к нулю по оси абсцисс и имеющих в плоскости более медленный рост, чем $e^{a|\tau|}$ при любом $a>0$ [1]).

5. Вот одно из простейших применений доказанных теорем.

Пусть $\varphi_0(x)\in L_2(a, b)$ $(-\infty\leqslant a,\ b\leqslant\infty)$ — функция, почти всюду отличная от нуля и удовлетворяющая неравенству

$$|\varphi_0(x)|\leqslant Ce^{-\alpha|x|}$$

с некоторым положительным α. Покажем, что *система функций $\varphi_n(x)=x^n\varphi_0(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ полна в пространстве $L_2(a, b)$ в том смысле, что линейные комбинации этих функций образуют множество, всюду плотное в $L_2(a, b)$.*

Действительно, если бы это было не так, то по теореме об ортогональном дополнении (гл. V, § 2, п. 8) существовала бы функция $f(x)\in L_2(a, b)$, не тождественно равная нулю, ортогональная всем функциям $\varphi_n(x)$, так что при любом $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\int_a^b f(x)\,x^n\,\varphi_0(x)\,dx=0. \tag{5}$$

Функция $f(x)\varphi_0(x)$ интегрируема в произведении с любой функцией $e^{\beta|x|}$, где $\beta<\alpha$; поэтому, продолжая в случае необходимости $f(x)\varphi_0(x)$ тождественным нулем на остающуюся часть оси $(-\infty, \infty)$, получаем, что ее преобразование Фурье $g(s)$ есть функция, аналитическая в полосе $|\tau|<\alpha$.

Так как согласно формуле (2)

$$i^n g^{(n)}(\sigma)=\int_a^b f(x)\,x^n\varphi_0(x)\,e^{-i\sigma x}\,dx,$$

то из (5) вытекает, что при всех $n=0, 1, 2, \ldots$ мы имеем $g^{(n)}(0)=0$. Отсюда в силу аналитичности $g(s)$ всюду $g(\sigma)\equiv 0$. По доказанной теореме единственности (конец § 2) также $f(x)\varphi_0(x)\equiv 0$ (почти всюду), и следовательно, $f(x)\equiv 0$ (почти всюду) в противоречие с построением. Таким образом, система $x^n\varphi_0(x)$ полна в $L_2(a, b)$, что и требовалось.

Например, при $a=-\infty$, $b=\infty$, $\varphi_0(x)=e^{-x^2}$ получаем полноту системы функций Эрмита $x^n e^{-x^2}$, при $a=0$, $b=\infty$, $\varphi_0(x)=e^{-x}$ получаем полноту функций Лагерра (гл. V, § 2).

§ 4. Преобразование Лапласа

1. Пусть дана функция $\varphi(x)$, которая (сама, возможно, и не интегрируемая) становится интегрируемой при умножении на $e^{-\gamma x}$ при некотором вещественном γ. Тогда преобразование Фурье от функции $\varphi(x)$, возможно не существующее в нашем первоначальном смысле, оказывается существующим для некоторых комплексных s:

$$\psi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-isx}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-ix\sigma}e^{x\tau}\,dx,$$

[1]) См., например, А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950, гл. 6, § 3.

в частности, на прямой $\tau=-\gamma$. Как мы видим, на этой прямой $\psi(s)$ является преобразованием Фурье интегрируемой функции $\varphi(x)e^{x\tau}$.

Наиболее важный случай такого рода получается при условиях

$$\left.\begin{array}{ll} |\varphi(x)|<Ce^{\alpha x} & \text{при } x>0, \\ \varphi(x)=0 & \text{при } x<0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Здесь преобразование Фурье

$$\psi(s)=\int_0^\infty \varphi(x)e^{x\tau}e^{-ix\sigma}dx=\int_0^\infty \varphi(x)e^{-ixs}dx \qquad (2)$$

существует при всех $\tau<-\alpha$, т. е. в полуплоскости плоскости s, ограниченной сверху прямой $\tau=-\alpha$. Как мы уже знаем, в формуле обращения можно производить интегрирование по любой горизонтальной прямой $\tau=-\gamma$, лежащей ниже линии $\tau=-\alpha$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-i\gamma-\infty}^{-i\gamma+\infty}\psi(s)e^{isx}ds. \qquad (3)$$

Сделаем в формулах (2) и (3) замену переменного $is=p$. Когда s пробегает полуплоскость $\operatorname{Im}s<-\alpha$, p пробегает полуплоскость $\operatorname{Re}p>\alpha$. Функция

$$\Phi(p)\equiv\psi(s)=\int_0^\infty \varphi(x)e^{-px}dx$$

определена и аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}p>\alpha$; на каждой вертикальной прямой в этой полуплоскости она стремится к нулю, когда $\operatorname{Im}p\to\pm\infty$, причем это стремление равномерно на любом конечном промежутке значений $\operatorname{Re}p$. Формула обращения (3) приобретает вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Phi(p)e^{px}\frac{dp}{i}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Phi(p)e^{px}dp \quad (\gamma>\alpha).$$

Функция $\Phi(p)$ называется *преобразованием Лапласа* от функции $\varphi(x)$ [удовлетворяющей условиям (1)]. Преобразование Лапласа, как мы видели, отличается от преобразования Фурье (рассматриваемого в комплексной области) лишь поворотом в области комплексного аргумента на 90°.

Следующая простая теорема дает общие достаточные (но далеко не необходимые) условия того, что данная функция $\Phi(p)$ есть преобразование Лапласа некоторой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям (1).

Теорема 1. *Если функция* $\Phi(p)$ *удовлетворяет условиям*
а) $\Phi(p)$ *аналитична в полуплоскости* $\operatorname{Re}p>\gamma_0$,

б) $\Phi(p)$ *допускает оценку* $(p = p_1 + ip_2)$

$$|\Phi(p_1 + ip_2)| \leqslant B(p_2), \text{ причем } \int_{-\infty}^{\infty} B(p_2)\,dp_2 = B < \infty,$$

то $\Phi(p)$ *есть преобразование Лапласа функции* $\varphi(x)$, *равной нулю при* $x < 0$, *а при* $x > 0$ *удовлетворяющей неравенству*

$$|\varphi(x)| < Ce^{\gamma_0 x}.$$

Доказательство. Мы определим функцию $\varphi(x)$ формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Phi(p)\,e^{pt}\,dp \quad (\gamma > \gamma_0). \tag{4}$$

Применяя обычные рассуждения с формулой Коши и опираясь на свойства а), б), легко проверить, что интеграл (1) не зависит от γ. С другой стороны, справедлива оценка

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\gamma + ip_2)|\,e^{\gamma x}\,dp_2 \leqslant \frac{B}{2\pi}e^{\gamma x}.$$

При $x > 0$, устремляя γ к γ_0, получаем оценку

$$|\varphi(x)| \leqslant Ce^{\gamma_0 x};$$

при $x < 0$, устремляя γ к $+\infty$, получаем $\varphi(x) \equiv 0$.

Если записать формулу (4) в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p_1 + ip_2)\,e^{(p_1 + ip_2)x} i\,dp_2 = \frac{e^{p_1 x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p_1 + ip_2)\,e^{ip_2 x}\,dp_2,$$

то мы получим, что $2\pi\varphi(-x)\,e^{p_1 x}$ есть преобразование Фурье по переменному p_2 абсолютно интегрируемой функции $\Phi(p_1 + ip_2)$ (p_1 фиксировано). По формуле обращения

$$\Phi(p_1 + ip_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\varphi(-x)\,e^{(p_1 + ip_2)x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,e^{-px}\,dx,$$

так что $\Phi(p_1 + ip_2)$ есть действительно преобразование Лапласа функции $\varphi(x)$.

2. Преобразование Лапласа часто используется для решения дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, отвечающих устанавливающимся процессам; в таких задачах неизвестная функция $f(t)$ при $t < 0$ равна нулю, а при $t > 0$ должна быть решением некоторого уравнения, удовлетворяющим при $t = 0$ некоторым начальным условиям.

Рассмотрим сначала обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = b(t) \tag{1}$$

с заданными значениями

$$\begin{gathered} y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \end{gathered}$$

Умножим уравнение (1) на e^{-pt} и проинтегрируем по t от 0 до ∞. Обозначим через

$$Y(p) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-pt}\, dt$$

преобразование Лапласа функции $y(t)$. Тогда, интегрируя по частям, находим:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty y'(t)\, e^{-pt}\, dt = y(t)\, e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty y(t)\, e^{-pt}\, dt = -y_0 + pY(p), \\ &\int_0^\infty y''(t)\, e^{-pt}\, dt = y'(t)\, e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty y'(t)\, e^{-pt}\, dt = \\ &\qquad = -y_1 + p(-y_0 + pY(p)) = -y_1 - py_0 + p^2 Y(p), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\int_0^\infty y^{(n)}(t)\, e^{-pt}\, dt = y^{(n-1)}(t)\, e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty y^{(n-1)}(t)\, e^{-pt}\, dt = \\ &\qquad = -y_{n-1} + p(-y_{n-2} - py_{n-3} - \ldots + p^{n-1} Y(p)) = \\ &\qquad\qquad = -y_{n-1} - py_{n-2} - \ldots + p^n Y(p). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Умножая каждое из уравнений (2) на соответствующий коэффициент a_k и складывая, получим уравнение вида

$$R_0(p) + R(p)\, Y(p) = B(p),$$

где $R_0(p)$ — многочлен не выше, чем $n-1$-ой степени от p, $R(p)$ — многочлен n-й степени от p, а $B(p)$ — преобразование Лапласа от функции $b(t)$. Для неизвестной функции $Y(p)$ получается таким образом чисто алгебраическое уравнение. Решая его, находим:

$$Y(p) = \frac{B(p) - R_0(p)}{R(p)},$$

искомое решение $y(t)$ представится по формуле обращения

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{B(p)-R_0(p)}{R(p)}e^{pt}\,dp. \qquad (3)$$

Для вычисления интеграла (3) прибегают, как правило, к контурному интегрированию и теории вычетов, как мы это производили при вычислении интеграла Фурье от рациональных функций. Заметим, что функция e^{pt} при $t>0$ ограничена в левой полуплоскости ($\operatorname{Re}p<\gamma$) и не ограничена в правой; поэтому полуокружности, входящие в состав контура, нужно строить в левую сторону от прямой $\operatorname{Re}p=\gamma$, а не в правую. В качестве числа γ можно брать любое, отвечающее тому условию, что все особенности функции $R(p)$ лежат слева от прямой $\operatorname{Re}p=\gamma$.

Пример. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=b\sin kt,\qquad y_0=0,\quad y_1=0,$$

с комплексно сопряженными (невещественными) характеристическими корнями $\lambda=\alpha+i\beta$, $\bar\lambda=\alpha-i\beta$, причем $\alpha<0$.

В электротехнике такое уравнение описывает вынужденные колебания в контуре с сопротивлением, самоиндукцией и емкостью под действием вынуждающей э.д.с. с частотой k. Переход к преобразованию Лапласа приводит к уравнению

$$(a_0p^2+a_1p+a_2)Y(p)=\int\limits_0^\infty b\sin kt e^{-pt}\,dt=\frac{bk}{k^2+p^2}.$$

Решая это уравнение, находим:

$$Y(p)=\frac{bk}{(a_0p^2+a_1p+a_2)(k^2+p^2)}.$$

По формуле обращения

$$y(t)=\frac{bk}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{pt}\,dp}{(a_0p^2+a_1p+a_2)(k^2+p^2)}.$$

Положим

$$f(p)=\frac{e^{pt}}{(a_0p^2+a_1p+a_2)(k^2+p^2)}.$$

Знаменатель имеет четыре простых корня в точках $\pm ik$ и $\alpha\pm i\beta$. В качестве γ можно взять любое положительное число. Для вычисления интеграла дополняем прямую $\operatorname{Re}p=\gamma$ бесконечно большой полуокружностью в левой полуплоскости; тогда по теореме о вычетах

$$y(t)=bk\left\{\text{Выч}\,f(p)\big|_{p=ik}+\text{Выч}\,f(p)\big|_{p=-ik}+\right.$$
$$\left.+\text{Выч}\,f(p)\big|_{p=\alpha+i\beta}+\text{Выч}\,f(p)\big|_{p=\alpha-i\beta}\right\}.$$

Вычет в каждой точке вычисляется по общей формуле для простых полюсов

$$\text{Выч}\left.\frac{A(p)}{B(p)}\right|_{p=p_0}=\frac{A(p_0)}{B'(p_0)}.$$

В итоге получаем:

$$y(t)=bk\left[\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{(\lambda^2+k^2)\,2i\beta a_0}-\frac{e^{(\alpha-i\beta)t}}{(\bar{\lambda}^2+k^2)\,2i\beta a_0}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{ikt}}{(-a_0k^2+a_1ik+a_2)\,2ik}-\frac{e^{-ikt}}{(-a_0k^2-a_1ik+a_2)\,2ik}\right].$$

Результирующий процесс есть наложение периодического колебания с частотой внешней силы и затухающего колебания с собственной частотой системы; скорость затухания определяется величиной α, т. е. абсциссой характеристических корней.

При $\alpha=0$, $\beta=k$ наступает явление резонанса. В этом случае исходное уравнение имеет вид

$$y''+k^2y=b\sin kt$$

с формулой решения

$$y(t)=\frac{bk}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{pt}\,dp}{(p^2+k^2)^2}.$$

Точки $p=\pm ik$ являются полюсами 2-го порядка подынтегральной функции. Вычисляя вычеты по общим правилам (для кратных полюсов), находим:

$$y(t)=bk\left[e^{ikt}\left(-\frac{t}{4k^2}+\frac{1}{4ik^3}\right)+e^{-ikt}\left(-\frac{t}{4k^2}-\frac{1}{4ik^3}\right)\right]=$$
$$=-\frac{bt}{2k}\cos kt-\frac{b}{2k^2}\sin kt.$$

Получается колебание с неограниченно возрастающей амплитудой.

3. Те же методы применяются для уравнений с частными производными.

Если обыкновенное уравнение после преобразования Лапласа по t переходило в алгебраическое уравнение относительно неизвестной функции, то в уравнении, содержащем производные не только по t, но и по переменным $x, y, \ldots$, после преобразования Лапласа по t исчезнут производные по t и останутся производные по $x, y, \ldots$ При большом числе независимых переменных получится, конечно, слабое упрощение, но в случае двух независимых переменных t, x метод преобразования Лапласа может применяться с большой эффективностью.

Рассмотрим для примера уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в конечном промежутке $0\leqslant x\leqslant l$ с граничными и начальными условиями $u_x(0,\,t)=0$, $u(l,\,t)=u_1$, $u(x,\,0)=u_0$. Физически эти условия означают, что теплота не выходит через конец $x=0$, а на конце $x=l$ поддерживается постоянная температура u_1; в начальный момент температура постоянна и равна u_0.

Применим для решения задачи преобразование Лапласа по t, т. е. перейдем от функции $u(x,\,t)$ к функции

$$v(x,\,p)=\int\limits^{\infty}e^{-pt}\,u(x,\,t)\,dt.$$

Для функции $v(x, p)$ мы получаем уравнение

$$\frac{d^2v(x, p)}{dx^2} - pv(x, p) = -u_0$$

с условиями

$$v_x(0, p) = 0, \qquad v(l, p) = \frac{u_1}{p}.$$

Это уравнение 2-го порядка имеет решение

$$v(x, p) = \frac{u_0}{p} + \frac{u_1 - u_0}{p} \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}},$$

откуда

$$u(x, t) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}} \frac{dp}{p}.$$

Подынтегральная функция — однозначная функция от p с полюсами $p_0 = 0$ и $p_n = -\frac{\pi^2}{l^2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Мы покажем, что интеграл равен сумме вычетов соответствующей функции во всех этих полюсах. Для этого рассмотрим в левой полуплоскости полуокружность Γ_n с центром в начале координат и радиусом $n^2 \frac{\pi^2}{l^2}$; она проходит между двумя соседними полюсами, и мы покажем, что отношение $\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}$ на всей этой полуокружности ограничено; тогда при $n \to \infty$ интеграл по Γ_n в силу леммы Жордана стремится к нулю, и весь интеграл (1), как обычно, сведется к сумме вычетов.

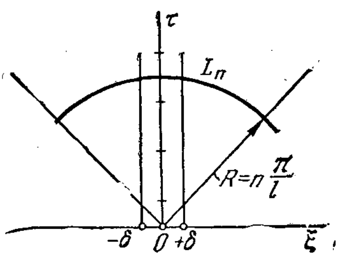

Рис. 18.

Вместо того, чтобы рассматривать отношение $\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}$ на полуокружности Γ_n, где $|p| = n^2\frac{\pi^2}{l^2}$, можно заменить $\sqrt{p}$ на ζ, p на ζ^2 и рассматривать отношение $\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}$ на четверти окружности L_n радиуса $n\frac{\pi}{l}$ с аргументом, меняющимся от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{4}$ (рис. 18). Положим $\zeta = \xi + i\tau$, мы имеем $\tau > 0$, $|\xi| \leqslant \tau$ и

$$\left|\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}\right|^2 = \left|\frac{\operatorname{ch} x(\xi + i\tau)}{\operatorname{ch} l(\xi + i\tau)}\right|^2 = \left|\frac{\operatorname{ch} x\xi \cos x\tau + i \operatorname{sh} x\xi \sin x\tau}{\operatorname{ch} l\xi \cos l\tau + i \operatorname{sh} l\xi \sin l\tau}\right|^2 =$$
$$= \frac{\operatorname{ch}^2 x\xi \cos^2 x\tau + \operatorname{sh}^2 x\xi \sin^2 x\tau}{\operatorname{ch}^2 l\xi \cos^2 l\tau + \operatorname{sh}^2 l\xi \sin^2 l\tau} \leqslant \frac{\operatorname{ch}^2 l\xi}{\operatorname{ch}^2 l\xi \cos^2 l\tau + \operatorname{sh}^2 l\xi \sin^2 l\tau}. \tag{1}$$

Если $|\xi| \leqslant \delta$, то на окружности L_n при достаточно большом n мы имеем $\left|\tau - n\frac{\pi}{l}\right| < \varepsilon$ и, следовательно, $\cos^2 l\tau > 1 - \eta$, где ε, η как угодно малы;

поэтому

$$\left|\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}\right|^2 \leqslant \frac{\operatorname{ch}^2 l\xi}{(1-\eta)\operatorname{ch}^2 l\xi} = \frac{1}{1-\eta}. \tag{2}$$

Если $|\xi| \geqslant \delta$, то мы заменим в знаменателе (1) $\operatorname{ch}^2 l\xi$ на $\operatorname{sh}^2 l\xi$; тогда мы получим:

$$\left|\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}\right|^2 \leqslant \frac{\operatorname{ch}^2 l\xi}{\operatorname{sh}^2 l\xi} = \operatorname{cth}^2 l\xi \leqslant \operatorname{cth}^2 l\delta. \tag{3}$$

Неравенства (2) и (3) показывают, что отношение $\left|\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}\right|$ ограничено фиксированной постоянной на указанных окружностях. Поэтому, как было указано, интеграл сводится к сумме вычетов. Вычет относительно полюса $p=0$ равен 1. Вычет относительно полюса $p_n = -\frac{\pi^2}{l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2$, как легко подсчитать, равен

$$\frac{(-1)^n 4}{\pi(2n-1)} e^{-\frac{\pi^2}{l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 t} \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}.$$

В конце концов мы получаем решение в виде суммы ряда

$$u(x, t) = u_0 + \frac{4}{\pi}(u_1 - u_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-\frac{\pi^2}{l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 t} \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}.$$

Задачи. **1.** Заполнить пустые места в таблице

№	$y(t)$	$Y(p)$
1	t^n	
2	$\cos at$	
3	$\operatorname{sh} at$	
4		$\frac{p}{p^2-a^2}$
5		$\frac{a}{p^2+a^2}$

Отв. $Y_1(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$, $Y_2(p) = \frac{p}{a^2+p^2}$, $Y_3(p) = \frac{a}{p^2-a^2}$, $y_4(t) = \operatorname{ch} at$, $y_5(t) = \sin at$.

2. Решить уравнение $y^{(IV)} + 4y''' + 4y'' = 0$ при условиях $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$.

Отв. $4y(t) = -9 + 15t + 9e^{-2t} + 7te^{-2t}$.

3. Решить систему уравнений

$$y'' - 3y' + y + z' - z = 0$$
$$-y' + y + z'' - 5z' + 4z = 0$$

при условиях $y_0 = y_1 = z_1 = 0$, $z_0 = 1$.

Отв. $4y = e^t - e^{3t} + 2te^{3t}$, $4z = 5e^t - e^{3t} - 2te^{3t}$.

4. Решить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x \geqslant 0,\ t \geqslant 0)$$

при условиях $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = a\cos\omega t$.

Отв.

$$u(x, t) = ae^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \frac{a}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi t}\sin x\sqrt{\xi}\,\frac{\xi\,d\xi}{\xi^2 + \omega^2}.$$

Примечание. Множество примеров на преобразование Лапласа и его применения в задачах математической физики имеется в книгах: Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948; И. Снеддон, Преобразования Фурье, ИЛ, 1955.

§ 5. Квазианалитические классы функций

1. Метод преобразования Лапласа с успехом применяется и при решении теоретических проблем. В качестве одного из таких применений мы изложим здесь основную теорему теории квазианалитических классов функций[1]).

Известно, что функция $f(x)$ вещественного переменного x, если она бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0, не обязана еще быть аналитической, т. е. разлагаться в окрестности этой точки в ряд Тейлора. Но если последовательные производные функции $f(x)$ не слишком быстро растут, именно так, что выполняются условия

$$\max_{|x - x_0| < \delta} |f^{(n)}(x)| \leqslant CM^n n!, \tag{1}$$

то аналитичность функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 уже будет иметь место. Действительно, остаточный член в формуле Тейлора

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) =$$
$$= \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_1) \quad (x_0 - \delta < x_1 < x_0 + \delta)$$

допускает в этом случае оценку $|R_n(x)| \leqslant CM^n|x - x_0|^n$ и при $|x - x_0| < \frac{1}{M}$ стремится к нулю, откуда следует, что в интер-

[1]) По книге С. Мандельбройта, Квазианалитические классы функций, М.—Л., 1936.