Глава 9
Излучение

Как я указал ранее (в начале седьмой главы), наши рассуждения охватывают частный случай электромагнитного излучения, которое характеризуется следующими чертами:

1) масса покоя исчезает, что делает энергию α_s линейной функцией импульса p_s; до сих пор мы считали эту функцию квадратичной;

2) $\zeta = 1$ или, другими словами, число частиц или квантов является неопределенным.

Эти два свойства не взаимонезависимы. Действительно, в разделе, посвященном аннигиляции материи, мы показали, что кванты, имеющие массу покоя, практически исчезают, если число их остается неопределенным.

Между излучением и случаем бозе-эйнштейновской конденсации существует, разумеется, формальная аналогия, так как оба случая характеризуются условием $\zeta = 1$.

Для получения обычной теории достаточно рассмотреть нашу общую формулу для средних чисел заполнения в случае Бозе, а именно:

$$\overline{n}_s = \frac{1}{\frac{1}{\zeta}e^{\mu\alpha_s} - 1},$$

положив в ней $\zeta = 1$ и $\alpha_s = h\nu_s$ (и, разумеется, $\mu = \frac{1}{kT}$). Таким образом,

$$\overline{n}_s = \frac{1}{e^{\frac{h\nu_s}{kT}} - 1}, \tag{9.1}$$

дает среднее число квантов $h\nu_s$, в s-м состоянии (или число s-х осцилляторов полого пространства). Принимая во внимание, что имеется (см. гл. 7)

$$\frac{8\pi V\nu^2 d\nu}{c^3} \tag{9.2}$$

уровней (или осцилляторов) с ν_s, лежащим между ν и $\nu + d\nu$, получаем для плотности энергии (т. е. для $V = 1$) монохроматического излучения в интервале между ν и $\nu + d\nu$ выражение

$$\frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu, \tag{9.3}$$

т. е. знаменитую формулу Планка.

Есть, однако, одна сторона дела, которую следует обсудить подробнее. Я умышленно указал в предыдущих фразах на тесную аналогию между состоянием, отмечаемым индексом s и способным «вместить» один, два, три, ... квантов $h\nu_s$, и квантовомеханическим осциллятором. Если принять эту точку зрения (которая, кстати сказать, является исторически наиболее ранней), то количества энергии $n_s h\nu_s$, или

$$0,\ h\nu_s,\ 2h\nu_s,\ 3h\nu_s,\ \ldots\,, \tag{9.4}$$

приобретают смысл энергетических уровней этого осциллятора. Но уровни осциллятора являются в квантовой механике не целыми, а «полунечетными» кратными некоторой единицы классической частоты, умноженной на h. Этот результат теории был подтвержден опытом во всех подвергавшихся проверке случаях. Теоретику трудно удержаться от вопроса: будет ли какая-нибудь разница, если заменить схему уровней (9.4) схемой

$$\frac{1}{2}h\nu_s,\ \frac{3}{2}h\nu_s,\ \frac{5}{2}h\nu_s,\ \ldots? \tag{9.5}$$

Это новое предположение не покрывается нашей формулой (7.1):

$$Z = \sum_{(n_s)} e^{-\mu \sum\limits_s n_s \alpha_s}$$

(в которой суммирование производится по всем допустимым комбинациям n_1, n_2, ... , n_s, ...), так как во всех рассуждениях, основанных на этой формуле, мы всегда должны были считать n_s, целыми числами. Однако нетрудно оценить изменения, вызываемые новым предположением. Дело в том, что в общем методе «статистической суммы» (т. е. суммирование по состояниям) абсолютное значение нулевого уровня энергии не играет роли. Если прибавить ко всем уровням системы постоянную C, то эта постоянная выпадет из всех результатов, если, конечно, не считать того, что средняя энергия U будет больше на величину этой постоянной. Но выражение (9.5) отличается от (9.4) лишь тем, что все уровни системы увеличены на постоянную

$$\sum_s \frac{h\nu_s}{2} = \frac{h}{2}\sum_s \nu_s. \tag{9.6}$$

Правда, эта постоянная бесконечна. Мы можем сказать только следующее: если изменить схему уровней согласно (9.5) вплоть до уровня с индексом $s = r$ (где r — какое-нибудь большое число), считая, разумеется, при этом нулевую энергию, равную

$$\frac{h}{2}\sum_{s=1}^{r} \nu_s,$$

чем-то неизменно присутствующим и не могущим проявиться ни в каком опыте по испусканию и поглощению, то ничего не изменится, каким бы большим ни было выбрано число r, и, быть может, можно пойти на то, чтобы $r \to \infty$. Однако нет никакой необходимости ломать себе голову над тем, допустимо ли вводить эту «бесконечную нулевую энергию». Совершенно очевидно, что вся эта процедура не может восприниматься серьезно и введена лишь для того, чтобы удовлетворить «квантового теоретика», которого полунечетные квантовые числа устраивают больше, чем целые.

С совершенно новой точкой зрения мы встречаемся в недавней работе Пенга и Борна, ставящей себе целью преодоление значительно более серьезных трудностей, возникающих в теории излучения (и вообще в квантовой теории поля), когда мы переходим от рассмотрения состояния термодинамического равновесия к квантово-механическому исследованию индивидуальных процессов взаимодействия. Сможет ли теория Борна и Пенга действительно преодолеть эти трудности — в настоящий момент еще нельзя сказать. Здесь я хочу лишь кратко показать, как эти авторы подходят к проблеме равновесия.

Борн и Пенг приписывают в своей теории любому из осцилляторов полого пространства (характеризуемому индексом s) две фундаментально различные «ситуации» (я говорю «ситуации» потому, что термин «состояние» уже использован). Осциллятор может быть не возбужден вовсе — когда его энергия равна нулю, либо он может быть возбужден, и тогда его энергия равна одной из энергий (9.5). Во втором случае мы можем сказать, что он «вмещает» 0, 1, 2, 3, ... квантов или «атомов излучения» (мы будем для простоты считать числами заполнения осциллятора числа $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$). Так же, как и в обычной теории, число квантов остается неопределенным. Однако число осцилляторов, которые вообще возбуждены, должно быть равно заданному числу, которое мы обозначим через N.

Теория должна быть построена заново; впрочем, она очень проста. Начнем с (7.1), где, как и в (7.4), снова положим

$$e^{-\mu\alpha_s} = z_s, \qquad \mu = \frac{1}{kT}; \tag{7.4}$$

тогда

$$Z = \sum_{(n_s)} z_1^{n_1}\, z_2^{n_2} \ldots z_s^{n_s} \ldots \tag{9.7}$$

Новые предположения сводятся к тому, что каждому n_s приписываются значения

$$n_s = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \tag{9.8}$$

впрочем, с тем добавочным условием, что N, и только N, из всех n_s отличны от нуля.

Чтобы ввести это условие, пользуясь, как и в предыдущих случаях, комплексным интегрированием, прежде всего умножим каждую степень $z_r^{n_r}$ (с $n_r \neq 0$) на величину ζ и затем образуем сумму, не обращая внимания на добавочное условие. В результате получим:

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \prod_s (1 + \zeta z_s^{\frac{1}{2}} + \zeta z_s^{\frac{3}{2}} + \ldots) = \prod_s \left(1 + \zeta z_s^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - z_s}\right) = \\ &= \prod_s \left(1 + \frac{\zeta}{z_s^{-\frac{1}{2}} - z_s^{\frac{1}{2}}}\right) = \prod_s \left(1 + \frac{\zeta}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\mu\alpha_s}{2}\right)}\right). \end{aligned} \tag{9.9}$$

Наше Z является, очевидно, коэффициентом при ζN в $f(\zeta)$. Следовательно, в результате процесса, который мы уже дважды детально излагали, получим:

$$\log Z = -(N+1)\log\zeta + \log f(\zeta), \tag{9.10}$$

где ζ является действительным положительным корнем уравнения

$$0 = -\frac{N+1}{\zeta} + \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \tag{9.11}$$

(в выражении (9.10) опущен некоторый поправочный член, читатель, если захочет, может сам легко убедиться в допустимости этого). Из последнего выражения (9.9) и из (9.11), где мы опускаем несущественную единицу в $N+1$, без труда получаем

$$N = \sum_s \frac{1}{\frac{2}{\zeta}\operatorname{sh}\left(\frac{\mu\alpha_s}{2}\right)+1}. \tag{9.12}$$

Легко догадаться, что означает выражение под знаком суммы: поскольку N есть число возбужденных осцилляторов, это выражение является средним «числом возбуждения» (противопоставляемым среднему числу заполнения $\overline{n}_s$).

Вычислим оба эти числа, начиная с последнего, поскольку оно нам более знакомо. Рассмотрим статистическую сумму (9.7). Отдельные ее члены являются, как мы знаем, относительными вероятностями различных возможных состояний целого (каждое состояние характеризуется совокупностью чисел n_s). Величина $\overline{n}_s$ для данного s находится путем умножения каждого члена на соответствующее число n_s суммирования и деления на само Z. Это может быть сделано следующим образом[1]:

$$\overline{n}_s = z_s\frac{\partial \log Z}{\partial z_s} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \log Z}{\partial \alpha_s}. \tag{9.13}$$

Воспользуемся теперь выражением (9.10) для $\log Z$. Согласно (9.11) неявное (через посредство ζ) дифференцирование не дает ничего, и из (9.9) имеем:

$$\log f(\zeta) = \sum_s \log\left(1 + \frac{\zeta}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\mu\alpha_s}{2}\right)}\right). \tag{9.14}$$

[1]Это выражение известно из (7.2), и мы можем позаимствовать его оттуда.

Следовательно,

$$\overline{n}_s = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \log Z}{\partial \alpha_s} = \frac{1}{1+\dfrac{\zeta}{2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\mu\alpha_s}{2}\right)}}\;\frac{\zeta}{2\left[\mathrm{sh}\left(\dfrac{\mu\alpha_s}{2}\right)\right]^2}\;\frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\mu\alpha_s}{2} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{2}{\zeta}\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\mu\alpha_s}{2}\right)+1}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{cth}\,\frac{\mu\alpha_s}{2} = \frac{1}{\dfrac{2}{\zeta}\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\mu\alpha_s}{2}+1\right)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\mu\alpha_s}-1}\right). \tag{9.15}$$

Полученное выражение имеет вполне прозрачный смысл, однако мы отложим его обсуждение.

Среднее число возбуждения s-го осциллятора (обозначим это число через $\overline{e}_s$) получается из (9.7) суммированием по всем членам, у которых n_s отлично от нуля, и делением на само Z. Так как рассматриваемые члены исчезают в случае $z_s = 0$, а другие остаются неизменными, то мы получаем:

$$\overline{e}_s = \frac{Z - Z(z_s = 0)}{Z} = 1 - \frac{Z(z_s = 0)}{Z}.$$

Отсюда

$$\log(1-\overline{e}_s) = \log Z(z_s = 0) - \log Z.$$

Так как $z_s = 0$ означает, что $\alpha_s = \infty$, то из (9.10) и (9.9) получаем

$$\log(1-\overline{e}_s) = -\log\left(1+\frac{\zeta}{2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\mu\alpha_s}{2}\right)}\right) \tag{9.16}$$

или

$$\overline{e} = 1 - \frac{1}{1+\dfrac{\zeta}{2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\mu\alpha_s}{2}\right)}} = \frac{1}{\dfrac{2}{\zeta}\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\mu\alpha_s}{2}\right)+1}. \tag{9.17}$$

Действительно, это выражение и есть выражение, стоящее под знаком суммы в (9.12); оно же является первым множителем в (9.15).

Обсуждение этих результатов не представляет трудности. Числа возбуждения образуют нечто, весьма похожее на распределение Ферми, с той лишь малосущественной разницей, что вместо $e^{\mu\alpha_s}$ стоит $2\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\mu\alpha_s}{2}$. Если мы хотим, чтобы (9.15) представляло виртуально формулу Планка, то $\overline{e}_s$ должно быть сильно вырожденным, т. е. ζ должно быть очень большим. Согласно (9.12) это имеет место при очень больших N. Тогда $\overline{e}_s$ будет очень близко к единице, вплоть до некоторого $s(\approx N)$, где оно падает до нуля. Выражение (9.15), которое мы можем писать в виде

$$\overline{n}_s = \overline{e}_s\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\mu\alpha_s} - 1}\right), \tag{9.18}$$

не будет при этом существенно отличаться от распределения Планка при условии, что N достаточно велико, чтобы виртуально охватить все распределение Планка. (Прекращая процесс около $s \approx N$, мы лишь прекращаем вносить в нулевую энергию доли $\dfrac{1}{2}h\nu_s$, вследствие чего нулевая энергия остается конечной.)

На этом мы и закончим, сделав лишь одно дополнительное замечание.

Нулевая энергия остается конечной не в силу условия для N, а в силу допущения нулевого уровня для каждого осциллятора. Условие для N необходимо для ограничения общего числа возбужденных уровней снизу, а не сверху. Действительно, ничто не изменится, если заменить это условие неравенством: число возбужденных уровней должно быть $\geqslant N$ (условие $\leqslant N$, напротив, не годится).

Чтобы убедиться в этом, вспомним, что коэффициент ζ^N в $f(\zeta)$ был изолирован посредством образования вычета

$$\zeta^{-N-1}f(\zeta), \tag{9.19}$$

что это приводит к (9.10) и что, в результате, ζ должно быть очень большим. Если бы мы теперь вместо этого воспользовались условием неравенства ($\geqslant N$), то нам следовало бы собрать коэффициенты при всех $\zeta^{N'}$, для которых $N' \geqslant N$. Однако, чтобы избежать второго бесконечного процесса, соберем вместо этого те коэффициенты, для которых $N' < N$, и вычтем их из $f(1)$ (являющейся суммой всех коэффициентов). Таким образом мы составляем

$$(\zeta_{-1} + \zeta_{-2} + \ldots + \zeta^{-N})f(\zeta) = \zeta^{-1}\frac{1 - z^{-N}}{1 - \zeta_{-1}}f(\zeta) = \frac{1 - \zeta^{-N}}{\zeta - 1}f(\zeta)$$

и для Z в нашем случае получаем:

$$Z = f(1) - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1 - \zeta^{-N}}{\zeta - 1} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Следует указать, что подынтегральное выражение не имеет сингулярности при $\zeta = 1$ (вообще имеется лишь одна сингулярность в начале координат); следовательно, мы можем выбрать для интегрирования окружность с $|\zeta| > 1$ и притом сколь угодно большую. После этого мы разбиваем интеграл на сумму двух интегралов соответственно двум членам в числителе. Первый, согласно теореме Коши, сокращается с $f(1)$ и

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\zeta^{-N}}{\zeta - 1} f(\zeta)\, d\zeta.$$

То, что теперь при $\zeta = 1$ имеется сингулярность, несущественно, так как уравнение уже получено; нам остается только оценить его. Мы делаем это, пользуясь методом наиболее крутого спуска. Тогда, очевидно, для очень большого N:

1) при $\zeta > 1$ будет иметься седлообразная точка, при условии, однако, что если бы множители равнялись не $\dfrac{\zeta^{-N}}{\zeta - 1}$, а ζ^{N-1}, то она находилась бы при ζ, значительно большем единицы;

2) при этом результат будет практически тем же, что и ранее (изменение не может быть большим, чем в случае изменения N на единицу).

Если бы условие для N было опущено вовсе, то мы получили бы, как и в предыдущих случаях, $\zeta = 1$. Это недопустимо, так как легко видеть, что результат сильно отличался бы от формулы Планка.