ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Уравнение Шредингера

1. Уравнение Шредингера для волновой функции $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, t)$ системы частиц имеет вид

$$\hat{\mathscr{H}}\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, t)}{\partial t}, \tag{I.1}$$

где $\hat{\mathscr{H}}$ — оператор Гамильтона, t — время, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, ... — координаты первой, второй и т. д. частиц. Если система находится в состоянии с определенной энергией E, то

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, t) = \Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots)\exp\left(-iE\frac{t}{\hbar}\right), \tag{I.2}$$

и функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\mathscr{H}}\Psi = E\Psi. \tag{I.3}$$

Уравнение (I.3), дополненное условиями непрерывности и ограниченности волновой функции Ψ, определяет допустимые собственные энергии и собственные волновые функции системы.

2. Укажем, как можно найти допустимые энергии бесспиновой частицы, движущейся в сферически симметричном потенциале

$$\hat{U}(\boldsymbol{r}) = U(r),$$

где $|\boldsymbol{r}| = r$. Уравнение (I.3) принимает в этом случае вид (см. также гл. I, § 3)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}^2} + U(r)\right)\Psi(\boldsymbol{r}) = E\Psi(\boldsymbol{r})$$

или (в сферических координатах r, ϑ, φ)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hbar^2}{2Mr^2}\Lambda(\vartheta, \varphi) + U(r)\right)\Psi(r, \vartheta, \varphi) = E\Psi(r, \vartheta, \varphi), \tag{I.4}$$

где оператор

$$\Lambda(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\} \tag{I.5}$$

с точностью до множителя $-\hbar^2$ совпадает с оператором квадрата орбитального момента количества движения. Как известно из курса математической физики, решение уравнения (I.4) следует искать в виде

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = R_{El}(r)Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \tag{I.6}$$

где функции $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ и $R_{El}(r)$ удовлетворяют уравнениям

$$-\Lambda Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}, \qquad (I.7)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR_{El}(r)) + \frac{2M}{\hbar^2}\left(E - U(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2}\right)(rR_{El}(r)) = 0. \qquad (I.8)$$

Уравнение (I.7) определяет возможные собственные значения квадрата орбитального момента количества движения. В курсах математической физики показывается, что уравнение (I.7) имеет решения только при $l = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, орбитальный момент количества движения также может принимать только целочисленные положительные значения. Уравнение (I.8) при заданном l определяет допустимые значения энергии частицы в потенциале $U(r)$.

Найдем эти энергии в простейшем случае потенциала, имеющего вид «потенциального ящика» с бесконечно высокими стенками (рис. I.1):

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \infty, & r > a. \end{cases} \qquad (I.9)$$

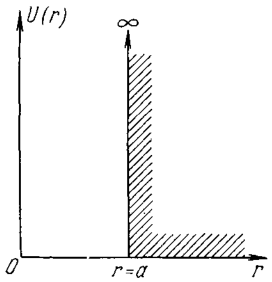

Рис. I.1. «Потенциальный ящик» с бесконечно высокими стенками.

Ограничимся случаем $l = 0$. Обозначив произведение $rR_{El}(r)$ через $\chi_{El}(r)$, находим, что в области $r < a$ уравнение (I.8) сводится к уравнению

$$\frac{d^2\chi_{E0}}{dr^2} + \frac{2ME}{\hbar^2}\chi_{E0} = 0. \qquad (I.10)$$

Интересующее нас решение этого уравнения должно, во-первых, быть ограниченным и, во-вторых, обращаться в нуль в точке $r = a$, так как частица не может проникнуть в область бесконечно высокого барьера. Удовлетворяющие этим требованиям решения имеют вид

$$\chi_{E0}(r) \sim \sin\left(\sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}}\, r\right), \qquad (I.11)$$

где

$$\sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}} \cdot a = n\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (I.12)$$

Из соотношения (I.12) получаем допустимые энергии

$$E_n = (n\pi\hbar)^2/2Ma^2. \qquad (I.13)$$

«Порядковый номер» n допустимой энергии E_n имеет простой математический смысл: $n - 1$ равняется числу нулей (узлов) радиальной части $R_{E_n 0}(r)$ волновой функции в области $0 < r < a$. Как правило, дискретные состояния нумеруются не с помощью энергии E_n, а с помощью главного квантового числа n, которое и пишется вместо E_n в качестве нижнего индекса у функции R.

Как видно из формулы (I.13), энергия частицы растет с увеличением n. Это заключение остается справедливым и при движении частицы в других потенциалах притяжения (см. гл. III, § 4).

3. Рассмотрим теперь уравнение Шредингера для двух частиц с массами M_1 и M_2, взаимодействующих друг с другом посредством потенциала $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

Уравнение (I.3) в этом случае принимает вид

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M_1}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}_1^2}-\frac{\hbar^2}{2M_2}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}_2^2}+U(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\right)\Psi(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)=E\Psi(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2). \qquad (\mathrm{I}.14)$$

Для решения этого уравнения целесообразно перейти к переменным

$$\boldsymbol{R}=\frac{M_1\boldsymbol{r}_1+M_2\boldsymbol{r}_2}{M_1+M_2},\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2, \qquad (\mathrm{I}.15)$$

где $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор центра тяжести двух частиц. В новых переменных уравнение (I.14) записывается следующим образом:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2(M_1+M_2)}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{R}^2}-\frac{\hbar^2}{2M_{\text{прив}}}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}^2}+U(\boldsymbol{r})\right)\Psi(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{r})=E\Psi(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{r}), \qquad (\mathrm{I}.16)$$

где величина $M_{\text{прив}}=\dfrac{M_1M_2}{M_1+M_2}$ носит название *приведенной массы.*

В уравнении (I.16) переменные разделяются. Поэтому его решения можно искать в виде

$$\Psi(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{r})=\ (\boldsymbol{R})\,\varphi(\boldsymbol{r}), \qquad (\mathrm{I}.17)$$

где $f(\boldsymbol{R})$ и $\varphi(\boldsymbol{r})$ — волновые функции, описывающие соответственно движение центра масс и относительное движение двух частиц. Подставив (I.17) в (I.16), находим уравнения для функций f и φ:

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2(M_1+M_2)}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{R}^2}-(E-\varepsilon)\right\}f(\boldsymbol{R})=0, \qquad (\mathrm{I}.18)$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2M_{\text{прив}}}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}^2}+(\varepsilon-U(\boldsymbol{r}))\right)\varphi(\boldsymbol{r})=0, \qquad (\mathrm{I}.19)$$

где величина ε имеет смысл энергии относительного движения двух частиц. Таким образом, задача о движении двух взаимодействующих частиц сводится к задаче о независимом движении двух «различных частиц» с массами M_1+M_2 и $M_{\text{прив}}$.

4. В заключение на примере рассеяния бесспиновых частиц силовым центром $U(\boldsymbol{r})$ рассмотрим амплитуду рассеяния и ее связь с эффективным сечением. Решение $\Psi(\boldsymbol{r})$ уравнения Шредингера (1.48), описывающее рассеяние частиц на больших расстояниях от рассеивающего центра, должно иметь вид суперпозиции плоской волны $e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$ налетающих частиц и расходящихся волн $f(\boldsymbol{n}',\boldsymbol{n})\dfrac{e^{ikr}}{r}$ рассеянных частиц:

$$\Psi(\boldsymbol{r})\xrightarrow[|\boldsymbol{r}|\to\infty]{}e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}+f(\boldsymbol{n}',\ \boldsymbol{n})\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad (\mathrm{I}.20)$$

где $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/k$, $\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$. Величина $f(\boldsymbol{n}',\ \boldsymbol{n})$ называется *амплитудой рассеяния*. Поток налетающих частиц равняется $|e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}|^2\cdot v=v$, а рассеянных в направлении $\boldsymbol{n}'$ равен $|f(\boldsymbol{n}',\ \boldsymbol{n})|^2\left|\dfrac{e^{ikr}}{r}\right|^2v=|f(\boldsymbol{n}',\ \boldsymbol{n})|^2\cdot v\cdot\dfrac{1}{r^2}$ (v — скорость частиц). Соответственно в элемент $d\Omega$ телесного угла в направлении $\boldsymbol{n}'$ в 1 с будет попадать число dn рассеянных частиц, равное $v\cdot|f(\boldsymbol{n}',\ \boldsymbol{n})|^2\dfrac{1}{r^2}\cdot r^2\,d\Omega=v\,|f|^2\,d\Omega.$

Согласно (I.53) отсюда следует, что дифференциальное сечение $d\sigma/d\Omega$ рассеяния выражается через амплитуду следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dn}{v} = |f(\mathbf{n}', \mathbf{n})|^2. \tag{I.21}$$

II. Перевод дифференциальных сечений и энергий из лабораторной системы в систему центра инерции и наоборот

Приведем формулы перевода скоростей, энергий, углов и дифференциальных эффективных сечений из лабораторной системы, т. е. системы, в которой мишень покоится, в СЦИ. Для простоты ограничимся случаем упругого рассеяния нерелятивистской частицы. Пусть M_1, M_2 — массы сталкивающихся частиц, $\mathbf{v}_0$ — скорость налетающей частицы. Скорости частиц в СЦИ до столкновения и после столкновения обозначим соответственно через $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{M_2\mathbf{v}_0}{M_1 + M_2}, \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{M_1\mathbf{v}_0}{M_1 + M_2}, \tag{II.1}$$

$$|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_1'| \quad \text{и} \quad |\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_2'|.$$

Соотношение между полярными углами ϑ и ϑ_L вылета рассеянной частицы в СЦИ и в ЛС находится следующим образом. Скорость вылета рассеянной частицы в ЛС

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_c, \tag{II.2}$$

где $\mathbf{v}_c$ — скорость системы центра инерции,

$$\mathbf{v}_c = \frac{M_1\mathbf{v}_0}{M_1 + M_2}.$$

Спроецировав векторное равенство (II.2) на направление, задаваемое вектором $\mathbf{v}_c$, и перпендикулярное ему направление, находим, что

$$v_L \cos\vartheta_L = v_1 \cos\vartheta + v_c, \quad v_L \sin\vartheta_L = v_1' \sin\vartheta \tag{II.3}$$

Азимутальные же углы в ЛС и СЦИ, очевидно, равняются друг другу:

$$\varphi_L = \varphi. \tag{II.4}$$

Из уравнений (II.3) получаем, исключая v_L, что

$$\operatorname{tg}\vartheta_L = \frac{\sin\vartheta}{\gamma + \cos\vartheta}, \tag{II.5}$$

где

$$\gamma = \frac{v_c}{v_1'} = \frac{M_1}{M_2}.$$

Заметим, что точно такое же по форме выражение получается и для экзотермической реакции, но γ в этом случае определяется другим равенством:

$$\gamma = \left(\frac{M_1M_1'}{M_2M_2'} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon + Q}\right)^{1/2}, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{M_1M_2}{2(M_1 + M_2)} v_0^2. \tag{II.6}$$

Здесь M_1', M_2' — массы вылетающих частиц, Q — теплота реакции.