При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi|^2 dx = \delta_x^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\varphi\bar{\varphi}' + \varphi'\bar{\varphi})\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x(\varphi\bar{\varphi})'\, dx = x\varphi\bar{\varphi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2 dx = -1,$$

и по теореме Планшереля, поскольку $F[\varphi'] = ip\psi(p)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p^2 |\psi(p)|^2 dp = \delta_p^2.$$

Итак,

$$I(\alpha) = \alpha^2\delta_x^2 - \alpha + \delta_p^2. \qquad (9)$$

Так как по построению $I(\alpha) \geqslant 0$, то квадратный трехчлен (9) не имеет мнимых корней и, следовательно,

$$1 - 4\delta_x^2\,\delta_p^2 \leqslant 0,$$

откуда

$$\delta_x^2\,\delta_p^2 \geqslant \frac{1}{4},$$

что и утверждалось.

§ 7. Преобразования Фурье — Стильтьеса

Формулу преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\varphi(x)\, dx \qquad (1)$$

можно записать в форме интеграла Стильтьеса

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\, d\Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi$$

— абсолютно непрерывная функция с ограниченным изменением на оси $-\infty < x < \infty$.

Можно рассматривать общие интегралы вида

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\, d\Phi(x), \qquad (2)$$

где $\Phi(x)$ — уже произвольная функция с ограниченным изменением на оси $-\infty < x < \infty$. Интеграл вида (2) называется *интегралом Фурье — Стильтьеса.*

Функция $\psi(\sigma)$, определенная интегралом (2), ограничена:

$$|\psi(\sigma)| \leqslant \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma} d\Phi(x) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |d\Phi(x)| = \mathbf{V}_{-\infty}^{\infty}[\Phi].$$

Она также непрерывна; действительно,

$$|\psi(\sigma') - \psi(\sigma'')| = \int_{-A}^{A} [e^{-ix\sigma'} - e^{-ix\sigma''}]\, d\Phi(x) + \\ + \int_{|x| \geqslant A} [e^{-ix\sigma'} - e^{-ix\sigma''}]\, d\Phi(x);$$

второй из интегралов становится как угодно малым при достаточно большом A независимо от σ' и σ'', а первый при выбранном A становится как угодно малым при достаточно малой разности между σ' и σ''.

Но в отличие от интеграла Фурье — Лебега (1), интеграл Фурье — Стильтьеса (2) не стремится, вообще говоря, к нулю при $|\sigma| \to \infty$. Например, если $\Phi(x)$ отвечает массе 1, сосредоточенной в точке x_0, то

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma} d\Phi(x) = e^{-ix_0\sigma}$$

есть периодическая функция от σ.

Всякая периодическая функция $\psi(\sigma)$, разлагающаяся в ряд Фурье

$$\psi(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\sigma} \tag{3}$$

с абсолютно сходящимся рядом коэффициентов

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

может быть представлена в форме интеграла Фурье — Стильтьеса: для этого нужно производящую функцию взять кусочно-постоянной и совершающей скачок a_n при переходе через точку $x = n$. То же справедливо для более общего класса функций, который получается из (3) заменой показателя $in\sigma$ на $i\lambda_n\sigma$, где λ_n — произвольная последовательность вещественных чисел; эти функции принадлежат к классу так называемых *почти периодических функций.*

Мы продемонстрируем применение интеграла Фурье — Стильтьеса на примере доказательства одной теоремы, имеющей применения в теории вероятностей.

Назовем измеримую функцию $\varphi(\sigma)$ $(-\infty < \sigma < \infty)$ *положительно определенной*, если для любой непрерывной функции $u(x)$ и любых a, b имеет место неравенство

$$\int_a^b \int_a^b \varphi(\sigma - \eta)\, u(\sigma)\, \overline{u(\eta)}\, d\sigma\, d\eta \geqslant 0. \tag{4}$$

Примером положительно определенной функции является функция $e^{-i\sigma x}$ с фиксированным значением x; в самом деле,

$$\int_a^b \int_a^b e^{-i(\sigma-\eta)x} u(\sigma)\overline{u(\eta)}\, d\sigma\, d\eta = \int_a^b e^{-i\sigma x} u(\sigma)\, d\sigma \int_a^b e^{i\eta x}\overline{u(\eta)}\, d\eta =$$
$$= \left| \int_a^b e^{-i\sigma x} u(\sigma)\, d\sigma \right|^2 \geqslant 0.$$

Оказывается, что любая непрерывная положительно определенная функция $\varphi(\sigma)$ получается «стильтьесовским комбинированием» функций $e^{-ix\sigma}$; именно имеет место теорема:

Теорема (С. Бохнер — А. Я. Хинчин, 1932). *Каждая непрерывная положительно определенная функция* $\varphi(\sigma)$ *может быть представлена в виде*

$$\varphi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\, d\Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — *ограниченная неубывающая функция.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда положительно определенная функция $\varphi(\sigma)$ имеет, кроме того, непрерывную производную. Полагая в формуле (4) $u(\sigma) = e^{i\xi\sigma}$, $a = 0$, $b = n$, получаем:

$$\int_0^n \int_0^n \varphi(\sigma - \eta)\, e^{i\xi\sigma} e^{-i\xi\eta}\, d\sigma\, d\eta \geqslant 0,$$

или, заменяя $\sigma - \eta$ на λ,

$$\int_{-n}^{n} \varphi(\lambda)\, e^{i\lambda\xi} \left(1 - \frac{|\lambda|}{n}\right) d\lambda = f_n(\xi) \geqslant 0. \tag{5}$$

Формулу (5) можно истолковать как формулу преобразования Фурье от функции

$$\Psi_n(\lambda) = \begin{cases} \varphi(\lambda)\left(1 - \dfrac{|\lambda|}{n}\right) & (|\lambda| \leqslant n), \\ 0 & (|\lambda| > n). \end{cases}$$

Так как функция $\psi(\sigma)$, по предположению, дифференцируема, то $\Psi_n(\lambda)$ — кусочно-гладкая функция и согласно теореме § 2 (см. стр. 357) при каждом λ справедлива формула обращения

$$\Psi_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f_n(\xi)\, d\xi. \tag{6}$$

При этом

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\xi)\, d\xi = \Psi_n(0) = \psi(0).$$

Введя монотонную функцию

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} f_n(\xi)\, d\xi,$$

мы можем написать интеграл (6) в форме интеграла Стильтьеса

$$\Psi_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\, d\Phi_n(x). \tag{7}$$

При $n \to \infty$ левая часть стремится, очевидно к пределу $\psi(\lambda)$. Функции $\Phi_n(x)$ образуют последовательность, из которой по теореме Хелли (гл. VI, § 6, п. 4) можно выбрать всюду сходящуюся подпоследовательность; изменяя, если нужно, нумерацию, можно считать, что сама последовательность $\Phi_n(x)$ всюду сходится к некоторой функции $\Phi(x)$, также неубывающей и изменяющейся в тех же границах 0 и $\psi(0)$. Если бы мы применили теперь другую теорему Хелли (гл. VI, § 6, п. 3), обеспечивающую возможность предельного перехода под знаком интеграла Стильтьеса, то мы бы получили, что

$$\psi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\, d\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\, d\Phi(x),$$

и доказательство было бы завершено.

При использовании теоремы Хелли мы должны учесть, что промежуток интегрирования бесконечный и функция $e^{-i\lambda x}$ не является непрерывной в бесконечно удаленных точках. Поэтому в соответствии с замечанием 3 после теоремы Хелли мы должны проверить выполнение условия (*): для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех n

$$\operatorname*{Var}_{|x| \geq N} \Phi_n(x) \leq \varepsilon.$$

Для этого мы применим следующую лемму:

Лемма. *Пусть задано семейство функций* $\Psi_\alpha(\lambda)$ *вида*

$$\Psi_\alpha(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\, d\Phi_\alpha(x),$$

где $\Phi_\alpha(x)$ — *неубывающие функции с ограниченной вариацией. Если семейство* $\Psi_\alpha(\lambda)$ *равностепенно непрерывно при* $\lambda = 0$, *т. е. если для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое* $\delta > 0$, *что для всех* α *при* $|\lambda| < \delta$ *выполняется неравенство*

$$|\Psi_\alpha(\lambda) - \Psi_\alpha(0)| < \varepsilon,$$

то функции $\Phi_\alpha(x)$ *удовлетворяют условию* (*) (*с заменой* n *на* α).

Доказательство леммы. Из условия равностепенной непрерывности, в частности, вытекает, что при $|h| < \delta$

$$\left|\Psi_\alpha(0) - \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \Psi_\alpha(\lambda)\, d\lambda\right| = \frac{1}{2h}\left|\int_{-h}^{h} [\Psi_\alpha(0) - \Psi_\alpha(\lambda)]\, d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |\Psi_\alpha(0) - \Psi_\alpha(\lambda)|\, d\lambda < \varepsilon.$$

Далее, имея h, найдем A так, чтобы при $|x| > A$ иметь $\left|\frac{\sin hx}{hx}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ $\left(\text{достаточно положить } A = \frac{1}{h}\right)$; тогда мы получим:

$$\varepsilon > \Psi_\alpha(0) - \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \Psi_\alpha(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} d\,\Phi_\alpha(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e^{i\lambda x}\, d\lambda\right\} d\Phi_\alpha(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{\sin hx}{hx}\right] d\Phi_\alpha(x) \geqslant \int_{|x| \geqslant A} \left[1 - \frac{\sin hx}{hx}\right] d\Phi_\alpha(x) \geqslant \frac{1}{2}\int_{|x| \geqslant A} d\Phi_\alpha(x),$$

и условие (*), таким образом, выполнено, что и требовалось.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Мы видим, что нам остается проверить равностепенную непрерывность в точке $\lambda = 0$ совокупности функций $\Psi_n(\lambda)$, фигурирующих в равенстве (7). Но каждая из этих функций получается из фиксированной непрерывной функции $\varphi(\lambda)$ умножением на функцию $1 - \left(\frac{|\lambda|}{n}\right)$, которая при $n \to \infty$ приближается равномерно к 1. Ясно, что условие равностепенной непрерывности в таком случае выполняется. Тем самым теорема Бохнера — Хинчина у нас доказана, — пока еще для случая, когда функция $\varphi(\sigma)$ дифференцируема.

Пусть теперь положительно определенная функция $\varphi(\sigma)$ только непрерывна. Построим *симметрическое усреднение функции* $\varphi(\sigma)$:

$$\varphi^h(\sigma) \equiv S_h\varphi(\sigma) \equiv \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi(\sigma+\xi)\,d\xi = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi(\sigma-\xi)\,d\xi = \frac{1}{2h}\int_{\sigma-h}^{\sigma+h}\varphi(\eta)\,d\eta.$$

Очевидно, что функция $\varphi^h(\sigma)$ имеет и непрерывную производную. Проверим, что двойное симметрическое усреднение функции $\varphi(\sigma)$

$$S_hS_h\varphi(\sigma) = \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\varphi(\sigma+\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{8}$$

есть снова положительно определенная функция. Действительно,

$$\iint S_hS_h\varphi(\sigma-\tau)\,u(\sigma)\,\overline{u(\tau)}\,d\sigma\,d\tau =$$
$$= \frac{1}{4h^2}\iiiint \varphi(\sigma-\tau+\xi+\eta)\,u(\sigma)\,\overline{u(\tau)}\,d\sigma\,d\tau\,d\xi\,d\eta =$$
$$= \frac{1}{4h^2}\iiiint \varphi(\sigma'-\tau')\,u(\sigma'-\xi)\,\overline{u(\tau'+\eta)}\,d\sigma'\,d\tau'\,d\xi\,d\eta =$$
$$= \iint \varphi(\sigma'-\tau')\left\{\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u(\sigma'-\xi)\,d\xi\right\}\left\{\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\overline{u(\tau'+\eta)}\,d\eta\right\}d\sigma'\,d\tau' =$$
$$= \iint \varphi(\sigma'-\tau')\,v(\sigma')\,\overline{v(\tau')}\,d\sigma'\,d\tau' \geqslant 0,$$

где положено

$$v(\sigma) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u(\sigma-\xi)\,d\xi = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u(\sigma+\eta)\,d\eta.$$

Применяя доказанную теорему для двойного симметрического усреднения $\varphi^{hh}(\sigma) = S_hS_h\varphi(\sigma)$ функции $\varphi(\sigma)$, мы получаем:

$$\varphi^{hh}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\,d\Phi_h(x), \tag{9}$$

где $\Phi_h(\sigma)$ — неубывающая функция, изменяющаяся в пределах от 0 до $\varphi^{hh}(0)$. Семейство функций $\varphi^{hh}(\sigma)$ равностепенно непрерывно при $\sigma = 0$; действительно, мы имеем:

$$|\varphi^{hh}(\sigma) - \varphi^{hh}(0)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}|\varphi(\sigma+\xi+\eta) - \varphi(\xi+\eta)|\,d\xi\,d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\substack{|\xi|\leqslant h\\|\eta|\leqslant h}}|\varphi(\sigma+\xi+\eta) - \varphi(\xi+\eta)|,$$

и дело сводится к равномерной непрерывности в окрестности нулевой точки самой функции $\psi(\sigma)$.

Устремим теперь h к 0. Функции $\psi^{hh}(\sigma)$ будут иметь пределом значение $\psi(\sigma)$. Из последовательности $\Phi_h(x)$ можно выбрать подпоследовательность — можно считать, что это сама последовательность $\Phi_h(x)$, — сходящуюся всюду к неубывающей функции $\Phi(x)$, изменяющейся в границах от 0 до $\psi(0)$. Используя снова доказанную выше лемму, мы получаем возможность еще раз применить теорему Хелли на промежутке $-\infty < x < \infty$ и получить таким образом из (9) равенство

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\, d\Phi(\sigma). \tag{10}$$

Тем самым теорема Бохнера — Хинчина полностью доказана.

Замечание. Более точный анализ показывает, что требование непрерывности положительно определенной функции в условии теоремы Бохнера — Хинчина излишне. Теорема остается справедливой и в предположении, что положительно определенная функция $\psi(\sigma)$ *измерима*; представление (10) оказывается при этом справедливым почти всюду. Как следствие получается, что всякая измеримая положительно определенная функции может быть преобразована в непрерывную изменением своих значений на множестве меры нуль.

§ 8. Преобразование Фурье в случае нескольких независимых переменных

В задачах математической физики часто приходится иметь дело с преобразованием Фурье функций нескольких переменных. Мы рассмотрим в этом параграфе простейшие факты, относящиеся к этому преобразованию.

Пусть $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — интегрируемая функция n переменных $x_1, \ldots, x_n$ во всем n-мерном пространстве R_n. *Преобразованием Фурье функции* $\varphi(x)$ называется функция

$$\psi(\sigma) = \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \\ = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} e^{-i(x_1\sigma_1 + \ldots + x_n\sigma_n)} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n \tag{1}$$

или в символической записи

$$\psi(\sigma) = \int_{R_n} e^{-i(x,\sigma)} \varphi(x)\, dx.$$

Если $\varphi(x)$ есть произведение функций $\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)$, интегрируемых каждая по своему переменному, то n-кратный интеграл (1)