурье $\psi(\sigma)$ функции $\varphi(x)$ не только бесконечно дифференцируемая функция, но и аналитическая. Действительно, интеграл

Фурье

$$\psi(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-i\sigma x}\,dx$$

теперь определен не только для вещественных, но и для некоторых комплексных σ; если обозначить $s=\sigma+i\tau$ (σ, τ вещественны), то мы получим:

$$\psi(\sigma+i\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-i\sigma x}e^{\tau x}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-isx}\,dx,$$

и интеграл сходится при $|\tau|\leqslant b$, т. е. в целой горизонтальной полосе s-плоскости. Полученная функция комплексного переменного s аналитична во всякой внутренней точке этой полосы; действительно, при формальном дифференцировании по s мы получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-isx}(-ix)\,dx.$$

Полученный интеграл равномерно сходится в некоторой окрестности точки s (не выходящей за пределы указанной полосы) и представляет, следовательно, производную функции $\psi(s)$. Функция $\psi(s)$ ограничена во всей указанной полосе, поскольку

$$|\psi(s)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|\,e^{|\tau||x|}\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|\,e^{b|x|}\,dx.$$

Отсюда следует, в частности, что последовательности функций $\varphi_n(x)$, сходящейся по норме $\|\varphi\|=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|\,e^{b|x|}\,dx$, отвечает последовательность $\psi_n(s)$, равномерно сходящаяся во всей полосе $|\tau|\leqslant b$.

Далее, можно утверждать, что функция $\psi(s)=\psi(\sigma+i\tau)$ стремится при $\sigma\to\pm\infty$ к нулю равномерно по τ, $|\tau|\leqslant b$. Действительно, это имеет место для преобразования Фурье характеристической функции интервала (α, β):

$$\psi(s)=\int_{\alpha}^{\beta}e^{-isx}\,dx=\frac{e^{-is\alpha}-e^{-is\beta}}{is},$$

поскольку числитель полученного отношения ограничен при $|\tau|\leqslant b$. К общему же случаю можно перейти обычным предельным переходом от ступенчатых функций.

Отметим, что в силу последнего свойства в формуле обращения можно производить интегрирование не только по вещественной оси, но по любой параллельной прямой, лежащей в указанной полосе s-плоскости, так что

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)e^{i\sigma x}\,d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma+i\tau)e^{i(\sigma+i\tau)x}\,d\sigma.$$

Предположим далее, что $\varphi(x)$ интегрируема в произведении с $e^{b|x|}$ при *любом* b. Тогда функция $\psi(s)$ определена и аналитична в любой полосе $|\tau|\leqslant b$, т. е. является целой аналитической функцией; эта целая функция по доказанному в любой полосе $|\tau|\leqslant b$ остается ограниченной (с границей, зависящей от b) и равномерно стремящейся к нулю при $\sigma\to\pm\infty$. В формуле обращения можно производить интегрирование по любой прямой, параллельной оси абсцисс.

Еще более сильного убывания функции $\varphi(x)$ на бесконечности можно добиться наложением условия интегрируемости произведения ее с функцией $e^{b|x|^p}$, $p>1$. Можно показать (на чем мы не будем здесь останавливаться), что целая функция $\psi(s)$ будет тогда удовлетворять оценке

$$|\psi(\sigma+i\tau)|\leqslant Ce^{a|\tau|^{p'}},\quad \text{где } \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

В этом случае говорят, что функция $\psi(s)$ имеет в s-плоскости *экспоненциальный порядок роста* $\leqslant p'$.

Числа p и p' оба превосходят 1; но меняются они в противоположных направлениях, и, когда p неограниченно возрастает, p' приближается к 1.

Предположим, наконец, что $\varphi(x)$ интегрируема в произведении с любой возрастающей функцией от $|x|$. Этим свойством обладают финитные функции $\varphi(x)$ (обращающиеся почти всюду в 0 вне некоторого промежутка $|x|\leqslant a$) и, как легко убедиться, только такие функции. Итак, положим, что $\varphi(x)$ обращается в нуль при $|x|\geqslant a$. Тогда преобразование Фурье

$$\psi(s)=\int_{-a}^{a}\varphi(x)e^{-isx}\,dx$$

есть целая аналитическая функция от s; в s-плоскости она допускает следующую оценку:

$$|\psi(\sigma+i\tau)|\leqslant\int_{-a}^{a}|\varphi(x)|e^{|\tau||x|}\,dx\leqslant Ce^{a|\tau|},$$

где $C=\int_{-a}^{a}|\varphi(x)|\,dx$; как говорят, функция $\psi(s)$ есть целая *функция не выше 1-го порядка роста с типом* $\leqslant a$. Таким образом, чем быстрее убывает функция $\varphi(x)$ на бесконечности, тем «глаже» становится ее преобразование Фурье $\psi(\sigma)$. Начиная от непрерывных функций $\psi(\sigma)$, мы прошли через конечно дифференцируемые, бесконечно дифференцируемые, аналитические в полосе, в плоскости и дошли до аналитических функций 1-го порядка с конечным типом. Это предел гладкости для функций, стремящихся к нулю в обе стороны по вещественной оси (мы знаем, что этим последним свойством всегда обладают преобразования Фурье интегрируемых функций); известно, что не существует отличных от нуля целых аналитических функций, стремящихся к нулю по оси абсцисс и имеющих в плоскости более медленный рост, чем $e^{a|\tau|}$ при любом $a > 0$ [1]).

5. Вот одно из простейших применений доказанных теорем.

Пусть $\varphi_0(x) \in L_2(a, b)$ $(-\infty \leqslant a,\ b \leqslant \infty)$ — функция, почти всюду отличная от нуля и удовлетворяющая неравенству

$$|\varphi_0(x)| \leqslant Ce^{-\alpha|x|}$$

с некоторым положительным α. Покажем, что *система функций* $\varphi_n(x) = x^n\varphi_0(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *полна в пространстве* $L_2(a, b)$ *в том смысле, что линейные комбинации этих функций образуют множество, всюду плотное в* $L_2(a, b)$.

Действительно, если бы это было не так, то по теореме об ортогональном дополнении (гл. V, § 2, п. 8) существовала бы функция $f(x) \in L_2(a, b)$, не тождественно равная нулю, ортогональная всем функциям $\varphi_n(x)$, так что при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_a^b f(x)\, x^n\, \varphi_0(x)\, dx = 0. \tag{5}$$

Функция $f(x)\varphi_0(x)$ интегрируема в произведении с любой функцией $e^{\beta|x|}$, где $\beta < \alpha$; поэтому, продолжая в случае необходимости $f(x)\varphi_0(x)$ тождественным нулем на остающуюся часть оси $(-\infty, \infty)$, получаем, что ее преобразование Фурье $g(s)$ есть функция, аналитическая в полосе $|\tau| < \alpha$.

Так как согласно формуле (2)

$$i^n g^{(n)}(\sigma) = \int_a^b f(x)\, x^n\varphi_0(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx,$$

то из (5) вытекает, что при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ мы имеем $g^{(n)}(0) = 0$. Отсюда в силу аналитичности $g(s)$ всюду $g(\sigma) \equiv 0$. По доказанной теореме единственности (конец § 2) также $f(x)\varphi_0(x) \equiv 0$ (почти всюду), и следовательно, $f(x) \equiv 0$ (почти всюду) в противоречие с построением. Таким образом, система $x^n\varphi_0(x)$ полна в $L_2(a, b)$, что и требовалось.

Например, при $a = -\infty$, $b = \infty$, $\varphi_0(x) = e^{-x^2}$ получаем полноту системы функций Эрмита $x^n e^{-x^2}$, при $a = 0$, $b = \infty$, $\varphi_0(x) = e^{-x}$ получаем полноту функций Лагерра (гл. V, § 2).

§ 4. Преобразование Лапласа

1. Пусть дана функция $\varphi(x)$, которая (сама, возможно, и не интегрируемая) становится интегрируемой при умножении на $e^{-\gamma x}$ при некотором вещественном γ. Тогда преобразование Фурье от функции $\varphi(x)$, возможно не существующее в нашем первоначальном смысле, оказывается существующим для некоторых комплексных s:

$$\psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-isx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-ix\sigma} e^{x\tau}\, dx,$$

[1]) См., например, А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950, гл. 6, § 3.