

зует процесс диффузии. Дополнительной независимой характеристикой диффузии является среднее время τ_d жизни диффундирующего нейтрона.

Таблица 10.2. Значения τ и L для наиболее употребительных замедлителей

Замедлители	τ , см ²	L , см
H ₂ O (вода)	31	2,72
D ₂ O (тяжелая вода)	125	159
Be (бериллий)	86	21
C (графит)	313	58

4. Интересным свойством нейтронов является их способность отражаться от различных веществ. Это отражение не когерентное, а диффузное. Его механизм таков. Нейtron, попадая в среду, испытывает беспорядочные столкновения с ядрами и после ряда столкновений может вылететь обратно. Вероятность такого вылета носит название альбедо нейтронов для данной среды. Очевидно, что альбето тем выше, чем больше сечение рассеяния и чем меньше сечение поглощения нейтронов ядрами среды. Хорошие отражатели отражают до 90% попадающих в них нейтронов, т. е. имеют альбето до 0,9. В частности, для обычной воды альбето равно 0,8. Неудивительно поэтому, что отражатели нейтронов широко применяются в ядерных реакторах и других нейтронных установках. Возможность столь интенсивного отражения нейтронов объясняется следующим образом. Вошедший в отражатель нейtron при каждом столкновении с ядром может рассеяться в любую сторону. Если нейtron у поверхности рассеялся назад, то он вылетает обратно, т. е. отражается. Если же нейtron рассеялся в другом направлении, то он может рассеяться так, что уйдет из среды при последующих столкновениях.

Этот же процесс приводит к тому, что концентрация нейтронов резко снижается вблизи границы среды, в которой они рождаются, так как вероятность для нейтрона уйти наружу велика.

§ 5. Нейтронные волны в средах

1. Согласно квантовомеханическим представлениям нейtron, как и любая другая частица, обладает волновыми свойствами. Эти волновые свойства будут влиять на процесс распространения нейтронов в веществе только в том случае, если дебройлевская длина волны λ по порядку величины равна или превышает межатомные расстояния, т. е. когда $\lambda \gtrsim 10^{-8}$ см. При $\lambda = 10^{-8}$ см энергия нейтрона равна 0,08 эВ, так что волновые свойства отчетливо сказы-

ваются у тепловых нейтронов и еще более сильно у холодных и ультрахолодных. Влияние волновых свойств проявляется в том, что рассеянные разными ядрами нейтронные волны могут интерферировать друг с другом. В результате получается в общем довольно сложная картина углового и энергетического распределения рассеянных нейтронов, существенно отличная от соответствующего распределения при рассеянии нейтронов на изолированных атомах.

Процесс распространения нейтронных волн в веществе, как и всякий волновой процесс, во многом аналогичен распространению электромагнитных, в частности, световых волн. Нейтронные волны в веществе могут испытывать дифракцию, преломление, отражение (в том числе полное внутреннее), могут поляризоваться и т. д. Эта аналогия часто приводит к тому, что и методы расчета в ряде случаев аналогичны в нейтронной и обычной оптике. Например, в п. 2 мы увидим, что условия дифракции в обоих случаях одинаковы. Длины волн холодных нейтронов ненамного превышают межатомные расстояния. Поэтому распространение волн тепловых и холодных нейтронов в веществе более похоже на прохождение жестких рентгеновских волн, чем на распространение видимого света.

С другой стороны, нейtron по своим физическим свойствам сильно отличается от γ -кванта. Поэтому нейтронная оптика имеет ряд совершенно своеобразных черт. Отличие нейтронной оптики от обычной обусловлено следующими основными причинами. Во-первых, электромагнитное излучение взаимодействует с электронами атомных оболочек, а нейтроны в основном взаимодействуют с ядрами (важное исключение будет рассмотрено в п. 7). Возникающие в связи с этим особенности будут рассмотрены в пп. 3, 4. Во-вторых, нейtron имеет большую массу покоя, в то время как масса покоя фотона равна нулю. На волновом языке это означает, что у нейтронов связь частоты с длиной волны и скорость распространения волн совершенно иные, чем у электромагнитного излучения. Именно, для нейтронов

$$E_n = \hbar\omega_n = \frac{p_n^2}{2M} = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2M\lambda_n^2}, \quad (10.16)$$

в то время как у фотона

$$E_\gamma = \hbar\omega_\gamma = cp_\gamma = \frac{2\pi c\hbar}{\lambda_\gamma}. \quad (10.17)$$

Отсюда, например, следует, что при одной и той же длине волн $\lambda_n = \lambda_\gamma = 10^{-8}$ см энергия нейтрона равна 0,08 эВ, а энергия фотона равна 12,5 кэВ (жесткое рентгеновское излучение). Скорость такого нейтрона $\approx 3 \cdot 10^5$ см/с, т. е. в 10^5 раз меньше скорости света. Как мы увидим в п. 9, эти особенности нейтронных волн делают их уникальным средством исследования ряда важнейших характеристик твердого тела.

2. Проходя через кристалл, тепловые нейтроны подобно рентгеновским лучам претерпевают дифракционное рассеяние. Это рассеяние проявляется в том, что при попадании пучка нейtronов в кристалл возникают новые пучки, идущие в направлениях, отличающихся от первоначального. Возможные направления этих дифрагированных пучков рассчитываются для нейtronов совершенно так же, как и для рентгеновских лучей. Упрощенный, но, как показывает более точное рассмотрение, в общем правильный механизм явления дифракции таков. На кристалл падает плоская нейтронная волна. Ядра, расположенные в определенной кристаллической плоскости, отражают эту волну. Параллельных кристаллических плоскостей очень много. Волны, отраженные в каждой из

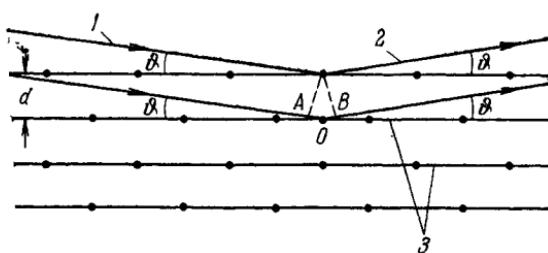


Рис. 10.9. Иллюстрация к закону отражения Брэгга — Вульфа.
1, 2 — падающая и отраженная волны, 3 — кристаллические плоскости.

них, будут интерферировать друг с другом. В результате от кристалла в целом волна будет распространяться лишь в тех направлениях, в которых волны, отраженные различными параллельными кристаллическими плоскостями, усиливают друг друга. Для этого разность $AO + OB$ хода лучей, отраженных разными плоскостями, должна равняться целому числу полуволн (рис. 10.9):

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad (10.18)$$

где d — межплоскостное расстояние, θ — угол скольжения (между отражающей плоскостью и падающим пучком), m — положительное целое число, называемое порядком отражения. Соотношение (10.18) называется *условием Брэгга — Вульфа*. Оно применимо для дифракции на кристалле волн любой природы — рентгеновских, электронных, нейтронных.

Очевидно, что при $\lambda > 2d$ условие Брэгга — Вульфа не будет выполняться ни при каком угле скольжения, так что дифракционное отражение станет невозможным. Энергия нейтрана, при которой исчезает брэгговское отражение, называется *энергией брэгговского скачка*. Она различна для разных кристаллов и по порядку величины равна 10^{-3} эВ. Наличие этого скачка используется для от-

фильтровывания холодных нейтронов путем отражения пучка нейтронов от монокристаллов.

3. Интенсивность отражения нейтронов, конечно, определяется тем, насколько интенсивно рассеиваются нейтроны отдельными ядрами, т. е. сечением $\sigma_{\text{упр}}$ упругого рассеяния нейтрона ядром. Согласно общим свойствам ядерных реакций (гл. IV, § 4) при низких энергиях сечение упругого рассеяния нейтрона является константой, не зависящей ни от углов, ни от энергий. Это сечение можно представить в виде

$$\sigma_{\text{упр}} = 4\pi a^2, \quad (10.19)$$

где a — константа размерности длины, называемая *длиной рассеяния* или, что здесь то же самое, амплитудой рассеяния. Амплитуда a нерегулярно меняется при переходе от ядра к ядру и в среднем имеет один и тот же порядок величины ($3 \cdot 10^{-13}$ — 10^{-12} см) для всех ядер — от самых легких до самых тяжелых. Существенно, однако, что эта амплитуда бывает как положительной, так и отрицательной.

Выясним, в каких явлениях может проявиться знак амплитуды a . При рассеянии на одиночных ядрах измеряется только абсолютная величина a . Но если длина волны нейтрона превышает расстояния между соседними атомами, то сечение рассеяния выражается уже через квадрат суммы амплитуд. Поэтому, если, например, кристалл состоит из ядер двух сортов с близкими по величине и противоположными по знаку амплитудами рассеяния, то он почти не будет рассеивать нейтроны, хотя рассеяние на ядрах каждого сорта в отдельности и не мало. Такие явления действительно наблюдались. Например, почти полностью компенсируются имеющие противоположные знаки амплитуды рассеяния нейтрона на кислороде и висмуте. Опыты по рассеянию нейтронов на двухкомпонентных кристаллах дают возможность определить знак отношения амплитуд.

Как мы увидим в п. 5, существуют методы определения не только относительного, но и абсолютного знака амплитуды.

4. При переходе от микроскопического рассеяния нейтронов на отдельных ядрах к макроскопическому прохождению нейтронных волн в кристалле мы столкнемся еще с двумя осложняющими обстоятельствами, отсутствующими в случае рентгеновских лучей. Во-первых, если ядро обладает ненулевым спином, то амплитуда зависит от взаимной ориентации спинов нейтрона и ядра. Во-вторых, если в состав кристалла входит элемент, имеющий несколько стабильных изотопов, то амплитуда различна для разных изотопов, причем различие иногда наблюдается не только по величине, но даже по знаку. Так, например, амплитуда рассеяния нейтрона положительна для изотопа никеля $^{28}\text{Ni}^{60}$ и отрицательна для изотопа $^{28}\text{Ni}^{62}$. Поскольку в кристаллической решетке спины ядер ориентированы хаотично (если только не приняты специальные меры по их поляризации) и разные изотопы одного и того же элемента

распределены также случайным образом, то оба эти эффекта нарушают правильность решетки по отношению к рассеянию нейтронов. Подчеркнем, что это довольно сильное нарушение правильности решетки не отражается на атомных (т. е. идущих за счет электромагнитных, а не ядерных взаимодействий) явлениях, в частности на рассеянии рентгеновских лучей.

Зависимость амплитуды рассеяния нейтрона от ориентации спина ядра и от изотопного состава приводит к тому, что кристалл отражает нейтроны в различных направлениях, а не только в тех, которые разрешены условием (10.18) Брэгга — Вульфа. Это дополнительное отражение будет уже не когерентным, а диффузным.

Очевидно, что для полного описания рассеяния нейтронов на кристалле определенного элемента надо знать амплитуды рассеяния на всех стабильных изотопах как при параллельных, так и при антипараллельных спинах нейтрона и ядра. Однако обычно такая полная информация не требуется. Если изотопный состав элемента фиксирован (за некоторыми исключениями он постоянен не только в земной коре, но и во всех известных галактиках, гл. XII, § 2) и если спины ядер и нейтронов ориентированы хаотично, то все нейтронно-оптические явления выражаются через две независимые величины: когерентную амплитуду a_k и некогерентную амплитуду a_{hk} . Обе эти амплитуды получаются посредством осреднения амплитуд, соответствующих рассеянию на определенном изотопе с определенной ориентацией спинов. Полное сечение σ рассеяния на N ядрах равно сумме сечений когерентного σ_k и некогерентного σ_{hk} рассеяний:

$$\sigma = \sigma_k + \sigma_{hk}. \quad (10.20)$$

При этом когерентное сечение определяется через квадрат суммы когерентных амплитуд

$$\sigma_k = 4\pi \left(\sum_N a_k \right)^2, \quad (10.21)$$

а некогерентное — через сумму квадратов некогерентных амплитуд

$$\sigma_{hk} = 4\pi \sum_N a_{hk}^2. \quad (10.22)$$

В интерференционных явлениях участвует только когерентная амплитуда. Некогерентная амплитуда создает диффузный фон, обычно лишь затрудняющий исследования.

5. С когерентной амплитудой a_k непосредственно связан коэффициент преломления n нейтронных волн веществом. Эта связь носит универсальный характер (одинакова для нейтронов и рентгеновских лучей) и имеет вид

$$n = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 a N}{\pi}}, \quad (10.23)$$

где N — число рассеивателей в 1 см^3 вещества.

Приведем вывод этой формулы. Пусть на плоскую мишень толщиной $\Delta z \ll \lambda$ падает плоская нейтронная волна e^{ikz} (рис. 10.10). После прохождения мишени нейтронная волна Ψ будет состоять из падающей волны e^{ikz} и рассеянной волны,

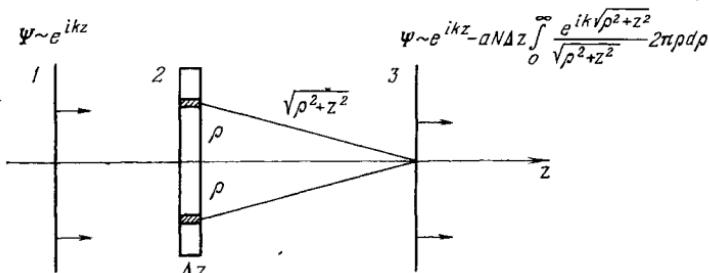


Рис. 10.10. Схематическое изображение прохождения плоской нейтронной волны через рассеивающую мишень.

1 — падающая волна; 2 — мишень; 3 — волна, прошедшая через рассеиватель.

возникающей в результате интерференции сферических волн, которые испускаются всеми рассеивателями мишени, т. е. при $z \gg \lambda$

$$\Psi = e^{ikz} - aN\Delta z \int_0^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + z^2}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} 2\pi\rho d\rho. \quad (10.24)$$

Интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + z^2}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} 2\pi\rho d\rho = \frac{2\pi}{ik} \int_z^{\infty} e^{ikx} dx = \frac{2\pi i}{k+i0} e^{ikz}$$

(на бесконечности, как обычно, вводится исчезающее малое затухание). Поэтому при $k \neq 0$

$$\Psi \approx e^{ikz} \left(1 - \frac{2\pi aN \Delta z}{k} i \right). \quad (10.25)$$

Волну Ψ можно выразить также через показатель преломления n нейтронных волн. В этом случае

$$\Psi \approx e^{ink\Delta z + ik(z - \Delta z)}. \quad (10.26)$$

Поскольку

$$(n - 1) k \Delta z \ll 1,$$

то из (10.26) следует, что

$$\Psi \approx e^{ikz} [1 + i(n - 1) k \Delta z]. \quad (10.27)$$

Из сравнения (10.25) с (10.27) получаем искомую формулу (10.23).

Показатель преломления для холодных нейтронов мало отличается от единицы. Положив, например, $\lambda = 2 \cdot 10^{-8}$ см, $|a| = 10^{-13}$ см, $N = 10^{23}$, получим, что $|n - 1| = 10^{-6}$. Для большинства ядер амплитуда a положительна, так что преломляющая среда оказывается оптически менее плотной, чем воздух. Поэтому при очень малых углах скольжения (порядка нескольких

минут) наблюдается полное внутреннее отражение. При увеличении угла скольжения интенсивность отраженного пучка падает скачком при критическом угле ϑ_{kp} , определяемом соотношением

$$\cos \vartheta_{kp} = n, \quad (10.28)$$

так как коэффициент отражения при $\vartheta > \vartheta_{kp}$ очень мал. По наличию полного внутреннего отражения можно определять знак амплитуды рассеяния, так как при отрицательной амплитуде этот эффект отсутствует.

6. Дифракция нейтронов на кристаллах в настоящее время является не только хорошо изученным явлением, но и эффективным методом исследования, получившим название *нейtronографии* (по аналогии с рентгенографией). В самой ядерной физике нейtronография используется для определения знаков и абсолютных значений когерентных амплитуд рассеяния нейтронов на различных ядрах. В физике твердого тела и смежных с ней областях нейtronография используется для получения информации о структуре кристаллов.

Основных методов исследования в нейtronографии два. В одном методе измеряют полное сечение упругого рассеяния как функцию энергии нейтронов. В другом — снимают нейtronограмму образца, т. е. получают угловое распределение для рассеяния пучка моноэнергетических нейтронов монокристаллами или поликристаллами. Как и в рентгенограмме, положение максимумов нейtronограммы определяется структурой кристаллической решетки (в соответствии с условием (10.18) Брэгга — Вульфа), а величина этих максимумов зависит от амплитуд рассеяния.

Наряду с большим сходством между нейtronографическими и рентгенографическими методами имеются следующие важные различия:

а) Рентгеновские лучи рассеиваются на электронах, а нейтроны — на ядрах. Тем самым дифракция нейтронов дает информацию не об электронной, а о ядерной, т. е. атомно-молекулярной конфигурации. Поэтому изучение дифракции нейтронов особенно полезно для расшифровки структуры сплавов и соединений из элементов с близкими атомными номерами (FeCo , NiMn и т. д.), в которых обе компоненты имеют сходные электронные конфигурации, но резко различные ядерные сечения.

б) Сечения взаимодействия рентгеновских лучей с атомами пропорциональны Z , т. е. сильно различаются для легких и тяжелых элементов. Ядерные сечения, напротив, имеют одинаковый порядок для всех ядер — от самых тяжелых до самых легких. Например, амплитуда рассеяния нейтронов равна $0,4 \cdot 10^{-12}$ см на водороде, $0,66 \cdot 10^{-12}$ см на углероде и $0,86 \cdot 10^{-12}$ см на висмуте. Поэтому в соединениях, содержащих как легкие, так и тяжелые элементы (H_2O , PbS , ThD_2 и т. д.), эффект дифракции на легких

элементах на рентгенограмме практически не заметен, а на нейтронограмме легко различим.

в) В одном и том же диапазоне длин волн рентгеновские волны рассеиваются преимущественно вперед, а нейтронные — во все стороны изотропно. Поэтому при переходе к большим углам рассеяния интенсивность дифракционных пиков резко падает на рентгенограмме и почти не меняется на нейтронограмме.

г) Нейтроны имеют в тысячи раз большую проникающую способность, чем рентгеновские лучи той же длины волны. Поэтому нейтронографические методы более эффективны, чем рентгеновские, для исследования внутренних областей образцов.

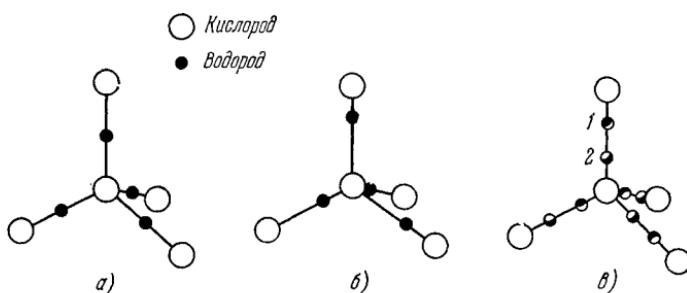


Рис. 10.11. Возможные структурные модели кристалла льда.

На диаграмме *в)* атомы водорода половину времени проводят в положении *1*, другую половину — в положении *2*.

Эти отличия — в пользу нейтронографии.

д) У рассеянных нейтронных лучей есть значительная по величине некогерентная амплитуда, не зависящая от кристаллической структуры и создающая равномерный фон, смазывающий картину.

е) Получение достаточно мощных и монохроматических нейтронных пучков — дорогое и сложное дело.

В целом рентгенографические и нейтронографические методы хорошо дополняют друг друга.

В качестве примера эффективного использования нейтронографии приведем расшифровку структуры льда. Структура, образуемая кислородными атомами, была сравнительно хорошо выяснена рентгенографически. Она оказалась гексагональным вариантом тетраэдрической структуры: каждый атом кислорода окружен четырьмя соседями, расположенными в вершинах тетраэдра (рис. 10.11). О положениях протонов рентгенограмма сведений не содержит. Для протонных структур было предложено несколько моделей, отражающих различные варианты кристаллических связей. В одной модели протон находился посередине между каждыми двумя прилегающими друг к другу атомами кислорода (рис. 10.11, *а*), в другой — протоны находились ближе к одному из атомов кислорода

(рис. 10.11, б) и т. д. В результате же нейтронографического исследования было однозначно установлено, что каждый протон в кристалле льда половину времени проводит около одного атома кислорода, а половину — около другого.

7. Нейtron обладает магнитным моментом. Поэтому нейtronные волны могут рассеиваться на магнитных моментах атомов внутри

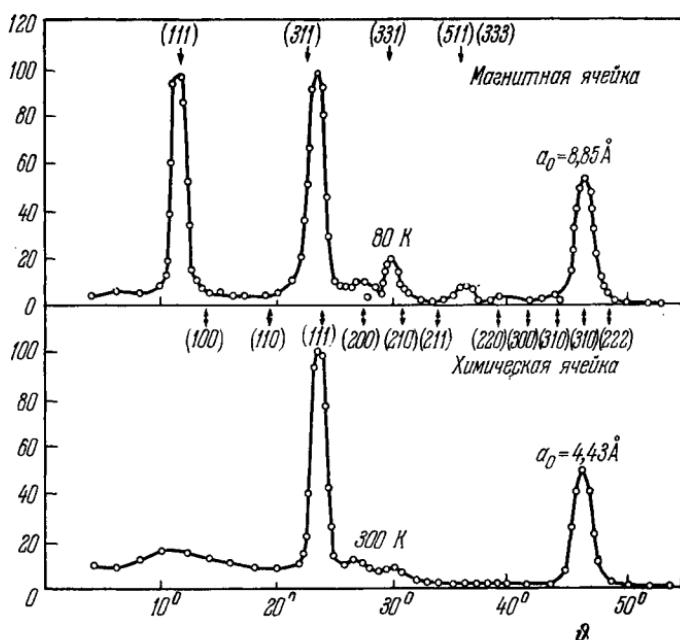


Рис. 10.12. Нейтронограммы оксида марганца MnO при температурах 80 и 300 К.

Цифры в скобках — миллеровские индексы отражающих плоскостей, a_0 — постоянная кристаллической решетки. По оси ординат — интенсивность в произвольных единицах.

вещества. Интенсивность этого процесса определяется амплитудой магнитного рассеяния нейтрона. Для магнитных веществ (железо, кобальт и т. д.) магнитная и ядерная амплитуды рассеяния имеют одинаковый порядок. Если магнитные моменты атомов в веществе ориентированы хаотично, то магнитное рассеяние в когерентную амплитуду вклада, конечно, не даст. Но если магнитные моменты в веществе как-то упорядочены, то появляется когерентная магнитная амплитуда, создающая на нейтронограммах максимумы, положение которых определяется магнитной структурой вещества.

Магнитное рассеяние нейтронов находит все новые и новые применения. Только с помощью методов магнитной нейтронографии

была прямо установлена магнитная структура антиферромагнетиков. С помощью магнитных нейтронных зеркал (полное внутреннее отражение в магнитном поле) формируются интенсивные пучки полностью поляризованных нейтронов. Именно методами магнитной нейтронографии удается получать информацию об ориентациях магнитных моментов каждой из компонент в бинарных магнитных сплавах.

Для примера приведем две нейтронограммы окиси марганца MnO , снятые при температурах 80 и 300 К (рис. 10.12). Соответствующие рентгенограммы одинаковы, так что изменения кристаллической структуры в этом интервале температур не происходит. Появление новых максимумов в нейтронограмме при понижении температуры обусловлено тем, что при 120 К MnO переходит в антиферромагнитное состояние, причем размер антиферромагнитной ячейки в два раза больше размера химической ячейки (рис. 10.13).

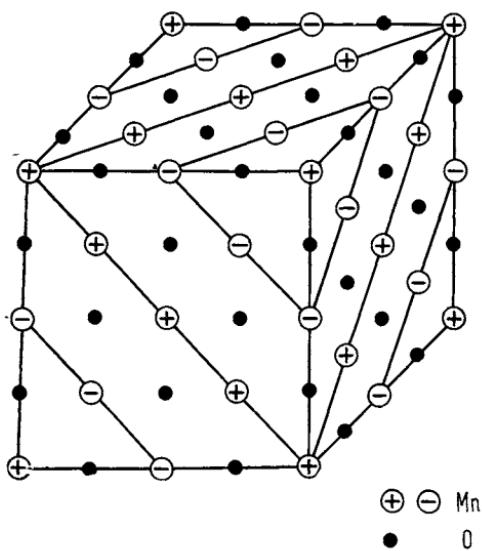


Рис. 10.13. Установленная с помощью нейтронографии антиферромагнитная структура окиси марганца MnO , существующая при температуре, меньшей 120 К.

Знаки + и — в кружках соответствуют противоположным направлениям магнитных моментов атомов.

ломления ультрахолодной нейтронной волны является чисто мнимым. Это значит, что такие волны в веществе (разумеется, при длине рассеяния $a > 0$) распространяться не могут и, следовательно, должны отражаться от поверхности вещества. Это свойство ультрахолодных нейтронов используется для создания нейтронных ловушек (Ф. Л. Шапиро и др., Дубна, 1971). Действительно, если впустить такие нейтроны в объем, ограниченный веществом с положительной длиной рассеяния (например, углеродом ${}_{6}\text{C}^{12}$), то они не могут уйти из этого объема. Сейчас уже имеются нейтронные ловушки, в которых в течение примерно 400 секунд

соответствующие рентгенограммы одинаковы, так что изменения кристаллической структуры в этом интервале температур не происходит. Появление новых максимумов в нейтронограмме при понижении температуры обусловлено тем, что при 120 К MnO переходит в антиферромагнитное состояние, причем размер антиферромагнитной ячейки в два раза больше размера химической ячейки (рис. 10.13).

8. В этом пункте мы рассмотрим свойства ультрахолодных нейтронов. Скорости движения таких нейтронов не превышают четырех метров в секунду, а длины волн $\lambda \geq 1,5 \cdot 10^{-5}$ см. Подставив $\lambda = 1,5 \cdot 10^{-5}$, $a \approx 10^{-12}$ см и $N \approx 5 \cdot 10^{22}$ в формулу (10.23), находим, что показатель пре-

сохраняется около ста нейтронов *). Расчеты показывают, что число ультрахолодных нейтронов в ловушке можно довести до 1000 при плотности 100 нейтронов/л. Накопленные в ловушках нейтроны могут быть использованы для измерения дипольного электрического момента нейтрона и периода β -распада свободного нейтрона.

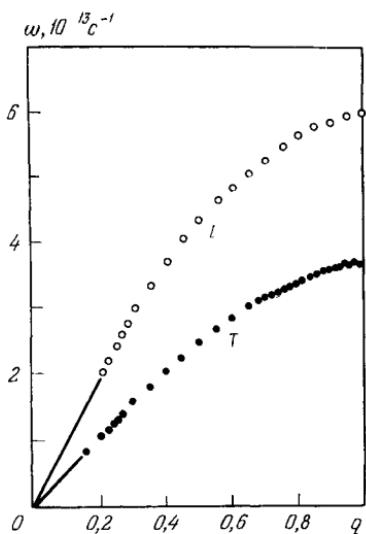


Рис. 10.14. Зависимость частоты фона на от импульса для направления [100] в кристалле алюминия при температуре 300 °C.

Индексы T и L соответствуют попеченному и продольному акустическим фононам. q дано в единицах $2\pi/d$, где d — постоянная решетки.

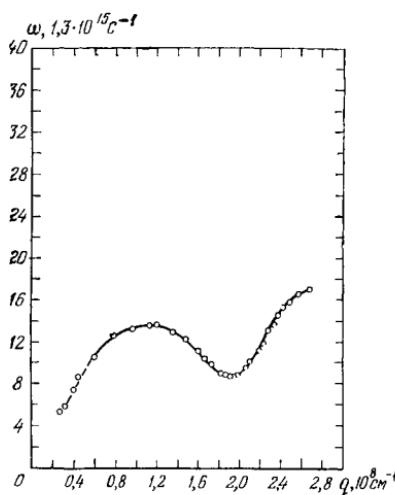


Рис. 10.15. Зависимость частоты элементарных возбуждений от импульса в жидком гелии при $T = 1,12 \text{ K}$.

В заключение отметим, что наряду с рассмотренными ловушками нейтронов созданы и функционируют нейтронные ловушки принципиально другого типа — нейтронные накопительные кольца. В этих кольцах нейтроны с энергией меньше $2 \cdot 10^{-6}$ эВ удерживаются на орбите с диаметром порядка 1 м неоднородным магнитным полем. Время удержания нейтронов в таких ловушках сейчас уже превышает период их полураспада.

9. В заключение остановимся на неупругом рассеянии тепловых и холодных нейтронов. Тепловые и холодные нейтроны, оче-

*) Согласно расчетам ультрахолодный нейtron должен совершить не менее 10^5 соударений со стенкой, прежде чем он может уйти из ловушки. Эксперимент, однако, показывает, что нейtron совершает всего лишь 10^3 соударений. Причина этого расхождения пока не ясна.

видно, не возбуждают атомные ядра и даже отдельные атомы. Но даже медленные нейтроны имеют энергию, достаточную для того, чтобы возбуждать кванты акустических колебаний кристаллической решетки — фононы. Измерив на опыте импульс $\hbar q = \hbar k_1 - \hbar k_2$ и энергию $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2M} - \frac{\hbar^2 k_2^2}{2M}$, передаваемые веществу при возбуждении в нем одного фона, мы можем определить одну из важнейших характеристик вещества — зависимость частоты ω элементарного возбуждения от волнового вектора q . Здесь $\hbar k_1$, $\hbar k_2$ — импульсы нейтрона до и после рассеяния.

На рис. 10.14 приведена найденная таким способом зависимость $\omega(q)$ для кристалла алюминия, а на рис. 10.15 — для жидкого гелия. Отметим, что вид дисперсионной кривой на рис. 10.15 был предсказан Л. Д. Ландау в 1947 г. на основе анализа термодинамических свойств жидкого гелия.