Это неравенство справедливо при любом $\delta > 0$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем, что существует и интеграл

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

Теорема доказана.

§ 6. Преобразования Фурье в классе $L_2(-\infty, \infty)$

1. Функция $\varphi(x)$, интегрируемая в квадрате на всей оси x, вообще говоря, не интегрируема в первой степени $\left(\text{пример: } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$, поэтому она не имеет преобразования Фурье в обычном смысле. Мы покажем тем не менее, что имеет место следующее предложение (заменяющее теорему о преобразовании Фурье в классе L_1):

Теорема (Планшерель, 1910). *Для всякой функции $\varphi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ интеграл*

$$\psi_N(\sigma) = \int_{-N}^{N} \varphi(x) e^{-ix\sigma}\,dx \tag{1}$$

представляет собой функцию, принадлежащую (по σ) пространству $L_2(-\infty, \infty)$. При $N \to \infty$ функция $\psi_N(\sigma)$ в метрике $L_2(-\infty, \infty)$ имеет некоторый предел $\psi(\sigma)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma)|^2\,d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\,dx. \tag{2}$$

Если $\varphi(x)$, кроме того, принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$, то $\psi(\sigma)$ есть обычное преобразование Фурье функции $\varphi(x)$. Поэтому $\psi(\sigma)$ и в общем случае (когда $\varphi(x) \notin L_1(-\infty, \infty)$) называется преобразованием Фурье от $\varphi(x)$.

Доказательство. Рассмотрим функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ из класса S_x (§ 3, п. 4), и пусть $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ — их преобразования Фурье, принадлежащие классу S_σ. При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\sigma) e^{i\sigma x}\,d\sigma\right\}\overline{\varphi_2(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\sigma)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\overline{\varphi_2(x)}\,dx\right\}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\sigma)\overline{\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x)e^{-i\sigma x}\,dx\right\}}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\sigma)\overline{\psi_2(\sigma)}\,d\sigma.$$

Перемена порядка интегрирования, произведенная на третьем этапе, законна в силу абсолютной сходимости двойного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(\sigma)|\,|\varphi_2(x)|\,dx\,d\sigma.$$

В частности, при $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=\varphi(x)$, $\psi_1(\sigma)=\psi_2(\sigma)=\psi(\sigma)$ получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma)|^2\,d\sigma = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\,dx. \tag{3}$$

Пусть, далее, $\varphi(x)$ — интегрируемая в квадрате функция, обращающаяся в нуль при $|x|\geqslant a$. Можно образовать последовательность функций $\varphi_n(x)\in S$, обращающихся в нуль при $|x|\geqslant a$, сходящуюся к $\varphi(x)$ по метрике $L_2(-a, a)$. Так как для всякой функции $f\in L_2(-a, a)$ по неравенству Коши — Буняковского

$$\int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_{-a}^{a} 1\,dx}\,\sqrt{\int_{-a}^{a} |f(x)|^2\,dx} = \sqrt{2a}\,\sqrt{\int_{-a}^{a} |f(x)|^2\,dx},$$

то имеем:

$$\int_{-a}^{a} |\varphi(x)-\varphi_n(x)|\,dx \leqslant \sqrt{2a}\,\sqrt{\int_{-a}^{a} |\varphi(x)-\varphi_n(x)|^2\,dx} \to 0,$$

так что $\varphi_n(x)$ сходятся к $\varphi(x)$ и по метрике $L_1(-a, a)$; а поскольку и $\varphi_n(x)$ и $\varphi(x)$ обращаются в нуль при $|x|\geqslant a$, эта сходимость имеет место и по метрике $L_1(-\infty, \infty)$. Но тогда преобразования Фурье $\psi_n(\sigma)$ функций $\varphi_n(x)$ равномерно при $-\infty<\sigma<\infty$ сходятся к преобразованию Фурье $\psi(\sigma)$ функции $\varphi(x)$. Кроме того, функции $\psi_n(\sigma)$ образуют последовательность, фундаментальную в метрике $L_2(-\infty, \infty)$, так как по доказанному

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(\sigma)-\psi_m(\sigma)|^2\,d\sigma = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|^2\,dx.$$

Отсюда следует, что $\psi(\sigma)=\lim\psi_n(\sigma)$ принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma)|^2\,d\sigma = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(\sigma)|^2\,d\sigma = 2\pi\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(x)|^2\,dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\,dx.$$

В действительности пределами двух последних интегралов являются $-a$ и a.

Пусть, наконец, $\varphi(x)$ — любая функция из $L_2(-\infty, \infty)$ и $\varphi_N(x)$ равна $\varphi(x)$ при $|x| \leqslant N$ и 0 при $|x| \geqslant N$. Преобразование Фурье $\psi_N(\sigma)$ функции $\varphi_N(x)$ по доказанному принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_N(\sigma)|^2 d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(x)|^2 dx, \tag{4}$$

а также

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_N(\sigma) - \psi_M(\sigma)|^2 d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(x) - \varphi_M(x)|^2 dx. \tag{5}$$

Но последовательность $\varphi_N(x)$ сходится в метрике $L_2(-\infty, \infty)$ к функции $\varphi(x)$ и потому фундаментальна; из равенства (5) следует, что последовательность $\psi_N(\sigma)$ также фундаментальна. Обозначим $\psi(\sigma) \coloneqq \lim \psi_N(\sigma)$; из (4) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma)|^2 d\sigma = 2\pi \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_N(\sigma)|^2 d\sigma =$$
$$= 2\pi \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx. \tag{6}$$

Наконец, если $\varphi(x)$ принадлежит и $L_1(-\infty, \infty)$, то для функции $\varphi_N(x)$ мы будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(x) - \varphi(x)| \, dx \to 0,$$

откуда следует, что $\psi_N(\sigma)$ равномерно сходятся к (обычному) преобразованию Фурье функции $\varphi(x)$. Но так как в среднем $\psi_N(\sigma)$ сходятся к $\psi(\sigma)$, то $\psi(\sigma)$ и есть обычное преобразование Фурье функции $\varphi(x)$.

Тем самым теорема Планшереля полностью доказана.

Легко проверить и соотношение, несколько более общее, чем (6), именно, если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — любые функции из $L_2(-\infty, \infty)$ и $\psi_1(\sigma)$, $\psi_2(\sigma)$ — их преобразования Фурье, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\sigma) \overline{\psi_2(\sigma)} \, d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} \, dx.$$

Для доказательства достаточно применить теорему Планшереля к функции $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ и сравнить результаты справа и слева.

2. Соотношения между гладкостью функции и убыванием ее преобразования Фурье, полученные в § 3 для интегрируемых функций, сохраняют свою силу также и для квадратично интегрируемых функций.

Пусть вначале квадратично интегрируемая функция $\varphi(x)$ локально абсолютно непрерывна и ее производная $\varphi'(x)$ также квадратично интегрируема. Тогда *преобразованием Фурье функции* $\varphi'(x)$ *является произведение преобразования Фурье* $\psi(\sigma)$ *функции* $\varphi(x)$ *на* $i\sigma$.

Действительно, функция $\varphi(x)$ в данном случае при $x \to \infty$ имеет предел, поскольку

$$|\varphi(x)|^2 = \varphi(x)\overline{\varphi(x)} = \varphi(0)\overline{\varphi}(0) + \int_0^x \varphi(\xi)\overline{\varphi'(\xi)}\,d\xi + \int_0^x \varphi'(\xi)\overline{\varphi(\xi)}\,d\xi,$$

а функции $\varphi\overline{\varphi}$ и $\overline{\varphi}\varphi'$ интегрируемы на бесконечном промежутке; очевидно, что этот предел может быть только нулем.

Используя этот факт, мы построим последовательность финитных абсолютно непрерывных функций $\varphi_\nu(x)$, так что в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$

$$\varphi_\nu(x) \to \varphi(x),$$
$$\varphi'_\nu(x) \to \varphi'(x).$$

Именно, в качестве $\varphi_\nu(x)$ мы возьмем непрерывную функцию, равную $\varphi(x)$ на интервале $(-\nu, \nu)$, 0 вне интервала $U_\nu = (-\nu - |\varphi(-\nu)|, \nu + |\varphi(\nu)|)$ и линейную в двух оставшихся промежутках; поскольку $\varphi(\nu) \to 0$ при $\nu \to \pm\infty$, функция $\varphi_\nu(x)$ стремится к $\varphi(x)$ в метрике $L_2(-\infty, \infty)$. Далее, функция $\varphi'_\nu(x)$ совпадает с $\varphi'(x)$ в интервале $(-\nu, \nu)$, равна 0 вне интервала U_ν и равна ± 1 в двух оставшихся промежутках; очевидно, что $\varphi'_\nu(x)$ стремится к $\varphi'(x)$ в метрике $L_2(-\infty, \infty)$.

По теореме Планшереля в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$

$$F[\varphi_\nu(x)] = \psi_\nu(\sigma) \to F[\varphi(x)] \quad = \psi(\sigma);$$
$$F[\varphi'_\nu(x)] = i\sigma\psi_\nu(\sigma) \to F(\varphi'(x)] = \psi_1(\sigma),$$

а так как последовательность $i\sigma\psi_\nu(\sigma)$ стремится, очевидно, к функции $i\sigma\psi(\sigma)$, то мы получаем

$$\psi_1(\sigma) = F[\varphi'(x)] = i\sigma\psi(\sigma),$$

что и требовалось.

Пусть, обратно, вместе с функцией $\varphi(x)$ является квадратично интегрируемой и $x\varphi(x)$. Покажем, что *преобразование Фурье* $\psi(\sigma)$ *функции* $\varphi(x)$ *есть локально абсолютно непрерывная функция и* $F[x\varphi(x)] = i\psi'(\sigma)$. Положим $\varphi_\nu(x) = \varphi(x)$ при $|x| \leqslant \nu$ и $\varphi_\nu(x) = 0$ при $|x| > \nu$; тогда $\varphi_\nu(x) \to \varphi(x)$ в метрике $L_2(-\infty, \infty)$. Очевидно, и

$x\varphi_\nu(x) \longrightarrow x\varphi(x)$ в метрике $L_2(-\infty, \infty)$. Пусть $F[x\varphi(x)] = ig(\sigma)$; мы получаем

$$\psi_\nu(\sigma) = F[\varphi_\nu(x)] \longrightarrow F[\varphi(x)] \quad = \psi(\sigma),$$
$$i\psi'_\nu(\sigma) = F[x\varphi_\nu(x)] \longrightarrow F[x\varphi(x)] = ig(\sigma).$$

По лемме п. 6 § 3 гл. IV из последовательности $\psi_\nu(\sigma)$ можно извлечь подпоследовательность $\psi_{\nu_k}(\sigma)$, сходящуюся к $\psi(\sigma)$ почти всюду. Пусть, например, $\psi(\sigma_0) = \lim \psi_{\nu_k}(\sigma_0)$. Мы имеем далее

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} [\psi'_{\nu_k}(\xi) - \psi'_{\nu_m}(\xi)]\, d\xi = [\psi_{\nu_k}(\sigma) - \psi_{\nu_m}(\sigma)] - [\psi_{\nu_k}(\sigma_0) - \psi_{\nu_m}(\sigma_0)];$$

с другой стороны

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} |\psi'_{\nu_k}(\xi) - \psi'_{\nu_m}(\xi)|\, d\xi \leqslant \sqrt{|\sigma - \sigma_0|}\sqrt{\int_{\sigma_0}^{\sigma} |\psi'_{\nu_k}(\xi) - \psi'_{\nu_m}(\xi)|^2\, d\xi} \longrightarrow 0,$$

откуда следует, что последовательность $\psi_{\nu_k}(\sigma)$ равномерно сходится в любом конечном промежутке. Но тогда $\psi(\sigma) = \lim \psi_{\nu_k}(\sigma)$ есть уже непрерывная функция. Далее

$$\psi(\sigma) - \psi(\sigma_0) = \lim \int_{\sigma_0}^{\sigma} [\psi'_{\nu_k}(\xi)]\, d\xi = \int_{\sigma_0}^{\sigma} g(\xi)\, d\xi,$$

откуда следует, что $\psi(\sigma)$ локально абсолютно непрерывна и $\psi'(\sigma) = g(\sigma)$, что мы и утверждали.

3. Теорема Винера и Палея. Если интегрируемая в квадрате функция $\varphi(x)$ обращается в нуль вне отрезке $[-b, b]$, то ее преобразование Фурье $\psi(\sigma)$, кроме того, что оно также интегрируемо в квадрате, может быть аналитически продолжено в плоскость $s = \sigma + i\tau$. Действительно, выражение

$$\psi(s) = \int_{-b}^{b} \varphi(x)\, e^{-isx}\, dx$$

определено при всех комплексных $s = \sigma + i\tau$. Оно представляет собой аналитическую функцию от s и удовлетворяет оценке

$$|\psi(s)| \leqslant \int_{-b}^{b} |\varphi(x)|\, e^{|\tau x|}\, dx \leqslant Ce^{b|\tau|} \leqslant Ce^{b|s|}.$$

Целая аналитическая функция $\psi(s)$, удовлетворяющая неравенству

$$|\psi(s)| \leqslant Ce^{b|s|},$$

называется *функцией экспоненциального типа* $\leqslant b$. Мы видим, что преобразование Фурье квадратично интегрируемой функции, обращающейся в нуль при $|x| > b$, есть целая функция экспоненциального типа $\leqslant b$. В этом пункте мы установим обратную теорему.

Теорема (Винер — Палей). *Если целая функция $\psi(s)$ экспоненциального типа $\leqslant b$ интегрируема в квадрате по вещественной оси, то она является преобразованием Фурье интегрируемой в квадрате функции $\varphi(x)$, равной 0 вне отрезка $[-b, b]$.*

Прежде чем доказывать эту теорему, выведем оценки коэффициентов ряда Тейлора для целых функций экспоненциального типа.

Коэффициенты ряда Тейлора аналитической функции

$$\psi(s)=\sum_0^\infty a_n s^n,$$

как известно, вычисляются по формулам Коши:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=r}\frac{\psi(s)}{s^{n+1}}\,ds \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Если $\psi(s)$ — целая функция экспоненциального типа $\leqslant b$, то для чисел a_n получаются оценки

$$|a_n|\leqslant C\frac{e^{br}}{r^n} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Переходя здесь к минимуму по r, получим неравенства

$$|a_n|\leqslant C\left(\frac{eb}{n}\right)^n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{*}$$

Исходя из оценок (*), покажем, что частные суммы ряда Тейлора для функции $\psi(\sigma)$ имеют при любом $\varepsilon>0$ общую мажоранту вида $C_\varepsilon e^{(b+\varepsilon)r}$. Действительно, начиная с некоторого номера N, который можно взять между числами $2eb|s|$ и $2eb|s|+1$, выполняются неравенства

$$\frac{eb|s|}{n}\leqslant\frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\sum_N^\infty |a_n s^n|\leqslant C\sum_N^\infty\left(\frac{eb|s|}{n}\right)^n<C\sum_N^\infty\frac{1}{2^n}\leqslant C.$$

С другой стороны, величина $\left(\frac{eb|s|}{n}\right)^n$ как функция от n достигает при $n=b|s|$ максимального значения $e^{b|s|}$, как это легко проверить дифференцированием. Отсюда

$$\sum_0^\infty|a_n s^n|=\sum_0^{N-1}|a_n s^n|+\sum_N^\infty|a_n s^n|\leqslant C(2eb|s|+1)e^{b|s|}+C\leqslant C_\varepsilon e^{(b+\varepsilon)|s|}$$

при любом $\varepsilon>0$, что и требовалось.

Переходим теперь к доказательству самой теоремы 1. Пусть $\psi(s)=\sum\limits_0^\infty a_n s^n$ — целая функция, экспоненциального типа $\leqslant b$, интегрируемая в квадрате по вещественной оси, и $\varphi(x)$ — ее (обратное) преобразование Фурье; по теореме Планшереля для любой функции $u(x)\in L_2(-\infty, \infty)$ и ее преобразования Фурье $v(\sigma) \in L_2(-\infty, \infty)$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) v(\sigma) d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) u(x) dx.$$

Предположим, что $v(\sigma)$ равна нулю вне отрезка $[-c, c]$ и, следовательно, $u(x)$ есть целая аналитическая функция аргумента $z = x + iy$. В этом случае ряд

$$\psi(\sigma) v(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma^n v(\sigma) \tag{1}$$

сходится по метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$. Поэтому интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) v(\sigma) d\sigma$$

можно вычислить почленным интегрированием ряда (1); получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) v(\sigma) d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^n v(\sigma) d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n u^{(n)}(0). \tag{2}$$

Равенство (2) имеет место и в более общих предположениях, когда $v(\sigma)$ не обязательно финитная функция, а только достаточно быстро убывающая, так что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma^n v(\sigma)$ остается сходящимся по метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$. Так как для функции $\psi(\sigma)$ по доказанному все частные суммы ряда Тейлора имеют общую мажоранту вида $C_\varepsilon e^{(b+\varepsilon)|\sigma|}$ при любом $\varepsilon > 0$, то достаточно, чтобы функция $v(\sigma)$ убывала при $|\sigma| \to \infty$ быстрее, чем $e^{-c|\sigma|}$, $c > b$.

Обозначим через E_c класс функций $v(\sigma)$, удовлетворяющих неравенству

$$|v(\sigma)| \leqslant Ce^{-c|\sigma|} \qquad (c > 0).$$

Покажем, что если функция $v(\sigma)$ принадлежит E_c, то уравнения

$$w'(\sigma) \pm c_1 w(\sigma) = v(\sigma) \qquad (0 < c_1 < c)$$

имеют решение в классе E_{c_1}. Действительно, для уравнения со знаком «+» можно взять решение

$$w(\sigma) = e^{-c_1\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma} e^{c_1\lambda} v(\lambda) d\lambda.$$

Очевидно, что интеграл, стоящий справа, существует при всех σ. Далее, при $\sigma \to +\infty$ имеем:

$$|w(\sigma)| \leqslant e^{-c_1\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{c_1\lambda} |v(\lambda)| d\lambda \leqslant C_1 e^{-c_1\sigma},$$

а при $\sigma \to -\infty$

$$|w(\sigma)| \leqslant e^{-c_1\sigma} C \int_{-\infty}^{\sigma} e^{c_1\lambda} e^{c\lambda} d\lambda = Ce^{-c_1\sigma} \frac{e^{(c_1+c)\sigma}}{c_1+c} \leqslant C_2 e^{-c|\sigma|} \leqslant C_2 e^{-c_1|\sigma|},$$

так что $w(\sigma) \in E_{c_1}$. Для уравнения со знаком « — » нужно аналогичным образом рассмотреть решение

$$w(\sigma) = e^{c_1\sigma} \int_{\sigma}^{\infty} e^{-c_1\lambda} v(\lambda)\, d\lambda.$$

Рассмотрим, с другой стороны, независимо от предыдущих построений, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n u^{(n)}(0), \tag{3}$$

где числа a_n удовлетворяют неравенствам $|a_n| < C(ebn^{-1})^n$, а $u(x+iy)$ — произвольная функция, аналитическая в круге $|z| \leqslant b$. Покажем, что ряд (3) является сходящимся. Каждая функция $u(z)$, аналитическая при $|z| \leqslant b$, определена и аналитична в некотором круге $|z| \leqslant b+\varepsilon$, и по формуле Коши

$$u^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=b+\varepsilon} \frac{u(z)\, dz}{z^{n+1}},$$

откуда

$$|u^{(n)}(0)| \leqslant \frac{Cn!}{(b+\varepsilon)^n}. \tag{4}$$

Заменяя по формуле Стирлинга $n!$ на $C_1 n^{n+1/2} e^{-n}$, получим

$$|u^{(n)}(0)| \leqslant C_2 \left[\frac{n}{e(b+\varepsilon)}\right]^n \tag{5}$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|u^{(n)}(0)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} C_3 \left(\frac{eb}{n}\right)^n \left(\frac{n}{e(b+\varepsilon)}\right)^n = C_4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{b+\varepsilon}\right)^n < \infty, \tag{6}$$

что и утверждалось.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, u(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma,$$

определенный на функциях $u(x) \in L_2(-\infty, \infty)$; на тех функциях $u(x)$, которые принадлежат классу E_c, $c > b$, он может быть задан формулой (2)

$$\Phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n u^{(n)}(0).$$

Как мы показали, по этой формуле он может быть определен и на совокупности всех аналитических функций в круге $|z| \leqslant b$. При этом функционал $\Phi(u)$ непрерывен в следующем смысле: если функции $u_m(z)$ определены и аналитичны в круге $|z| \leqslant b+\varepsilon$ и во всем этом круге при $m \to \infty$ равномерно сходятся к нулю, то $\Phi(u_m) \to 0$. Это следует из самих формул (4)—(6), где в качестве постоянной C, очевидно, можно поставить величину $\max\limits_{|z| \leqslant a+\varepsilon} |u(z)|$.

Мы должны показать, что функция $\varphi(x)$ — преобразование Фурье данной функции $\psi(\sigma)$ — равна нулю при $|x| \geqslant a$. Пусть $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_m < \ldots \ldots \longrightarrow \varepsilon$ и

$$u_m(z) = \frac{\prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z}{b+\varepsilon_k}\right)^2}{\prod_{k=1}^{m} \left[1 + \left(\frac{z}{b+\varepsilon_k}\right)^2\right]} u_0(z),$$

где $u_0(z) \in L_2(-\infty, \infty)$ — некоторая целая функция, преобразование Фурье которой $v_0(\sigma)$ принадлежит классу $E_{b+\varepsilon}$.

Разлагая коэффициент при $u_0(z)$ на простейшие дроби, мы получим представление $u_m(z)$ в форме

$$u_m(z) = A_0 u_0(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{1 + \frac{iz}{b+\varepsilon_k}} u_0(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{1 - \frac{iz}{b+\varepsilon_k}} u_0(z).$$

Пусть $u_k^+(z) = \left(1 + \frac{iz}{b+\varepsilon_k}\right)^{-1} u_0(z)$, $u_k^-(z) = \left(1 - \frac{iz}{b+\varepsilon_k}\right)^{-1} u_0(z)$, $v_k^+(\sigma)$ и $v_k^-(\sigma)$ — соответствующие преобразования Фурье; мы имеем по формулам (3) п. 4 § 3:

$$v_0(\sigma) = v_k^+(\sigma) + \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{b+\varepsilon_k} v_k^+(\sigma),$$

$$v_0(\sigma) = v_k^-(\sigma) - \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{b+\varepsilon_k} v_k^-(\sigma).$$

Так как функция $v_0(\sigma)$ по условию принадлежит классу $E_{b+\varepsilon}$ и числа $b+\varepsilon_j$ меньше $b+\varepsilon$, то по доказанному v_k^+ и v_k^- принадлежат классу $E_{b+\varepsilon_k}$; отсюда следует, что функция $v_m(\sigma) = F[u_m(x)]$ принадлежит классу $E_{b+\frac{\varepsilon}{2}}$. Поэтому для функции $v_m(\sigma)$ функционал (2) принимает значение

$$\Phi(u_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) v_m(\sigma)\, d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n u_m^{(n)}(0).$$

При $m \longrightarrow \infty$ последовательность функций $u_m(z)$

а) сходится к 0 равномерно в круге $|z| \leqslant b + \frac{\varepsilon}{2}$;

б) сходится по метрике $L_2(-\infty, \infty)$ к функции, равной $u_0(x)$ при $|x| > b+\varepsilon$ и равной 0 при $|x| < b+\varepsilon$.

По доказанному $\Phi(u_m) \longrightarrow 0$. С другой стороны.

$$\Phi(u_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) u_m(x)\, dx \longrightarrow \int_{|x| \geqslant b+\varepsilon} \varphi(x) u_0(x)\, dx.$$

Отсюда

$$\int_{|x| \geqslant b+\varepsilon} \varphi(x) u_0(x)\, dx = 0.$$

Это равенство можно написать и в форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, u_0(x)\, dx = 0,$$

где $\varphi_0(x)$ равна $\varphi(x)$ при $|x| > b+\varepsilon$ и равна 0 при $|x| < b+\varepsilon$. Функция $u_0(x)$ — здесь любая целая функция, преобразование Фурье которой принадлежит классу $E_{b+\varepsilon}$. Так как совокупность таких функций полна в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$[1]), то $\varphi_0(x) \equiv 0$ (почти всюду), откуда $\varphi(x) \equiv 0$ почти всюду при $|x| > b+\varepsilon$; так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\varphi(x)$ равна нулю почти всюду при $|x| > b$, что и требовалось.

Задачи 1. Обозначим через E совокупность всех функций $\psi(\sigma)$, являющихся целыми функциями аргумента $s = \sigma + i\tau$ экспоненциального типа $\leqslant b$ и таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma)|^2\, d\sigma = 1. \tag{*}$$

Пусть G — некоторое ограниченное измеримое множество на оси σ. Показать, что

$$\theta(G) \equiv \sup_{\psi \in E} \int_G |\psi(\sigma)|^2\, d\sigma < 1.$$

Указание. Пользуясь теоремой Палея и Винера, проверить, что функции $\psi(\sigma + i\tau) \in E$ равномерно ограничены в любом круге. Из формулы Коши вывести, что и первые производные функции $\psi(s)$ ограничены в любом круге. В силу теоремы Арцела (гл. 2, § 7, задача 5) совокупность E компактна в любом круге Q. Если имеется последовательность $\psi_\nu \in E$, для которой $\int_G |\psi_\nu(\sigma)|^2\, d\sigma \to 1$, то, выбирая из нее подпоследовательность, равномерно сходящуюся в $Q \supset 2G$, получаем для предельной функции $\psi(\sigma)$ равенства

$$\int_G |\psi(\sigma)|^2\, d\sigma = 1, \qquad \int_{Q-G} |\psi(\sigma)|^2\, d\sigma = 0, \tag{*}$$

откуда $\psi(\sigma) \equiv 0$ в $Q - G$, и следовательно, $\psi(\sigma) \equiv 0$, что противоречит (*).

2 (Продолжение). Показать, что для любого множества G конечной меры

$$\theta(G) \leqslant 2b\mu G.$$

Указание. Применить к выражению $\psi(\sigma)$ через $\varphi(x)$ неравенство Коши — Буняковского.

3 (Продолжение). Показать, что результат задачи 1 сохраняется для любого множества G конечной меры (Б. П. Панеях).

Указание. $G = G_1 + G_2$, где G_1 ограничено, $2b\mu G_2 < 1$. Если $\theta(G) = 1$, то, так же как в задаче 1, можно указать последовательность $\psi_\nu(\sigma)$, сходящуюся к нулю равномерно вне G, следовательно, и на G_1 так что $\int_{G_1} |\psi_\nu(\sigma)|^2\, d\sigma \to 0$; но тогда $\theta(G_2) = 1$, что противоречит результату задачи 2.

---

[1]) В качестве функции $u_0(x)$ можно, например, взять функцию Эрмита $x^n e^{-x^2}$ (см. § 3, п. 5).

4. Показать, что преобразование Фурье $\psi(s)$ функции $\varphi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, равной нулю при $x<0$, характеризуется условием: $\psi(\sigma+i\tau)$ аналитична при $\tau<0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma+i\tau)|^2 d\sigma \leqslant C$ при всех $\tau \leqslant 0$.

Указание. Использовать теорему Планшереля для $\tau<0$.

4. **Принцип неопределенности в квантовой механике.** В квантовой механике при изучении движения материальной частицы M искомыми величинами являются не координата частицы и ее скорость, как в классической механике, а распределение вероятностей этих величин. Для простоты будем рассматривать одномерный случай. Тогда искомые функции следующие:

1) *Функция положения* $\varphi(x)$. Это — некоторая комплексная функция, определенная на оси $-\infty<x<\infty$ и удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1; \tag{1}$$

она определяет вероятность пребывания материальной частицы M (в данный момент времени) в интервале (α, β) по формуле

$$\text{Вер}\{x \in (\alpha, \beta)\} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)|^2 dx.$$

2) *Функция импульса* $\psi(p)$. Эта функция определена на оси $-\infty< p<\infty$, и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(p)|^2 dp = 2\pi. \tag{2}$$

Для импульса частицы (произведения ее массы на скорость) функция $\psi(p)$ определяет вероятность его значения в интервале (γ, δ) по формуле

$$\text{Вер}\{p \in (\gamma, \delta)\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}^{\delta} |\psi(p)|^2 dp.$$

Одна из основных аксиом квантовой механики (мы не будем вдаваться в ее физический смысл) состоит в предположении, что функция импульса есть преобразование Фурье функции положения:

$$\psi(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ipx} dx. \tag{3}$$

Зная функцию положения, мы можем написать «наиболее вероятное» значение (математическое ожидание) положения частицы:

$$\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x |\varphi(x)|^2 dx.$$

Можно считать $\xi=0$; этого всегда можно добиться сдвигом функции φ вдоль оси x. Заметим, что сдвиг вдоль оси x не изменяет величины $|\psi(p)|$, так как для любой $\varphi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-h)\, e^{-ipx}\, dx = e^{-iph} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-ipx}\, dx. \tag{4}$$

Таким же образом математическое ожидание импульса

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p\, |\psi(p)|^2\, dp \tag{5}$$

мы также можем считать равным нулю.

Оценка разброса величины x дается средним квадратичным отклонением (дисперсией)

$$\delta_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, |\varphi(x)|^2\, dx. \tag{6}$$

Чем меньше δ_x^2, тем больше уверенности, что точка M действительно находится вблизи начала координат. Таким же образом оценка разброса p дается средним квадратичным отклонением

$$\delta_p^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^2\, |\psi(p)|^2\, dp. \tag{7}$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(p)$, естественно, предполагаются такими, что существуют интегралы (6) — (7). Тем самым, в силу сказанного в п. 2, функции $\varphi'(x)$, $p'(\sigma)$ существуют и квадратично интегрируемы. Функция $x\varphi(x)\,\overline{\varphi}'(x)$ интегрируема в первой степени, а интегрируемая функция $x\varphi\overline{\varphi}$, имеющая интегрируемую производную $\varphi\overline{\varphi} + x\varphi'\overline{\varphi} + x\varphi\overline{\varphi}'$, равна на бесконечности нулю.

Имеет место неравенство

$$\delta_x^2\, \delta_p^2 \geqslant \frac{1}{4}, \tag{8}$$

которое называется *соотношением неопределенностей*. Оно показывает, что чем точнее известно положение частицы (т. е. чем меньше δ_x), тем менее точно известно значение ее импульса (т. е. тем больше δ_p) и обратно, так что не может быть функций $\varphi(x)$ и $\psi(p)$, дающих одновременно очень точные значения и положения частицы, и ее импульса.

Для доказательства соотношения (8) рассмотрим интеграл

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x\varphi(x) + \varphi'(x)|^2\, dx$$

с вещественным параметром α. Пользуясь формулой $|z|^2 = z\overline{z}$, находим:

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x\varphi + \varphi')(\alpha x\overline{\varphi} + \overline{\varphi}')\, dx =$$
$$= \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi|^2\, dx + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x(\varphi\overline{\varphi}' + \varphi'\overline{\varphi})\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'|^2\, dx.$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi|^2 dx = \delta_x^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\varphi\bar{\varphi}' + \varphi'\bar{\varphi})\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x(\varphi\bar{\varphi})'\, dx = x\varphi\bar{\varphi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2 dx = -1,$$

и по теореме Планшереля, поскольку $F|\varphi'| = ip\psi(p)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p^2 |\psi(p)|^2 dp = \delta_p^2.$$

Итак,

$$I(\alpha) = \alpha^2\delta_x^2 - \alpha + \delta_p^2. \tag{9}$$

Так как по построению $I(\alpha) \geqslant 0$, то квадратный трехчлен (9) не имеет мнимых корней и, следовательно,

$$1 - 4\delta_x^2\,\delta_p^2 \leqslant 0,$$

откуда

$$\delta_x^2\,\delta_p^2 \geqslant \frac{1}{4},$$

что и утверждалось.

§ 7. Преобразования Фурье — Стильтьеса

Формулу преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\varphi(x)\, dx \tag{1}$$

можно записать в форме интеграла Стильтьеса

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\, d\Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi$$

— абсолютно непрерывная функция с ограниченным изменением на оси $-\infty < x < \infty$.

Можно рассматривать общие интегралы вида

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\, d\Phi(x), \tag{2}$$