1. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

В этой главе даётся обзор понятий из различных разделов математики, на которых будут основываться геометрические рассмотрения последующих глав. Бо́льшая часть излагаемого ниже должна быть известна большинству читателей, но два раздела — топология и теория отображений — наверняка незнакомы многим читателям; с них мы и начнём. Главная причина включения этих разделов — то, что это нужно для строгого определения понятия многообразия, которое мы вводим в самом начале гл. 2. Читатели, незнакомые с топологией, могут пропустить первые два параграфа при первом чтении и вернуться к ним лишь после того, как почувствуют в этом потребность, читая вторую главу.

1.1. ПРОСТРАНСТВО R^n И ЕГО ТОПОЛОГИЯ

Пространство R^n — это обычное n-мерное пространство векторной алгебры; точка в R^n — это последовательность из n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Интуитивно мы представляем себе это пространство *непрерывным*: для любой данной точки в R^n существуют сколь угодно близкие точки, и отрезок, соединяющий две любые точки, может быть разбит на сколь угодно много отрезков, концы которых также являются точками R^n. Эти свойства резко отличаются, скажем, от свойств решёток, таких как совокупность всевозможных наборов из n целых чисел $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Понятие непрерывности в пространстве R^n получает точный смысл при изучении его *топологии*. В математике слово «топология» имеет два различных значения. Та топология, которую мы сейчас будем изучать, может быть названа *локальной*. В противоположность ей *глобальная* топология — это изучение свойств пространства «в целом», отличающих, например, сферу от тора. Мы немного поговорим о глобальной топологии позже, в частности в главе о дифференциальных формах. Начнем же мы с краткого обзора локальной топологии.

Основным понятием здесь является понятие окрестности точки в R^n. Его можно определить, введя функцию расстояния между точками $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ в R^n:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2]^{1/2}. \quad (1.1)$$

Окрестность радиуса r точки $\mathbf{x}$ в R^n — это множество точек $N_r(\mathbf{x})$, расстояние которых до $\mathbf{x}$ меньше r. Для случая R^2 это показано на рис. 1.1. Непрерывность пространства может быть теперь более точно определена при помощи малых окрестностей. Множество точек в R^n *дискретно*, если каждая точка этого множества имеет окрестность, не содержащую

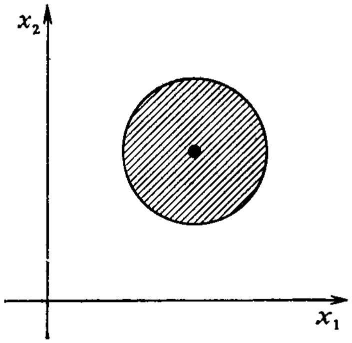

Рис. 1.1. Функция расстояния $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задаёт окрестность в R^2, представляющую собой внутренность круга, ограниченного окружностью радиуса r. Сама окружность не является частью этой окрестности.

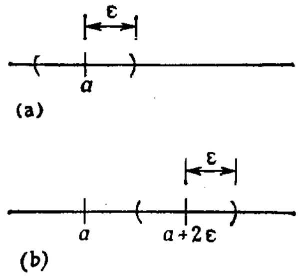

Рис. 1.2. (a) Любая окрестность точки $x = a$ содержит точки, расположенные слева от a, в то время как (b) любая точка, лежащая справа от a, обладает окрестностью, целиком расположенной по правую сторону от a.

других его точек. Ясно, что само R^n не дискретно. Говорят, что множество точек S в R^n *открыто*, если каждая точка $\mathbf{x}$ из S имеет окрестность, целиком содержащуюся в S. Ясно, что дискретные множества не открыты, и дальше мы их не будем использовать. Простой пример открытого множества в пространстве R^1 (последнее обозначается также просто через R) — множество всех точек x, для которых $a < x < b$ для двух заданных вещественных чисел a и b. Важно уяснить себе, что множество точек x, для которых $a \leqslant x < b$, *не* открыто, поскольку точка $x = a$ не имеет окрестности, целиком содержащейся в этом множестве: часть точек *любой* окрестности точки $x = a$ меньше, чем a, и поэтому они выходят из этого множества (см. рис. 1.2). Это, разумеется, весьма общее свойство: любой разумный «кусок» пространства R^n будет открытым, если не включать в этот кусок его границу.

Представление о том, что отрезок, соединяющий любые две точки R^n, бесконечно делим, можно сделать точным, если сказать, что любые две различные точки в R^n имеют непересекающиеся окрестности. (У них есть и такие окрестности, которые *пересекаются*, но если сделать их достаточно маленькими, они пересекаться не будут.) Это свойство называется *отделимостью* (или *хаусдорфовостью*) пространства R^n. Можно построить и неотделимые пространства, но для наших целей они неестественны, и мы о них говорить не будем.

Итак, мы использовали функцию расстояния $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для того, чтобы определить окрестности и, тем самым, открытые множества. В этом смысле мы говорим, что $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *индуцирует топологию* в R^n. Под этим мы подразумеваем, что она позволяет определить открытые множества в R^n, обладающие следующими свойствами:

(Ti) если O_1 и O_2 открыты, то и их пересечение $O_1 \cap O_2$ открыто;

(Tii) объединение любой (возможно, бесконечной) совокупности открытых множеств открыто.

Для того чтобы свойство (Ti) было применимо ко всем открытым множествам в R^n, будем считать пустое множество открытым *по определению*. (В более обстоятельных курсах *топологическое пространство* определяется как совокупность точек с заданным набором открытых множеств, удовлетворяющим (Ti) и (Tii). С этой точки зрения функция расстояния $d(x, y)$ позволяет превратить пространство R^n в топологическое.)

Уместно спросить, насколько индуцированная топология зависит от точного вида функции $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Предположим, например, что мы используем другую функцию расстояния

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [4(x_1 - y_1)^2 + 0.1(x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}. \quad (1.2)$$

Она также определяет окрестности и открытые множества в R^2, как это изображено на рис. 1.3. Решающим здесь является то обстоятельство, что каждое множество, открытое по отношению к $d'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, будет открыто и по отношению к $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, и наоборот. Это несложно доказать, основываясь на том, что любая данная d-окрестность точки $\mathbf{x}$ содержит внутри себя некоторую d'-окрестность и наоборот. Другими словами, для данной d-окрестности точки $\mathbf{x}$ радиуса ε можно подобрать столь малое число δ, что d'-окрестность точки $\mathbf{x}$ радиуса δ будет целиком содержаться в первой окрестности (см. рис. 1.4). Отсюда можно заключить, что каждое множество, открытое по отношению к $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, открыто также и по отношению к $d'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и наоборот. Мы говорим поэтому, что d и d' индуцируют одну и ту же топологию в R^n. Читатель может проверить, что функции расстояния

$$d''(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp[d(\mathbf{x}, \mathbf{y})] - 1, \tag{1.3}$$

$$d'''(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|) \tag{1.4}$$

также индуцируют ту же топологию. Соответствующие окрестности в R^2 изображены на рис. 1.5. Так что, хоть мы и

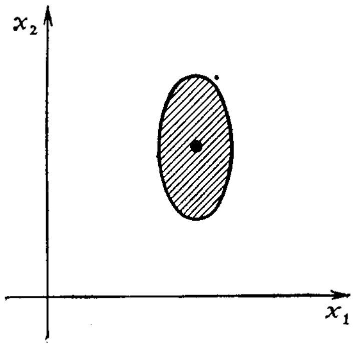

Рис. 1.3. Функция расстояния $d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [4(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$ определяет окрестность в R^2, состоящую из точек, лежащих внутри эллипса $4(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = r^2$. Как и в случае рис. 1.1, сам эллипс не принадлежит к окрестности.

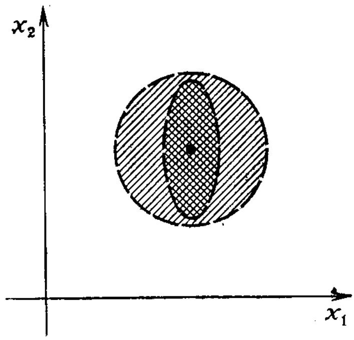

Рис. 1.4. В R^2 d-окрестность радиуса ε (ограниченная окружностью) целиком содержит в себе d'-окрестность радиуса δ (ограниченную эллипсом, показанным на рис. 1.3) при $\delta < \varepsilon$. При $\delta > 2\varepsilon$ включение заменяется на обратное.

начинали с обычной эвклидовой функции расстояния $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, топология, которую мы определили, не слишком зависит от вида d. Она называется «естественной» топологией R^n. Топология — более «грубое» понятие по сравнению с расстоянием. Нам не нужно знать точное значение расстояния между точками, поскольку расстояние можно определить по-разному. Нужно лишь знать, что расстояние между точками может быть сделано произвольно малым и что расстояние между двумя различными точками никогда не может быть равно нулю.

Наше определение окрестности было привязано к конкретной функции расстояния, но, поскольку топология многообразия есть объект более общий, чем конкретная функция расстояния, слово «окрестность» будет часто использоваться в другом смысле. Нам часто будет удобно считать *окрестностью* точки **x** любое множество, содержащее открытое множество, содержащее **x**. Из контекста каждый раз будет ясно, что именно имеется в виду под «окрестностью».

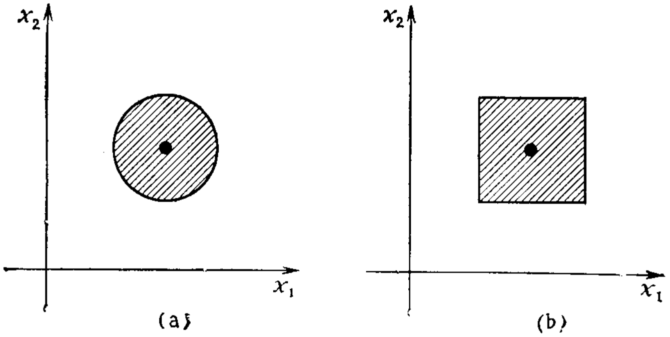

Рис. 1.5. (a) В R^2 функция расстояния d'' задаёт круговые окрестности, меньшие при том же радиусе, чем окрестности, задаваемые функцией d. (b) Окрестность, отвечающая функции d''', ограничена квадратом со стороной $2r$.

1.2. ОТОБРАЖЕНИЯ

Понятие отображения, хоть и очень простое, будет столь полезно в дальнейшем, что стоит потратить немного времени на его обсуждение. Отображение f из пространства M в пространство N — это правило, сопоставляющее всякому элементу x из M некоторый единственный элемент $f(x)$ из N. Полезно представлять себе картинку типа показанной на рис. 1.6. Простейший пример отображения — это обычная вещественнозначная функция на R. Такая функция f сопостав-

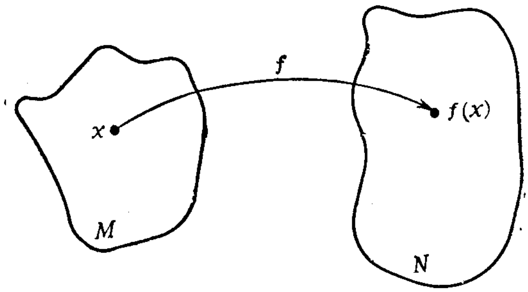

Рис. 1.6. Наглядное представление отображения f: $M \to N$; показано, что $x \mapsto f(x)$.