и дело сводится к равномерной непрерывности в окрестности нулевой точки самой функции $\psi(\sigma)$.

Устремим теперь h к 0. Функции $\psi^{hh}(\sigma)$ будут иметь пределом значение $\psi(\sigma)$. Из последовательности $\Phi_h(x)$ можно выбрать подпоследовательность — можно считать, что это сама последовательность $\Phi_h(x)$, — сходящуюся всюду к неубывающей функции $\Phi(x)$, изменяющейся в границах от 0 до $\psi(0)$. Используя снова доказанную выше лемму, мы получаем возможность еще раз применить теорему Хелли на промежутке $-\infty < x < \infty$ и получить таким образом из (9) равенство

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}\, d\Phi(\sigma). \tag{10}$$

Тем самым теорема Бохнера — Хинчина полностью доказана.

Замечание. Более точный анализ показывает, что требование непрерывности положительно определенной функции в условии теоремы Бохнера — Хинчина излишне. Теорема остается справедливой и в предположении, что положительно определенная функция $\psi(\sigma)$ *измерима*; представление (10) оказывается при этом справедливым почти всюду. Как следствие получается, что всякая измеримая положительно определенная функции может быть преобразована в непрерывную изменением своих значений на множестве меры нуль.

§ 8. Преобразование Фурье в случае нескольких независимых переменных

В задачах математической физики часто приходится иметь дело с преобразованием Фурье функций нескольких переменных. Мы рассмотрим в этом параграфе простейшие факты, относящиеся к этому преобразованию.

Пусть $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — интегрируемая функция n переменных $x_1, \ldots, x_n$ во всем n-мерном пространстве R_n. *Преобразованием Фурье функции* $\varphi(x)$ называется функция

$$\psi(\sigma) = \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \\ = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} e^{-i(x_1\sigma_1 + \ldots + x_n\sigma_n)} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n \tag{1}$$

или в символической записи

$$\psi(\sigma) = \int_{R_n} e^{-i(x,\sigma)} \varphi(x)\, dx.$$

Если $\varphi(x)$ есть произведение функций $\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)$, интегрируемых каждая по своему переменному, то n-кратный интеграл (1) приводится к произведению n однократных интегралов:

$$\psi(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x_1)e^{-ix_1\sigma_1}dx_1\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x_n)e^{-ix_n\sigma_n}dx_n=\psi_1(\sigma_1)\ldots\psi_n(\sigma_n),$$

где $\psi_k(\sigma_k)$ есть обычное преобразование Фурье функции $\varphi_k(x_k)$.

В общем случае многократный интеграл (1) по теореме Фубини можно записать в форме повторного интеграла

$$\psi(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\ldots\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,\ldots,x_n)e^{-ix_1\sigma_1}dx_1\right\}e^{-ix_2\sigma_2}dx_2\right\}\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\right\}e^{-ix_n\sigma_n}dx_n.$$

Каждая из фигурных скобок определяет преобразование Фурье по одной координате при фиксированных остальных. Обращая последовательно каждую из этих операций, формально получаем:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\ldots\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)e^{ix_n\sigma_n}d\sigma_n\right)\right\}\times$$
$$\times e^{ix_{n-1}\sigma_{n-1}}d\sigma_{n-1}\ldots\right\}e^{ix_1\sigma_1}d\sigma_1$$

или в форме n-кратного интеграла

$$\varphi(x)=\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\ldots\int\psi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)e^{i(x,\sigma)}d\sigma_1\ldots d\sigma_n. \quad (2)$$

Так как функция $\psi(\sigma)$, вообще говоря, не является абсолютно интегрируемой в R_n, то формула (2) может иметь смысл только при указании способа вычисления интеграла в правой части. Мы ниже укажем несколько возможных интерпретаций интеграла (2).

Теорема. *Предположим, что функция* $\varphi(x)=\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ *удовлетворяет условиям*:

$$|\varphi(x_1+t_1,x_2,\ldots,x_n)-\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)|\leqslant C|t_1|^\alpha, \quad (3_1)$$
$$|\varphi(x_1,x_2+t_2,x_3,\ldots,x_n)-\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)|\leqslant C(x_1)|t_2|^\alpha, \quad (3_2)$$

. . . .

$$|\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n+t_n)-\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)|\leqslant$$
$$\leqslant C(x_1,\ldots,x_{n-1})|t_n|^\alpha, \quad (3_n)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}C(x_1)dx_1<\infty,\ \ldots,\ \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}C(x_1,\ldots,x_{n-1})dx_1\ldots dx_{n-1}<\infty$$
$$(0<\alpha\leqslant 1).$$

Тогда формула (2) *справедлива, если ее понимать как результат* *последовательных переходов к пределу при* $N_n \to \infty, \ldots, N_1 \to \infty$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{N_1\to\infty} \int\limits_{-N_1}^{N_1} \left\{ \ldots \lim_{N_{n-1}\to\infty} \int\limits_{-N_{n-1}}^{N_{n-1}} \left\{ \lim_{N_n\to\infty} \int\limits_{-N_n}^{N_n} \psi(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times\, e^{ix_n\sigma_n} d\sigma_n \right\} e^{ix_{n-1}\sigma_{n-1}} d\sigma_{n-1} \ldots \right\} e^{ix_1\sigma_1} d\sigma_1. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим

$$\varphi_1(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) e^{-ix_1\sigma_1} dx_1.$$

В силу теоремы Фубини функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ суммируема по x_1 почти при всех $x_2, \ldots, x_n$.

Из условия $(З_1)$ и теоремы п. 2 § 2 вытекает, что справедлива формула обращения

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{N_1\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N_1}^{N_1} \varphi_1(\sigma_1, x_2 \ldots, x_n) e^{ix_1\sigma_1} d\sigma_1.$$

Функция $\varphi_1(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n)$ почти при всех $x_3, \ldots, x_n$ суммируема по x_2 и удовлетворяет условию

$$|\varphi_1(\sigma_1, x_2 + t_2, \ldots, x_n) - \varphi_1(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x_1, x_2 + t_2, \ldots, x_n) - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \, dx_1 \leqslant$$
$$\leqslant |t_2|^\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(x_1)\, dx_1 \leqslant C_2 |t_2|^\alpha,$$

вытекающему из $(З_2)$. Поэтому для функции

$$\varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n) e^{-ix_2\sigma_2} dx_2$$

справедлива формула обращения

$$\varphi_1(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{N_2\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N_2}^{N_2} \varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, x_2, \ldots, x_n) e^{ix_2\sigma_2} d\sigma_2,$$

откуда

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \lim_{N_1\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N_1}^{N_1} \left\{ \lim_{N_2\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N_2}^{N_2} \varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \ldots, x_n) e^{ix_2\sigma_2} d\sigma_2 \right\} e^{ix_1\sigma} d\sigma_1.$$

Продолжая таким образом далее, в конце концов придем к искомой формуле (4).

Условия теоремы 1 выполняются, например, если у интегрируемой функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ существуют частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots$ $\ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$, первая из которых ограничена постоянной, вторая — интегрируемой функцией от x_1, третья — интегрируемой функцией от x_1 и x_2 и т. д.

Существуют и другие способы сведения n-кратного интеграла к повторным. Рассмотрим здесь выражение преобразования Фурье в сферических координатах. В сферических координатах интегрирование ведется вначале при фиксированном $r > 0$ по сфере радиуса r с центром в начале координат и затем по r от 0 до ∞. Обозначим через $d\omega$ элемент единичной сферы Ω_1; тогда элемент сферы Ω_r радиуса r будет иметь вид $r^{n-1}\, d\omega$. Выражение (1) преобразуется к виду

$$\psi(\sigma) = \int_0^\infty \left\{ \int_{\Omega_r} e^{-i\rho r\cos\theta} \varphi(r;\ \omega)\, d\omega \right\} r^{n-1}\, dr.$$

Здесь ω означает направление из начала координат, или, если угодно, точку единичной сферы; $\varphi(r;\ \omega)$ — значение функции $\varphi(x)$ в точке пересечения луча ω и сферы Ω_r; ρ есть $|\sigma|$, а θ — угол между направлениями векторов x и σ.

Особенно простой вид приобретает эта формула в случае, когда функция φ зависит только от r, т. е. является сферически симметричной. В этом случае $\varphi(r, \omega) = \varphi(r)$ и мы имеем:

$$\psi(\sigma) = \int_0^\infty \left\{ \int_{\Omega_r} e^{-i\rho r\cos\theta}\, d\omega \right\} \varphi(r)\, r^{n-1}\, dr. \qquad (5)$$

Внутренний интеграл можно вычислить до конца. Рассмотрим сначала случай $n = 3$; тогда, принимая направление вектора σ за полярную ось, будем иметь:

$$d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\alpha,$$

где α — полярный угол в плоскости, ортогональной вектору σ; в результате получим:

$$\int_{\Omega_r} e^{-i\rho r\cos\theta} \sin\theta\, d\theta\, d\alpha = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} e^{-i\rho r\cos\theta} \sin\theta\, d\theta \right\} d\alpha = \frac{2\pi}{i\rho r} e^{-i\rho r\cos\theta} \Big|_0^{\pi} = \ldots \frac{\ldots \rho r}{\rho r}$$

и в итоге

$$\psi(\sigma) = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^\infty \varphi(r)\, r \sin\rho r\, dr.$$

В общем случае, при произвольном n, внутренний интеграл в (5) выражается через бесселевы функции[1])

$$\int\limits_{\Omega_r} e^{-i\rho r\cos\theta}\,d\omega = (2\pi)^{\frac{n}{2}-1}(\rho r)^{1-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r) \tag{6}$$

и поэтому полностью преобразование Фурье сферически симметричной функции записывается в виде

$$\psi(\sigma) = \left(\frac{2\pi}{\rho}\right)^{\frac{n}{2}-1}\int\limits_0^\infty \varphi(r)J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r)r^{\frac{n}{2}}\,dr. \tag{7}$$

Из формулы (7) можно сделать несколько неожиданный вывод: преобразование Фурье сферически симметричной функции в n-мерном пространстве при $n\geqslant 3$ есть дифференцируемая функция (для $\rho\neq 0$), и притом порядок ее дифференцируемости возрастает вместе с n. Действительно, функция $\varphi(r)$ является интегрируемой в n-мерном пространстве, если существует интеграл

$$\int\limits_0^\infty |\varphi(r)|\,r^{n-1}\,dr.$$

В интеграле (7) каждое формальное дифференцирование по ρ приводит к новому множителю r под знаком интеграла: так как при больших $r\,|J_{n/2-1}(\rho r)|\leqslant \leqslant Cr^{-1/2}$, то умножение на r под знаком интеграла допустимо по крайней мере до тех пор, пока общий показатель при r остается не превосходящим $n-\frac{1}{2}$, т. е. по крайней мере $\left[n-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]$ раз. Следовательно, функция $\psi(\sigma)$ имеет производные (по ρ) по крайней мере до порядка $\left[\frac{n-1}{2}\right]$. При $n=3$ функция $\psi(\sigma)$ дифференцируема, по крайней мере один раз.

Рассмотрим формулу обращения интеграла Фурье

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R_n}\cdots\int \psi(\sigma)e^{i(\sigma,x)}\,d\sigma$$

и попробуем придать ей смысл, интегрируя сначала по шару $|\sigma|\leqslant R$ и затем устремляя R к ∞. Положим:

$$\varphi_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{|\sigma|\leqslant R}\cdots\int \psi(\sigma)e^{i(\sigma,x)}\,d\sigma.$$

Подставляя выражение $\psi(\sigma)$ из (1) и изменяя порядок интегрирования по x и σ (что возможно в силу абсолютной и равномерной по σ сходимости n-кратного интеграла (1)), получим:

$$\varphi_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R_n}\varphi(\xi)\left\{\int\limits_{|\sigma|\leqslant R} e^{i(\xi-x,\sigma)}\,d\sigma\right\}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R_n}\varphi(\xi)H_R(\xi)\,d\xi.$$

---

[1]) См., например, Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1 Гостехиздат, 1951, гл. VII.

Внутренний интеграл преобразуем к сферическим координатам

$$H_R(\xi)=\int\limits_{|\sigma|\leqslant R} e^{i(\xi-x,\,\sigma)}d\sigma=\int\limits_0^R \rho^{n-1}\left\{\int\limits_{\Omega_\rho} e^{i|\xi-x|\rho\cos\theta}\,d\omega\right\}d\rho=$$

$$=\int\limits_0^R \rho^{n-1}(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}(\rho r)^{1-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r)\,d\rho=$$

$$=(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}r^{1-\frac{n}{2}}\int\limits_0^R \rho^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r)\,d\rho \qquad (r=|x-\xi|)$$

в соответствии с формулой (6). Далее, заменяя ρr на τ, получим:

$$H_R(\xi)=(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}r^{-n}\int\limits_0^{Rr}\tau^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(\tau)\,d\tau.$$

Согласно одной из формул теории бесселевых функций

$$\tau^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(\tau)=\frac{d}{d\tau}\left(\tau^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(\tau)\right),$$

и, следовательно,

$$H_R(\xi)=(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}r^{-n}(Rr)^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(Rr)=(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}|\xi-x|^{-\frac{n}{2}}R^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(Rr).$$

Для величины $\varphi_R(x)$ мы получаем выражение

$$\varphi_R(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}\int\varphi(\xi)\,|\xi-x|^{-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(R|\xi-x|)\,d\xi=$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}-1}R^{\frac{n}{2}}\int\varphi(\xi+x)\,|\xi|^{-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(R|\xi|)\,d\xi. \tag{8}$$

В последнем интеграле по ξ произведем сначала интегрирование по сфере $|\xi|=r$. Для этого обозначим:

$$\Phi(r,x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_\Omega\varphi(x+\omega r)\,d\omega. \tag{9}$$

Эта величина есть среднее значение функции φ на сфере радиуса r с центром в точке x. Интеграл (8) теперь приводится к виду

$$\varphi_R(x)=CR^{\frac{n}{2}}\int\limits_0^\infty\Phi(r,x)\,r^{\frac{n}{2}-1}J_{\frac{n}{2}}(Rr)\,dr=C\int\limits_0^\infty\Phi\left(\frac{\tau}{R},x\right)J_{\frac{n}{2}}(\tau)\,\tau^{\frac{n}{2}-1}\,d\tau.$$

Положим:

$$f(\tau)=\begin{cases}\Phi(x,\tau)\,\tau^{\frac{n}{2}-1} & \text{при } n \text{ четном,}\\ \Phi(x,\tau)\,\tau^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} & \text{при } n \text{ нечетном;}\end{cases}$$

тогда мы получим, обозначая через m целое число $\frac{n}{2}-1$ или $\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$,

$$\varphi_R(x)=CR^m\int\limits_0^\infty f\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^*(\tau)\,d\tau, \tag{10}$$

где

$$J_m^*(\tau)=\begin{cases}J_{\frac{n}{2}}(\tau) & \text{при } n \text{ четном,}\\ \dfrac{J_{\frac{n}{2}}(\tau)}{\sqrt{\tau}} & \text{при } n \text{ нечетном.}\end{cases}$$

Бесселева функция $J_{\frac{n}{2}}(\tau)$, как известно, ограничена при $\tau\to 0$, а на бесконечности имеет вид

$$J_{\frac{n}{2}}(\tau)=a_0\frac{e^{i\frac{n}{2}\tau}}{\sqrt{\tau}}+H(\tau),$$

где $H(\tau)$ абсолютно интегрируема. Отсюда следует, что $J_{\frac{n}{2}}(\tau)$ обладает конечным интегралом на $(0,\infty)$ (условно сходящимся при $\tau\to\infty$). Положим:

$$J^1_{\frac{n}{2}}(x)=\int\limits_x^\infty J_{\frac{n}{2}}(\tau)\,d\tau.$$

Асимптотика функции $J^1_{\frac{n}{2}}(x)$ при $x\to\infty$ такова же, как и у $J_{\frac{n}{2}}(x)$. Действительно, при любом $r>0$ интегрированием по частям находим:

$$\int\limits_x^\infty\frac{e^{ia\tau}}{\tau^r}\,d\tau=\frac{e^{iar}}{ia\tau^r}\Bigg|_x^\infty-\int\limits_x^\infty\frac{re^{ia\tau}\,d\tau}{ia\tau^{r+1}}=-\frac{e^{iax}}{iax^r}+\theta\frac{C}{x^{r+1}}\ (|\theta|\leqslant 1),$$

что обеспечивает абсолютную интегрируемость второго слагаемого при $x\to\infty$. Ограниченность $J^1_{\frac{n}{2}}(x)$ при $x\to 0$ имеет место в силу сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty J_{\frac{n}{2}}(x)\,dx$. Можно построить функции

$$J^2_{\frac{n}{2}}(x)=\int\limits_x^\infty J^1_{\frac{n}{2}}(\tau)\,d\tau,\quad J^3_{\frac{n}{2}}(x)=\int\limits_x^\infty J^2_{\frac{n}{2}}(\tau)\,d\tau,\ \ldots;$$

все они обладают теми же асимптотическими свойствами, что $J_{\frac{n}{2}}(x)$. То же относится к функции $J_m^*(x)$.

После этих предварительных замечаний сформулируем теорему.

Теорема (С. Бохнер, 1932). *Если функция* $f(\tau)=\tau^m\Phi(\tau, x)$ (см. (9)) *ограничена, непрерывна и абсолютно интегрируема* (*от* 0 до ∞) *и имеет ограниченное изменение вместе с производными до порядка* m, *то при каждом* x

$$\varphi(x)=\lim_{R\to\infty}\varphi_R(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|\sigma|\leqslant R}\psi(\sigma)e^{i(\sigma, x)}\,d\sigma. \qquad (11)$$

Доказательство. Интегрируя по частям соотношение (10), получаем:

$$\int\limits_0^\infty f\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^*(\tau)\,d\tau=f\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^{*1}(\tau)\Big|_0^\infty-\frac{1}{R}\int\limits_0^\infty f'\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^{*1}(\tau)\,d\tau.$$

Так как функция $f(\tau)$ имеет при $\tau=0$ нуль порядка не ниже m и ограничена при $x\to\infty$, то внеинтегральный член обращается в нуль. Повторяя интегрирование по частям, получим:

$$(-1)^m R^m\int\limits_0^\infty f\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^*(\tau)\,d\tau=\int\limits_0^\infty f^{*(m)}\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^{*m}(\tau)\,d\tau.$$

Разобьем полученный интеграл на две части:

$$\int\limits_0^\infty=\int\limits_0^N+\int\limits_N^\infty.$$

При $R\to\infty$ на основании общих теорем о предельном переходе под знаком интеграла

$$\int\limits_0^N f^{(m)}\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^{*m}(\tau)\,d\tau\longrightarrow\int\limits_0^N f^{(m)}(0)\,J_m^{*(m)}(\tau)\,d\tau=C_m f^{(m)}(0).$$

Второй из интегралов допускает оценку

$$\left|\int\limits_N^\infty f^{(m)}\left(\frac{\tau}{R}\right)J_m^{*m}(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\left|C\int\limits_N^\infty f^{(m)}\left(\frac{\tau}{R}\right)\frac{e^{ia\tau}}{\tau^p}\,d\tau\right|+\left|\int\limits_N^\infty f^{(m)}\left(\frac{\tau}{R}\right)H(\tau)\,d\tau\right|,$$

где $H(\tau)$ — абсолютно интегрируемая функция, $p=\frac{1}{2}$ или 1. Так как $f^{(m)}(x)$ имеет ограниченное изменение, то можно записать:

$$f^{(m)}(x)=A(x)-B(x),$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — неотрицательные ограниченные неубывающие функции. Поэтому

$$\left|\int_N^\infty f^{(m)}\left(\frac{\tau}{R}\right)\frac{e^{ia\tau}}{\tau^p}\,d\tau\right| \leqslant \left|\int_N^\infty A\left(\frac{\tau}{R}\right)\frac{e^{ia\tau}}{\tau^p}\,d\tau\right| + \left|\int_N^\infty B\left(\frac{\tau}{R}\right)\frac{e^{ia\tau}}{\tau^p}\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant A\left(\frac{N}{R}\right)\frac{1}{N^p 2\pi a} + B\left(\frac{N}{R}\right)\frac{1}{N^p 2\pi a} \longrightarrow 0$$

при $N \to \infty$ независимо от значения R. Отсюда следует, что

$$R^m \int_0^\infty f\left(\frac{\tau}{R}\right) j_m^*(\tau)\,d\tau \longrightarrow f^{(m)}(0)\,C_m.$$

Итак

$$\lim \varphi_R(x) = f^{(m)}(0)\,C'_m = \varphi(x)\,C''_m \tag{12}$$

с некоторой постоянной C''_m. Но так как для некоторых функций, например e^{-x^2}, соотношение (12) верно с $C''_m = 1$, то, значит, для всех $\varphi(x)$ постоянная C''_m равна единице. Теорема доказана.

Замечание. Условия этой теоремы выполнены, например, если предположить, что сама функция $\varphi(x)$ имеет производные до порядка $m = \left[\frac{n}{2} - 1\right]$, абсолютно интегрируемые по всему пространству. Это следует непосредственно из формулы (9), если учесть, что существуют интегралы

$$\int_0^\infty \frac{1}{\omega_n}\left\{\int_\Omega \frac{\partial^k \varphi(x+\omega r)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\,d\omega\right\} r^{n-1}\,dr.$$

Рассмотрим теперь вопрос о суммируемости n-кратного интеграла Фурье методом средних арифметических. Для этого от выражения

$$\varphi_\rho(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\rho}^{\rho}\ldots\int_{-\rho}^{\rho}\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\,e^{i(x,\sigma)}\,d\sigma =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\ldots\int\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\left\{\int\ldots\int e^{i(x-\xi,\sigma)}\,d\sigma\right\}d\xi =$$
$$= \frac{1}{\pi^n}\int\ldots\int\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\prod\frac{\sin(x_j-\xi_j)}{x_j-\xi_j}\,d\xi$$

перейдем к среднему на интервале $0 \leqslant \rho \leqslant R$:

$$\sigma_R(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{R^n}\int_0^R \varphi_\rho(x_1, \ldots, x_n)\,d\rho =$$
$$= \frac{1}{\pi^n}\frac{1}{R^n}\int\varphi(x+t)\prod_{j=1}^n\frac{\sin^2 R\frac{t_j}{2}}{t_j^2}\,dt_1, \ldots, dt_n.$$

Ядро Фейера

$$\Phi(R, t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \frac{R}{2} t_j}{t_j^2}$$

есть произведение n одномерных ядер Фейера вида $\dfrac{\sin^2 \frac{R}{2} t}{t^2}$. Оно обладает следующими свойствами:

а) $\Phi(R, t) \geqslant 0;$

б) $\int \ldots \int \Phi(R, t)\, dt = 1;$

в) $\int\limits_{|t| \geqslant \delta} \ldots \int \Phi(R, t)\, dt \longrightarrow 0,$ когда $R \longrightarrow \infty.$

Последнее эквивалентно предельному соотношению

$$\int\limits_{\substack{|t_j| \leqslant \delta_j \\ j=1, 2, \ldots, n}} \Phi(R, t)\, dt = \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{|t_j| \leqslant \delta_j} \frac{\sin^2 \frac{Rt_j}{2}}{t_j^2} dt_j \longrightarrow 1,$$

а это последнее имеет место в силу выполнения данного свойства для каждого из ядер от одного переменного.

Из свойств а) — в), так же как и для одного переменного, следует, что

$$\varphi_R(x) \longrightarrow \varphi(x), \tag{13}$$

если функция $\varphi(x)$ непрерывна.

Более общим образом: если $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит некоторому нормированному пространству $E \in L_1(R)$ и непрерывна относительно сдвига в этом пространстве, т. е.

$$\lim_{t \to 0} \| \varphi(x_1 + t_1, \ldots, x_n + t_n) - \varphi(x_1, \ldots, x_n) \| = 0,$$

то соотношение (3) имеет место по норме пространства:

$$\| \varphi(x) - \varphi_R(x) \| \longrightarrow 0.$$

Эта последняя теорема, как и в случае одного переменного, в применении к пространству всех интегрируемых функций приводит к теореме единственности преобразования Фурье: *если у двух интегрируемых функций* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *преобразования Фурье* $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ *тождественно совпадают, то* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *совпадают почти всюду.*

Можно и для случая n независимых переменных определить класс S (§ 3); он состоит из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, для которых при любых $k_1, \ldots, k_n, q_1, \ldots, q_n$

величины

$$\left| x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}}{\partial x_1^{q_1}+\ldots+dx_n^{q_n}} \right|$$

ограничены во всем пространстве. Этот класс, как и в случае одного переменного, после преобразования Фурье переходит в себя.

Наконец, на случай n переменных переносится и вся L_2-теория (§ 6): если функция $\varphi(x)$ интегрируема в квадрате по R_n, то ее преобразование Фурье, определенное по формуле

$$\psi(\sigma) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \ldots \int_{-N}^{N} \varphi(x)\, e^{-i(x,\sigma)}\, dx$$

(предельный переход по метрике пространства квадратично интегрируемых функций от σ), существует, принадлежит L_2 и

$$\int \ldots \int |\psi(\sigma)|^2 d\sigma = (2\pi)^n \int \ldots \int |\varphi(x)|^2 dx.$$

Имеет место также аналог теоремы Палея и Винера, а также теоремы Бохнера—Хинчина о представлении положительно определенных функций (§ 7).

Задачи. 1. Доказать, что преобразование Фурье от функции

$$e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k}$$

с положительно определенной квадратичной формой в показателе равно

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{D}}\, e^{\frac{D(\sigma)}{4D}},$$

где

$$D = \det \| a_{jk} \|, \quad D(\sigma) = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_1 & \ldots & \sigma_n \\ \sigma_1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_n & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Указание. Преобразовать квадратичную форму ортогональным преобразованием к каноническому виду.

2. Найти преобразование Фурье от функции e^{-ar} $\left(r = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2}\right)$.

Отв.

$$F(e^{-ar}) = \frac{2^n \pi^{\frac{n+1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\sqrt{a^2+\rho^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad \left(\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}\right).$$

Заключительное замечание. Ряды и интегралы Фурье как средство решения задач математической физики ведут свое начало от работ Ж.-Б. Фурье (франц. математик, 1768—1830), систематизированных в книге «Аналитическая теория тепла» (1822). Преобразование Лапласа применялось еще Эйлером (1737) для решения дифференциальных уравнений; П.-С. Лаплас (франц. математик, астроном и физик, 1749—1827) развил это преобразование и широко использовал в книге «Аналитическая теория вероятностей» (1812). Преобразования Фурье и Лапласа являются одним из основных средств математической физики XIX и XX вв. Проблема представимости произвольных функций рядом Фурье, над которой работали крупные математики XIX—XX вв., в большой мере способствовала возникновению теории функций действительного переменного. Интеграл Лебега и связанное с ним равенство $F[L_2(-\infty, \infty)] = L_2(-\infty, \infty)$ сделали преобразование Фурье необходимым и для построения основных концепций теоретической физики (квантовая механика). В тридцатых годах нашего века в теории интеграла Фурье были сделаны новые крупные открытия, в частности, доказаны теорема Палея — Винера (§ 6, п. 3) и теорема Бохнера—Хинчина (§ 7). В современных исследованиях аппарат преобразований Фурье развит и для растущих функций, что, в частности, позволило дать подход к разрешению основных проблем общей теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Рекомендуемая литература: А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, ГТТИ, 1939; Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948; Б. ван дер Поль и Х. Бреннер, Операционное исчисление, ИЛ, 1952; Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, Гостехиздат, 1949; И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, вып. 1—3, Физматгиз, 1958 (2-е издание, вып. 1 — 1960), И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции, вып. 4, Физматгиз, 1961.