§ 8. Статистика

1. Микрочастицы обладают своеобразной характеристикой, называемой *статистикой.* Статистика является не индивидуальным, а коллективным свойством. Она проявляется лишь в присутствии не менее чем двух одинаковых частиц. Существование статистики является следствием принципа неразличимости одинаковых микрочастиц и вероятностного характера описания состояния в квантовой теории.

2. Принцип неразличимости состоит в том, что любые две микрочастицы одного сорта, например два протона, *абсолютно* одинаковы по всем своим свойствам, т. е. принципиально неотличимы друг от друга. Такая абсолютная одинаковость свойственна только микрочастицам и совершенно невозможна в макроскопическом мире. Как бы мы ни старались, нам никогда не удастся, например, сделать два абсолютно одинаковых стальных шарика диаметром в 1 см. После любой сколь угодно точной обработки в этих шариках останутся какие-то индивидуальные особенности, по которым их можно будет отличить друг от друга, скажем, пользуясь сильным микроскопом.

3. Абсолютная неразличимость микрочастиц приводит к тому, что состояние из двух таких частиц по своим свойствам ничем не отличается от состояния, в котором эти частицы поменялись местами. Отсюда остается уже только один шаг до более сильного утверждения о том, что перестановка частиц одного сорта вообще не переводит систему в новое состояние. Согласно этому утверждению не существует состояния из двух одинаковых частиц, в котором первая частица находится в состоянии a, а вторая в состоянии b (или, наоборот, первая в состоянии b, вторая в состоянии a). Существует лишь состояние, в котором одна из частиц находится в состоянии a, а другая в состоянии b.

Из классической механики такое утверждение само по себе не следует. Если допустить, что нам как-то удалось сделать две абсолютно одинаковые макроскопические частицы, то мы все же сможем их перенумеровать и затем непрерывно следить за движением каждой из них в отдельности. В результате в каждый момент времени мы сможем точно сказать, где находится первая, а где вторая частица.

Иное дело в квантовом мире, где микрочастица не имеет траектории, а описывается волновой функцией, имеющей смысл амплитуды вероятности. Здесь мы уже лишены возможности точно предсказать, в каких местах окажутся в определенный момент времени первая и вторая частицы, а можем лишь рассчитать вероятность нахождения каждой из этих частиц в той или иной области пространства. Но если мы получим, что расчетная вероятность, скажем, попадания в счетчик равна 5% для первой частицы и 20% для второй, то для одинаковых частиц отношение этих вероятностей будет непроверяемой экспериментально, т. е. лишенной физического смысла величиной. Поскольку частицы неразличимы, то мы сможем лишь установить, что вероятность зарегистрировать *одну* из частиц равна 25%. Таким образом, мы пришли к важному выводу о том, что в квантовом мире состояние системы из одинаковых частиц не изменяется при взаимных перестановках.

4. В квантовой теории состояние системы из n частиц описывается волновой функцией $\Psi_{m_1 m_2 \dots m_n}(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_n)$, зависящей от координат $\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_n$ и проекций спинов $m_1, \dots, m_n$ частиц. После перестановки двух частиц, например первой и второй, состояние системы должно остаться неизменным. Для этого нужно, чтобы волновая функция состояния с переставленными частицами совпадала с исходной с точностью до числового множителя, который мы обозначим через P_{12}:

$$\Psi_{m_2 m_1 \dots m_n}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_n) = P_{12}\Psi_{m_1 m_2 \dots m_n}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_n). \quad (2.42)$$

Произведя операцию перестановки первой и второй частиц дважды, мы придем к первоначальной функции. Отсюда следует, что $P_{12}^2 = 1$, т. е. $P_{12} = \pm 1$. Аналогичное рассуждение может быть проведено для любой пары одинаковых частиц: при перестановке двух одинаковых частиц волновая функция либо остается неизменной, т. е. является симметричной по частицам, либо меняет знак, т. е. является антисимметричной по частицам.

Можно показать, что частицам определенного сорта всегда свойствен только один из этих двух возможных типов перестановочной симметрии. Такое свойство частиц по отношению к перестановкам и называется статистикой. Частицы подчиняются *статистике Бозе — Эйнштейна*, если волновая функция системы таких частиц симметрична по отношению к перестановке любой пары частиц:

$$\Psi_{m_1 m_2 \dots m_n}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_n) = \Psi_{m_2 m_1 \dots m_n}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_n). \quad (2.43)$$

Соответствующие частицы называются *бозе-частицами* или *бозонами*. Частицы подчиняются *статистике Ферми — Дирака*, если волновая функция системы таких частиц антисимметрична по отношению к перестановке любой пары частиц:

$$\Psi_{m_1 m_2 \dots m_n}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_n) = -\Psi_{m_2 m_1 \dots m_n}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_n). \quad (2.44)$$

Соответствующие частицы называются *ферми-частицами* или *фермионами*.

5. Для частиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака, справедлив *принцип Паули*, согласно которому в одном и том же состоянии может находиться не более одной частицы. Из квантовой механики следует, что волновая функция двух разных частиц, находящихся соответственно в состояниях $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$, равна их произведению $\Psi^{(1)} \cdot \Psi^{(2)}$. Для одинаковых частиц в соответствии с (2.44)

произведение будет антисимметричным по частицам:

$$\Psi_{m_1 m_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \Psi^{(1)}_{m_1}(\boldsymbol{r}_1)\Psi^{(2)}_{m_2}(\boldsymbol{r}_2) - \Psi^{(1)}_{m_2}(\boldsymbol{r}_2)\Psi^{(2)}_{m_1}(\boldsymbol{r}_1). \tag{2.45}$$

Но выражение (2.45), очевидно, обращается в нуль, если функции $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$ одинаковы, что и приводит к принципу Паули. Принцип Паули важен не только для многих частных физических явлений, но и для мироздания в целом, поскольку именно благодаря этому принципу атомы и атомные ядра имеют оболочечную структуру. Без принципа Паули не было бы периодического закона Менделеева и структура атомов, ядер и кристаллов была бы совершенно иной.

Для двух бозонов вместо (2.45) получается симметризованная по частицам функция

$$\Psi^{(1)}_{m_1}(\boldsymbol{r}_1)\Psi^{(2)}_{m_2}(\boldsymbol{r}_2) + \Psi^{(1)}_{m_2}(\boldsymbol{r}_2)\Psi^{(2)}_{m_1}(\boldsymbol{r}_1). \tag{2.46}$$

Выражение (2.46) уже не обращается в нуль для одинаковых функций, так что в одном и том же состоянии может находиться любое количество одинаковых бозонов. Для бозе-частиц принцип Паули не выполняется.

6. Выводы предыдущего пункта часто используются для определения статистик. Статистика Ферми — Дирака определяется как такая, в которой в каждом состоянии может находиться не более одной частицы, а статистика Бозе — Эйнштейна как такая, в которой в одном и том же состоянии может находиться любое число частиц. В отношении статистики Ферми — Дирака такое определение является полным. Однако для статистики Бозе — Эйнштейна такое определение недостаточно, так как в нем не отражен тот факт, что в этом случае запрещены состояния, антисимметричные по частицам.

В качестве примера такого запрета рассмотрим относительное движение двух α-частиц, которые имеют спин нуль и подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Волновая функция $\Psi_{\text{отн}}$ относительного движения согласно приложению I зависит только от разности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ координат частиц:

$$\Psi_{\text{отн}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \Psi(\boldsymbol{r}). \tag{2.47}$$

При перестановке частиц относительная координата меняет знак, так что условие (2.43) принимает вид

$$\Psi(-\boldsymbol{r}) = \Psi(\boldsymbol{r}). \tag{2.48}$$

Тем самым разрешенными оказываются только функции, четные относительно изменения знака относительной координаты. Этот результат будет использован в следующем параграфе для изучения некоторых свойств реакции столкновения протонов с ядрами лития.

7. Для иллюстрации важного и трудного для усвоения понятия статистики продемонстрируем различие между тремя статистика-

ми — классической, фермиевской и бозевской — на простейшем случае, когда имеются две одинаковые частицы и два различных одночастичных состояния. Число возможных состояний такой физической системы будет разным для разных статистик.

В классической статистике возможны четыре состояния:

а) обе частицы в первом состоянии;

б) обе частицы во втором состоянии;

в) первая частица в первом состоянии, вторая — во втором;

г) первая частица во втором состоянии, вторая — в первом.

В статистике Ферми возможно только одно состояние:

одна из частиц (какая именно, здесь и ниже — вопрос, не имеющий смысла) находится в первом состоянии, другая — во втором.

В статистике Бозе — Эйнштейна возможны три состояния:

а) обе частицы в первом состоянии;

б) обе частицы во втором состоянии;

в) одна из частиц в первом состоянии, другая — во втором.

8. В релятивистской квантовой теории поля строго доказывается, что статистика однозначно определяется спином частицы. Частицы с целым (в том числе с нулевым) спином подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна (γ-кванты и др.). Частицы с полуцелым спином подчиняются статистике Ферми — Дирака (электроны, протоны, нейтроны, ядра с нечетным числом нуклонов и т. д.). Все имеющиеся экспериментальные данные согласуются с этим выводом.

§ 9. Четность

1. Четность является фундаментальным понятием. Она характеризует свойства симметрии ядер, элементарных частиц и вообще любых физических систем по отношению к зеркальным отражениям. Важность этого понятия обусловлена законом сохранения четности, согласно которому физическая система, обладающая зеркальной симметрией в начальном состоянии, сохраняет эту симметрию во все последующие моменты времени. Этот закон справедлив как для электромагнитных взаимодействий, определяющих структуру атомов и молекул, так и для ядерных сил, определяющих структуру ядер. О нарушении закона сохранения четности в так называемых слабых взаимодействиях см. гл. VI, § 4, п. 10 и гл. VII, § 8, п. 7.

2. Действие закона сохранения четности можно продемонстрировать на эффекте Зеемана. Рассмотрим сферически симметричный источник света, например, нагретый шар *1* (рис. 2.23). В свободном состоянии излучение этого источника будет, как говорят, *изотропным*, т. е. одинаковым во все стороны. Если же мы окружим этот источник круговым проводником *2*, по которому течет ток, то излучение, скажем, в плоскости тока будет иным, чем излучение в направлении, перпендикулярном этой плоскости, за счет того, что созданное круговым током магнитное поле поляризует атомы и