ПРЕДИСЛОВИЕ

Зачем изучать геометрию?

Назначение этой книги — ввести начинающего или уже работающего физика в весьма широкий круг аналитических методов дифференциально-геометрического происхождения, которые ныне всё чаще и чаще применяются в теоретической физике. В наши дни при обучении физике «наглядное» и «интуитивное» рассмотрение физических явлений принято ставить во главу угла. Однако при обучении студентов-физиков математике геометрическими идеями и методами, за исключением самых простейших, обычно пренебрегают. Это поразительное пренебрежение наглядностью математического аппарата возникло не сразу, а является продуктом многовековой эволюции. Для античных и средневековых натурфилософов геометрия, несомненно, была крайне важна; и Птолемей, и Коперник, и Кеплер, и Галилей — все излагали свои рассуждения в геометрической форме. Но когда Декарт ввёл в эвклидову геометрию координаты, геометрия стала рассматриваться как приложение алгебры. С той поры роль геометрии в подготовке ученого начала сходить на нет, и в настоящее время студентам старших курсов университетов — физикам или математикам-прикладникам — почти вовсе не приходится сталкиваться с геометрией.

Одна из причин этого очевидна: сравнительно простая геометрия трёхмерного эвклидова мира (в котором, как думалось физику 19-го столетия, мы живём) осваивалась легко, в то время как изучение огромного разнообразия аналитических приёмов, которые необходимы для решения дифференциальных уравнений физики, было делом весьма нелегким и отнимало массу времени. Другая причина, наверное, состоит в том, что сами эти аналитические приёмы и методы разрабатывались, по крайней мере отчасти, на основе глубокого убеждения физиков, что законы природы могут быть записаны в виде дифференциальных уравнений, и это убеждение вплоть до самого последнего времени позволяло физикам с чистой совестью пренебрегать геометрией.

Однако два достижения науки нашего столетия решительно изменили взгляды физиков 20-го века на соотношение между геометрией и анализом. Первым из них явилась теория относительности, согласно которой эвклидово трёхмерное пространство физика 19-го века — лишь приближение к правильному описанию физического мира. Вторым, лишь начинающим играть свою роль, было осознание математиками 20-го века, вслед за Э. Картаном, того, что соотношение между геометрией и анализом двустороннее: с одной стороны, анализ можно взять за основание при изучении геометрии, а с другой стороны, изучение геометрии естественно приводит к развитию определённого аналитического аппарата (производная Ли, исчисление дифференциальных форм и т. д.) и определённых понятий (многообразие, расслоенное пространство, трактовка векторов как дифференцирований и т. д.), играющих чрезвычайно важную роль в приложениях анализа. Согласно современным воззрениям, геометрия остается подчинённой анализу. Например, основное понятие дифференциальной геометрии, понятие дифференцируемого многообразия, определяется на языке теории вещественных чисел и дифференцируемых функций. Но никакого вреда в этом нет; наоборот, благодаря этому становится возможным представить понятия анализа геометрически, а это имеет огромное эвристическое значение.

Именно потому, что современная дифференциальная геометрия разрабатывает и эксплуатирует эту тесную взаимосвязь между геометрическими и аналитическими понятиями и идеями, она становится всё более и более важной в теоретической физике, упрощая математический формализм и углубляя физическое понимание. Это возрождение геометрии оказало влияние не только на специальную и общую теории относительности, очевидно геометрические по своей сути, но и на другие разделы физики, где на авансцену выходит уже не геометрия физического пространства, а геометрия более абстрактных пространств, — термодинамику, гамильтонов формализм, гидродинамику и физику элементарных частиц.

Цели этой книги

В этой книге я хотел дать читателю представление о наиболее важных понятиях дифференциальной геометрии 20-го века, стараясь при этом всюду использовать наглядный геометрический способ рассуждений, столь полезный для развития физической интуиции. Книга призвана научить математике, а не физике. Но в неё включены разнообразные приложения этой математики к разделам физики, хорошо знакомым большинству студентов старших курсов. Надеюсь, что эти примеры окажутся более чем просто иллюстрациями к математическим теоремам, — новые математические формулировки знакомых физических результатов должны дать читателю более глубокое понимание физики.

Ниже будет более подробно обсуждаться, какая подготовка требуется для чтения этой книги, а здесь, пожалуй, полезно привести краткий список «знакомых» понятий, которые будут показаны под новым углом зрения: векторы, тензоры, скалярное произведение, специальная теория относительности, сферические гармоники и группа вращений (а также операторы момента), законы сохранения, объём, теория интегрирования, ротор и векторное произведение, определитель, уравнения в частных производных и условия их интегрируемости, формулы Гаусса и Стокса из векторного анализа, термодинамика простых систем, теорема Каратеодори (и второе начало термодинамики), гамильтоновы системы в фазовом пространстве, уравнения Максвелла, гидродинамика (включая теорему о сохранении циркуляции), векторный анализ в криволинейных координатах, квантовая теория заряженного скалярного поля. Помимо этих более или менее привычных тем есть и другие, о которых, хотя их обычно и не включают в обязательные курсы, большинство читателей наверняка кое-что слышало: теория групп Ли и симметрия, открытая и замкнутая космологические модели, риманова геометрия и теория физических калибровочных полей. То, что все эти темы можно исследовать методами дифференциальной геометрии, служит явным указанием на ту роль, которую она, по-видимому, будет играть в теоретической физике будущего.

Я считаю, что читателю важно выработать наглядный стиль мышления и развить в себе чувство «естественности» того или иного геометрического аппарата в определённых ситуациях. Имея это в виду, я постоянно подчёркиваю идею, что тензоры — это геометрические объекты, определённые независимо от какой-либо системы координат. Компонентам и координатным преобразованиям неизменно отводится вторая роль — всюду, где только возможно, я записываю уравнения в безындексной форме, с тем чтобы подчеркнуть их независимость от выбора системы координат. Я не стремился дать логически замкнутое или аксиоматическое изложение и потому оставил в стороне ряд аспектов, которые математик счел бы основополагающими. Разумеется, я даю доказательства всех наиболее важных результатов, если эти доказательства не слишком уже громоздки (в таком случае я даю точные ссылки на литературу), но насколько только это было возможно, я всюду старался добиться, чтобы главная геометрическая идея доказательства чётко выделялась на фоне выкладок. Я хотел показать красоту, элегантность и естественность излагаемых математических приемов, не затемняя суть дела излишними подробностями.

Как пользоваться этой книгой

Первая глава содержит обзор основных математических сведений, которые предполагаются известными читателю, а также краткое введение в некоторые разделы, в частности в топологию, с которыми старшекурсник может и не быть знаком. Следующие три главы являются ядром книги; в них вводятся тензоры, производные Ли и дифференциальные формы. По этим главам рассеяны и некоторые приложения излагаемого аппарата, но большинство физических приложений систематически разбираются в гл. 5. В последней, шестой главе, посвящённой римановой геометрии, представлен более сложный материал, имеющий непосредственное отношение к физике элементарных частиц и общей теории относительности, для которых дифференциальная геометрия является повседневным рабочим инструментом.

Материал этой книги может быть использован для семестрового курса, при условии что наиболее сложные разделы будут представлены лишь выборочно, по усмотрению лектора. Наиболее важные разделы можно использовать также для специального курса по математическим методам физики, лекций на десять. Я читал такой спецкурс для аспирантов, основываясь на §§ 2.1—2.3, 2.5—2.8, 2.12—2.14, 2.16, 2.17, 2.19—2.28, 3.1—3.13, 4.1—4.6, 4.8, 4.14—4.18, 4.20—4.23, 4.25, 4.26, 5.1, 5.2, 5.4—5.7 и 5.15—5.18. Надеюсь, преподаватели сами будут экспериментировать с отбором материала для курса, учитывая аудиторию: для многих студентов геометрическое изложение понятнее чисто аналитического, и для них только полезно как можно раньше войти в круг геометрических идей. Для того чтобы читателю было легче ориентироваться в книге, заголовки параграфов набраны двумя различными шрифтами. Основной материал маркируется **жирным прямым** шрифтом заголовков, а более сложный или дополнительный — ***жирным курсивом*** К последней категории относится вся заключительная глава. Такие же шрифтовые выделения помогают отличить упражнения, лежащие в центральном русле изложения, от периферийных.

Упражнения составляют неотъемлемую часть книги. Они расположены внутри текста, и имеется в виду, что читатель решает их по мере их появления. Обычно текст, следующий за упражнением, предполагает, что это упражнение уже проработано и понято. Читатель, у которого нет времени решать упражнение, должен во всяком случае прочитать его и постараться понять результат. В конце книги даны решения и указания к некоторым упражнениям.

Требования, предъявляемые к читателю

Бóльшая часть этой книги должна быть понятна студентам-старшекурсникам или начинающим аспирантам, специализирующимся в теоретической физике или прикладной математике. Предполагается, что читатель достаточно уверенно владеет векторным анализом, дифференциальным и интегральным исчислением функций многих переменных, матричной алгеброй (включая собственные векторы и определители), а также — немного — теорией операторов в том виде, как она изучается в элементарной квантовой механике. Физические приложения брались из самых разных областей, так что не всякий будет чувствовать себя как дома во всех из них. Многие приложения можно пропустить при первом чтении без особого ущерба для связности изложения, но, пожалуй, нереалистично пытаться читать эту книгу без некоторого знакомства с классической механикой, специальной теорией относительности и электродинамикой. В библиографии в конце первой главы перечислен ряд руководств, дающих достаточную подготовку для чтения этой книги.

Я хотел бы выразить признательность многим лицам — учителям и коллегам, которые помогли мне оценить красоту дифференциальной геометрии и

понять важность её для физики. Особая моя благодарность Кипу Торну, Рэфиэлу Соркину, Джону Фридмэну и Фрэнку Эстабруку. Мне хочется также поблагодарить первых двух из названных лиц и многих прилежных студентов Университетского колледжа в Кардиффе за замечания по поводу первых вариантов этой книги. Двое из моих учеников, Нил Коминз и Брайен Уэйд, заслуживают особого упоминания за вдумчивые, конструктивные советы. Мне приятно поблагодарить Сюзэн Болл, Джейн Оуэн и Маргрит Уилкинсон за быструю и аккуратную перепечатку многочисленных вариантов рукописи. Наконец, я благодарен жене за терпение и поддержку, особенно в последние горячие месяцы.

Бернард Шутц

Кардифф, 30 июня 1979