3. Решить систему уравнений

$$y'' - 3y' + y + z' - z = 0$$
$$-y' + y + z'' - 5z' + 4z = 0$$

при условиях $y_0 = y_1 = z_1 = 0$, $z_0 = 1$.

Отв. $4y = e^t - e^{3t} + 2te^{3t}$, $4z = 5e^t - e^{3t} - 2te^{3t}$.

4. Решить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x \geqslant 0,\ t \geqslant 0)$$

при условиях $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = a\cos\omega t$.

Отв.

$$u(x, t) = ae^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \frac{a}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi t}\sin x\sqrt{\xi}\,\frac{\xi d\xi}{\xi^2 + \omega^2}.$$

Примечание. Множество примеров на преобразование Лапласа и его применения в задачах математической физики имеется в книгах: Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948; И. Снеддон, Преобразования Фурье, ИЛ, 1955.

§ 5. Квазианалитические классы функций

1. Метод преобразования Лапласа с успехом применяется и при решении теоретических проблем. В качестве одного из таких применений мы изложим здесь основную теорему теории квазианалитических классов функций[1]).

Известно, что функция $f(x)$ вещественного переменного x, если она бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0, не обязана еще быть аналитической, т. е. разлагаться в окрестности этой точки в ряд Тейлора. Но если последовательные производные функции $f(x)$ не слишком быстро растут, именно так, что выполняются условия

$$\max_{|x - x_0| < \delta} |f^{(n)}(x)| \leqslant CM^n n!, \tag{1}$$

то аналитичность функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 уже будет иметь место. Действительно, остаточный член в формуле Тейлора

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) =$$
$$= \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_1) \quad (x_0 - \delta < x_1 < x_0 + \delta)$$

допускает в этом случае оценку $|R_n(x)| \leqslant CM^n|x - x_0|^n$ и при $|x - x_0| < \frac{1}{M}$ стремится к нулю, откуда следует, что в интер-

[1]) По книге С. Мандельбройта, Квазианалитические классы функций, М.—Л., 1936.

вале $|x-x_0|<\frac{1}{M}$ функция $f(x)$ есть сумма своего ряда Тейлора. Применяя формулу Коши для производных аналитической функции, легко проверить, что и, обратно, аналитичность функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 влечет выполнение условия (1). Пусть $m_0, m_1, \ldots$ $\ldots, m_n, \ldots$ — произвольная последовательность положительных чисел. Образуем класс $C\langle m_n\rangle$ функций $f(x)$, определенных на оси $-\infty<x<\infty$ и удовлетворяющих неравенствам

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant CM^n m_n \quad (n=0,\ 1,\ 2\ \ldots),$$

где постоянные C и M могут зависеть от выбора функции f. Если числа m_n растут быстрее, чем $n!$, то класс $C\langle m_n\rangle$ может включать и неаналитические функции. Но, как показал А. Данжуа в 1921 г., если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{m_n}}\right)=\infty$, то класс $C\langle m_n\rangle$ обладает следующим замечательным свойством: *если две функции $f(x)$ и $g(x)$, входящие в класс $C\langle m_n\rangle$, совпадают в некоторой точке x_0 вместе со всеми производными, то они тождественно совпадают при всех значениях x*. Для аналитических функций это свойство хорошо известно со времен Коши.

Классы $C\langle m_n\rangle$, в которых из совпадения двух функций вместе со всеми производными вытекает совпадение этих функций всюду, были названы *квазианалитическими классами*. В 1926 г. Т. Карлеман дал полное описание квазианалитических классов; несколько более простую формулировку предложил в 1930 г. А. Островский. Теорема Карлемана в формулировке Островского звучит следующим образом:

Теорема 1. *Положим*

$$T(r)=\sup_{n\geqslant 0}\frac{r^n}{m_n}. \tag{2}$$

Для того чтобы класс $C\langle m_n\rangle$ был квазианалитическим, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln T(r)}{r^2}\,dr=\infty. \tag{3}$$

Пусть, например, $m_n=n^{n\alpha}$, где α фиксировано. Тогда, как легко вычислить,

$$T(r)\sim r^{1-\alpha};$$

интеграл (3) сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$. Теорема Карлемана утверждает, таким образом, что класс $C\langle n^{n\alpha}\rangle$ квазианалитичен при $\alpha\leqslant 1$ (как мы видели выше, он состоит даже из аналитических функций) и не квазианалитичен при $\alpha>1$.

Существуют квазианалитические классы, состоящие не только из аналитических функций. Можно проверить, что функция $f(x)=\sum T^{-1}(n)\cos nx$ входит в класс $C_{\langle m_n\rangle}$ и не является аналитической, если $\frac{\sqrt[n]{m_n}}{n}\to\infty$; поэтому, например, при $m_n = n!\ln^n n$ в квазианалитическом классе $C_{\langle m_n\rangle}$ имеются неаналитические функции.

2. В этом пункте, пользуясь преобразованием Лапласа, мы сведем проблему о квазианалитических классах к некоторой другой проблеме, относящейся к аналитическим функциям в полуплоскости.

Допустим, что класс $C\langle m_n\rangle$ не квазианалитичен. Это означает, что в классе $C\langle m_n\rangle$ существуют функции $f(x)$ и $g(x)$, совпадающие при $x=x_0$ вместе со всеми производными, но не совпадающие всюду. Без ограничения общности можно считать $x_0=0$ и $f(x)\not\equiv g(x)$ при $x>0$; выполнения этих условий всегда можно добиться сдвигом и заменой x на $-x$, т. е. операциями, очевидно выполнимыми в пределах класса $C\langle m_n\rangle$. Рассмотрим далее функцию $\varphi(x)$, равную $f(x)-g(x)$ при $x\geqslant 0$ и равную 0 при $x<0$; очевидно, что она также принадлежит классу $C\langle m_n\rangle$. Эта функция равна нулю при $x<0$ и ограничена при $x>0$, и, следовательно, обладает преобразованием Лапласа

$$\Phi(p)=\int_0^\infty \varphi(x)\,e^{-px}\,dx, \tag{1}$$

аналитическим в полуплоскости $\operatorname{Re} p>0$.

Посмотрим, какими дальнейшими свойствами обладает функция $\Phi(p)$. Производя в (1) n раз интегрирование по частям, получим:

$$p^n\Phi(p)=\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x)\,e^{-px}\,dx,$$

откуда вытекает оценка

$$|p^n\Phi(p)|\leqslant CM^n m_n\int_0^\infty e^{-px}\,dx=CM^n m_n\frac{1}{|p|}\leqslant C_1M^n m_n$$

при $|p|>\gamma>0$. Обратно, пусть имеется в полуплоскости $\operatorname{Re} p>\gamma$ аналитическая функция $\Phi(p)\not\equiv 0$, удовлетворяющая неравенствам вида

$$|p^n\Phi(p)|\leqslant CM^n m_n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Очевидно, что $\left(\frac{\Phi(p)}{p^2}\right)e^{-\gamma x}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 § 4; в качестве интегрируемой мажоранты, требуемой условием б), можно, например, взять $Cm_0\frac{1}{|p|^2}$. В силу этой теоремы функция $\varphi(x)$, определенная равенством

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Phi(p)}{p^2}e^{(p-\gamma)x}\,dp, \tag{2}$$

равна нулю при $x<0$. Поскольку $\Phi(p)\not\equiv 0$, функция $\varphi(x)\not\equiv 0$ при $x>0$. Далее, $\varphi(x)$ имеет производные всех порядков и

$$|\varphi^{(n)}(x)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Phi(p)}{p^2}(p-\gamma)^n e^{(p-\gamma)x}\,dp\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{CM^n m_n}{2\pi}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left|\frac{p-\gamma}{p}\right|^n\frac{|dp|}{|p^2|}\leqslant\frac{C}{2\pi}M^n m_n\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{|dp|}{|p|^2}=C'M^n m_n.$$

Мы видим, что $\varphi(x)$ принадлежит классу $C\langle m_n\rangle$. Так как $\varphi(x)=0$ при $x<0$ и $\varphi(x)\not\equiv 0$, то класс $C\langle m_n\rangle$ не квазианалитический. Итак, *проблема о квазианалитических классах эквивалентна проблеме* («проблема Ватсона») *о существовании функции* $\Phi(p)\not\equiv 0$, *аналитической в правой полуплоскости и удовлетворяющей неравенствам*

$$|p^n\Phi(p)|\leqslant CM^n m_n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

3. Преобразованием инверсии $p=\frac{2\gamma}{s}$ полуплоскость $\operatorname{Re}p>\gamma$ переводится в круг $|s-1|<1$, а проблема Ватсона приводится к следующей: при каких условиях, наложенных на последовательность m_n, существует в круге $|s-1|<1$ аналитическая функция $F(s)\not\equiv 0$, удовлетворяющая неравенствам

$$|F(s)|\leqslant|CM^n m_n|s|^n? \tag{3}$$

Предположим, что такая функция $F(s)$ имеется. Можно найти такое ρ, что $F(\rho)\neq 0$, $|F(\rho+\rho e^{i\theta})|<1$ при всех вещественных θ, причем на окружности $s=\rho+\rho e^{i\theta}$ функция $F(s)$ имеет единственный нуль при $s=0$. Все дальнейшие построения будут проходить в пределах круга $|s-\rho|\leqslant\rho$. В силу неравенств (3)

$$|F(\rho+\rho e^{i\theta})|\leqslant CM^n m_n\rho^n|1+e^{i\theta}|^n=CM^n m_n\left|2\rho\cos\frac{\theta}{2}\right|^n.$$

Переходя в правой части к минимуму по n, получим:

$$F|(\rho+\rho e^{i\theta})|\leqslant\frac{C}{\max\limits_n\dfrac{1}{M^n m_n\left|2\rho\cos\frac{\theta}{2}\right|^n}}$$

и согласно определению функции $T(r)$

$$|F(\rho+\rho e^{i\theta})| \leqslant \frac{C}{T\left(\dfrac{1}{2M\rho\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|}\right)},$$

откуда

$$\ln|F(\rho+\rho e^{i\theta})| \leqslant \ln C - \ln T\left(\frac{1}{2M\rho\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|}\right).$$

В теории аналитических функций известна следующая теорема (доказательство ее мы дадим в п. 5): если функция $F(z)$ аналитична внутри круга $|z-z_0|<h$, отлична от нуля при $z=z_0$, не превосходит по модулю 1, а в замкнутом круге $|z-z_0|\leqslant h$ непрерывна и на окружности $|z-z_0|=h$ имеет единственный нуль, то интеграл

$$-\int_0^{2\pi} \ln|f(z_0+he^{i\theta})|\,d\theta$$

имеет конечное значение.

Применяя эту теорему к рассматриваемому нами случаю, находим, что функция

$$\ln T\left(\frac{1}{2M\rho\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|}\right) \leqslant \ln C - \ln|F(\rho+\rho e^{i\theta})|$$

обладает конечным интегралом по θ в пределах от 0 до 2π. Если сделать подстановку

$$2M\rho\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{r},$$

то мы получим, что сходится интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\,\frac{1}{\sqrt{M^2\rho^2-\dfrac{1}{4r^2}}}\,dr,$$

а с ним и интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\,dr. \tag{4}$$

Итак, *если класс* $C\langle m_n\rangle$ не квазианалитичен, то интеграл (4) сходится. Этим установлена достаточность условия Карлемана в теореме 1.

4. Переходя к доказательству необходимости условия Карлемана, допустим, что интеграл (4) сходится. Вместе с ним сходится и интеграл

$$\int_0^{2\pi} \ln T\left(\frac{1}{2M\rho\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right) d\theta;$$

поэтому можно построить интеграл Пуассона

$$G(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta,$$

который представляет собой функцию, гармоническую в круге $r<1$. Положим $G(s-1)=P(s)$ и обозначим через $Q(s)$ сопряженную гармоническую функцию в круге $|s-1|<1$. Пусть, далее,

$$F(s) = e^{-\{P(s)+iQ(s)\}}.$$

Мы утверждаем, что для функции $F(s)$ выполняются неравенства

$$|F(s)| \leqslant m_n |s|^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5}$$

Действительно, неравенства (5) эквивалентны неравенствам

$$e^{-P(s)} \leqslant m_n |s|^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

или

$$-G(s) = -P(s+1) \leqslant \ln m_n + n\ln|s+1|. \tag{6}$$

Оба слагаемых справа можно представить в форме интегралов Пуассона:

$$\ln m_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\ln m_n(1-r^2)}{1-2r\cos s(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta,$$

$$n\ln|s+1| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{n\ln|e^{i\theta}+1|(1-r^2)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta,$$

и поэтому неравенство (6), подлежащее доказательству, можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi}\ln\left\{T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)m_n|1+e^{i\theta}|^n\right\}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta \geqslant 0. \tag{7}$$

Но $|1+e^{i\theta}| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$; так как

$$T(r) = \sup_{n\geqslant 0}\frac{r^n}{m_n},$$

то для каждого отдельного n

$$T(r) \geqslant \frac{r^n}{m_n}, \quad T(r)\, m_n r^n \geqslant 1,$$

и, следовательно, под знаком интеграла в (7) стоит неотрицательная функция. Отсюда следует, что неравенство (7) справедливо; вместе с ним выполняется и неравенство (5), и класс $C\langle m_n\rangle$ согласно п. 1 оказывается не квазианалитическим. Этим теорема Карлемана доказана полностью.

5. В этом пункте мы докажем теорему из теории функций комплексного переменного, которую мы использовали в п. 3.

Теорема. *Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z-z_0|<h$, отлична от нуля при $z=z_0$, по модулю не превосходит 1, непрерывна в замкнутом круге $|z-z_0|\leqslant h$ и имеет на окружности $|z-z_0|=h$ единственный нуль в точке z^*, то интеграл*

$$-\int_0^{2\pi} \ln|f(z_0+he^{i\theta})|\,d\theta$$

конечен.

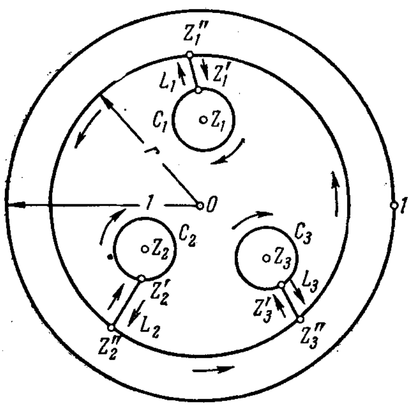

Рис. 19.

Доказательство. Без ограничения общности можно полагать $z_0=0$, $h=1$, $z^*=1$. В круге $|z|\leqslant r<1$ функция $f(z)$ аналитична и может иметь лишь конечное число корней $z_1, \ldots, z_m$; можно считать, что на окружности $|z|=r$ корни отсутствуют.

Рассмотрим замкнутый контур C, показанный на рис. 19, состоящий из дуг окружности $|z|=r$, проходимой в положительном направлении, окружностей C_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ весьма малого радиуса ε, проходимых в отрицательном направлении, и линий $L_k=[z_k'', z_k']$, соединяющих указанные дуги и проходимых дважды в противоположных направлениях. Функция $\ln f(z)$ аналитична внутри контура C, и значение $\ln f(0)$ может быть представлено формулой Коши:

$$\ln f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \ln f(z)\,\frac{dz}{z}. \tag{1}$$

Рассмотрим часть контура C, образованную окружностью C_j радиуса ε с центром в точке z_j, проходимую в отрицательном направлении. Та часть интеграла (1), которая берется по этой окружности C_j, имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} \ln f(z)\,\frac{i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta}{z_j+\varepsilon e^{i\theta}}. \tag{2}$$

Если k_j — кратность корня z_j, то $f(z)=(z-z_j)^{k_j}f_j(z)$, где $f_j(z_j)\neq 0$, и

$$|\ln f(z)|=|\ln(z-z_j)^k f_j(z)|=|k\ln(z-z_j)+\ln f_j(z)|\leqslant$$
$$\leqslant k\,|\ln|z-z_j|+2\pi|+|\ln f_j(z)|\leqslant k\,|\ln\varepsilon|+C_1.$$

В силу этой оценки подынтегральное выражение в (2) становится при $\varepsilon\to 0$ как угодно малым, и, следовательно, все интегралы по окружностям C_j стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$.

При обходе в отрицательном направлении вокруг точки z_j функция $\ln f(z)=\ln|f(z)|+i\arg f(z)$ приобретает слагаемое $-2\pi k_j i$, поэтому интеграл по части контура, образованной отрезком L_j, пройденным дважды в противоположных направлениях, равен

$$k_j\int\limits_{L_j}\frac{dz}{z}=k_j[\ln z'_j-\ln z''_j].$$

На каждом следующем участке окружности $|z|=r$ функция $\ln f(z)$ по сравнению с предыдущим приобретает слагаемое $-2\pi k_j i$, что дает во всем интеграле (1) добавку вида

$$k_j\int\limits_{z''_j}^{z''_{j+1}} i\,d\theta,$$

очевидно чисто мнимую. Имея все это в виду, отделим вещественную часть в равенстве (1) при $\varepsilon\to 0$; мы получим:

$$\ln|f(0)|=\sum_{j=1}^{m}k_j\ln|z'_j|+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta;$$

а так как $|z'_j|<1$, $\ln|z'_j|<0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta\geqslant\ln|f(0)|,$$

или, что то же,

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant-\ln|f(0)|.$$

На окружности $|z|=1$ по условию имеется единственный нуль в точке $z^*=1$. Выберем произвольно $\delta>0$; тогда, очевидно,

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant-\ln|f(0)|.$$

Оставляя δ фиксированным, перейдем в этом неравенстве к пределу при $r\to 1$; получим:

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta\leqslant-\ln|f(0)|.$$

Это неравенство справедливо при любом $\delta > 0$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем, что существует и интеграл

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

Теорема доказана.

§ 6. Преобразования Фурье в классе $L_2(-\infty, \infty)$

1. Функция $\varphi(x)$, интегрируемая в квадрате на всей оси x, вообще говоря, не интегрируема в первой степени $\left(\text{пример: } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$, поэтому она не имеет преобразования Фурье в обычном смысле. Мы покажем тем не менее, что имеет место следующее предложение (заменяющее теорему о преобразовании Фурье в классе L_1):

Теорема (Планшерель, 1910). *Для всякой функции $\varphi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ интеграл*

$$\psi_N(\sigma) = \int_{-N}^{N} \varphi(x) e^{-ix\sigma}\,dx \tag{1}$$

представляет собой функцию, принадлежащую (по σ) пространству $L_2(-\infty, \infty)$. При $N \to \infty$ функция $\psi_N(\sigma)$ в метрике $L_2(-\infty, \infty)$ имеет некоторый предел $\psi(\sigma)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma)|^2\,d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\,dx. \tag{2}$$

Если $\varphi(x)$, кроме того, принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$, то $\psi(\sigma)$ есть обычное преобразование Фурье функции $\varphi(x)$. Поэтому $\psi(\sigma)$ и в общем случае (когда $\varphi(x) \notin L_1(-\infty, \infty)$) называется преобразованием Фурье от $\varphi(x)$.

Доказательство. Рассмотрим функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ из класса S_x (§ 3, п. 4), и пусть $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ — их преобразования Фурье, принадлежащие классу S_σ. При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\sigma) e^{i\sigma x}\,d\sigma\right\} \overline{\varphi_2(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\sigma) \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\overline{\varphi_2(x)}\,dx\right\} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\sigma) \overline{\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x) e^{-i\sigma x}\,dx\right\}}\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\sigma)\overline{\psi_2(\sigma)}\,d\sigma.$$