расстояния, слово «окрестность» будет часто использоваться в другом смысле. Нам часто будет удобно считать *окрестностью* точки **x** любое множество, содержащее открытое мно-

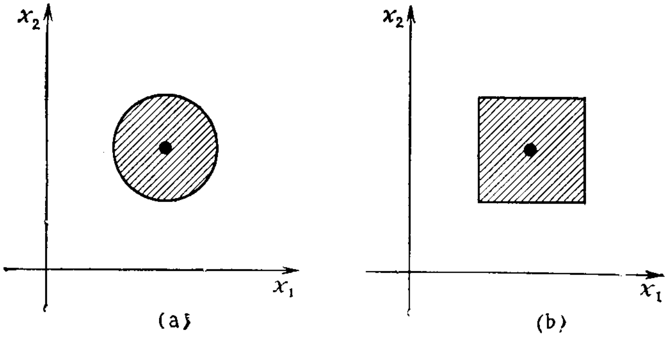

Рис. 1.5. (a) В R^2 функция расстояния d'' задаёт круговые окрестности, меньшие при том же радиусе, чем окрестности, задаваемые функцией d. (b) Окрестность, отвечающая функции d''', ограничена квадратом со стороной $2r$.

жество, содержащее **x**. Из контекста каждый раз будет ясно, что именно имеется в виду под «окрестностью».

1.2. ОТОБРАЖЕНИЯ

Понятие отображения, хоть и очень простое, будет столь полезно в дальнейшем, что стоит потратить немного времени на его обсуждение. Отображение f из пространства M в про-

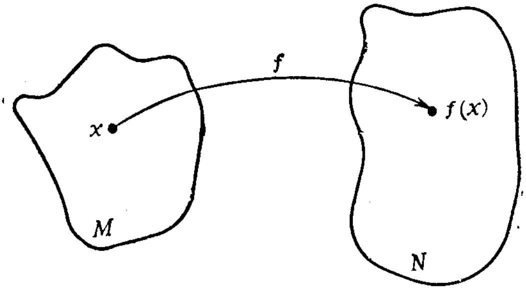

Рис. 1.6. Наглядное представление отображения f: $M \to N$; показано, что $x \mapsto f(x)$.

странство N — это правило, сопоставляющее всякому элементу x из M некоторый единственный элемент $f(x)$ из N. Полезно представлять себе картинку типа показанной на рис. 1.6. Простейший пример отображения — это обычная вещественнозначная функция на R. Такая функция f сопоставляет точке x из R точку $f(x)$, снова из R. (Это служит иллюстрацией того факта, что пространства M и N не обязательно различны.) Подобное отображение обычным образом представлено на рис. 1.7. Отметим, что отображение даёт единственное $f(x)$ для каждого x, но вовсе не обязательно, чтобы единственное x отвечало каждому $f(x)$. На рисунке и x_0, и x_1 отображаются в одно и то же значение. Такое отображение назовем *слепляющим*[1]. Более общо, если f отображает M в N, то для любого подмножества S в M элементы из N, в которые отображаются точки из S, образуют множество T,

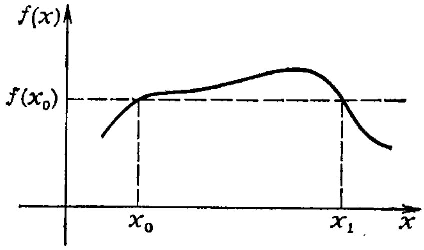

Рис. 1.7. Отображение (функция) из R в R, не являющееся взаимно-однозначным.

называемое *образом* S относительно f и обозначаемое через $f(S)$. Наоборот, множество S, состоящее из всех элементов, отображающихся в T, называется *прообразом* T и обозначается через $f^{-1}(T)$. Если данное отображение переводит несколько точек в одну, то прообраз точки из N не будет, вообще говоря, точкой в M, так что в этом случае нет *отображения* f^{-1} из N в M, ибо отображение обязано быть однозначным. Поэтому в общем случае обозначение $f^{-1}(T)$ может восприниматься лишь как единый символ — это не есть образ T относительно отображения f^{-1}, а просто некое множество, обозначаемое через $f^{-1}(T)$. Напротив, если каждая точка из $f(S)$ имеет одноточечный прообраз в S, то говорят, что f *инъективно* или *взаимно-однозначно* (сокращенно: является 1-1-*отображением*); в этом случае имеется другое 1-1-отображение f^{-1}, называемое *обратным* к f, переводящее образ M в M. Эти понятия известны из элементарного курса анализа, хотя там они, возможно, так и не назывались. Функция $f(x) = \sin x$ не инъективна (является слепляющей), поскольку $f(x) = f(x + 2n\pi) = f((2n+1)\pi - x)$ при любом целом n. Следовательно, для неё настоящей обратной функции не существует. Общепринятая обратная функция, $\arcsin y$, получается, если ограничить обычный синус на область «главных»

[1] В оригинале many-to-one. — *Прим. ред.*

значений, $-\pi/2 < x \leqslant \pi/2$, где он уже взаимно-однозначен и обратим.

Другим примером 1-1-отображения является географическая карта данной части земной поверхности: точка поверхности Земли отображается в точку на листе бумаги. Ещё один пример отображения — это поворот сферы на данный угол вокруг некоторого диаметра: точка сферы отображается в другую точку той же сферы, находящуюся от неё на фиксированном угловом расстоянии по отношению к заданной оси вращения.

Введём теперь для отображений некоторые стандартные обозначения и терминологию. То что f отображает M в N, будет сокращённо записываться так: f: $M \to N$. Для выражения того факта, что f переводит данный элемент x из M в элемент y из N, служит специальная запись f: $x \mapsto y$. Если отображение обозначается через f, то образ точки x — через $f(x)$. Если отображение есть вещественнозначная функция, скажем функция n переменных (т. е. f: $R^n \to R$), то принято среди физиков использовать один и тот же символ $f(x)$ и для значения f в точке x, и для самой функции f. Мы будем следовать этой традиции там, где из-за этого не сможет произойти недоразумений. Если имеются два отображения, f и g, f: $M \to N$ и g: $N \to P$, то определено отображение, называемое *композицией* f и g и обозначаемое через $g \circ f$, которое отображает M в P ($g \circ f$: $M \to P$). Оно строится очевидным образом: берём точку x из M, находим точку $f(x)$ из N и отображаем её при помощи g в P: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Композицию $g \circ f$ принято записывать именно в таком порядке, так что отображение, действующее первым, стоит справа.

В общем случае мы говорим об отображении из M *в* N. Если же каждая точка из N имеет прообраз (не обязательно одноточечный), то мы говорим об отображении из M *на* N[1]. Как уже отмечалось выше, в случае если прообразы одноточечны, отображение инъективно. (Отображение, которое одновременно является 1-1-отображением и отображением *на*, называется *биекцией*.) Например, пусть N — единичный открытый круг в R^2, т. е. множество всех точек $\mathbf{x}$, для которых $d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < 1$ (где $\mathbf{0}$ — начало координат в R^2), и пусть M — полусфера $\theta < \pi/2$ единичной сферы (см. рис. 1.8). Ясно, что имеется взаимно-однозначное отображение M на N.

Введённая терминология теории отображений вместе с тем, что мы уже знаем из топологии, позволяют дать полезное и короткое определение непрерывной функции или, фактически, произвольного непрерывного отображения. Отображение f: $M \to N$ ***непрерывно в точке*** x из M, если любое от-

[1] Или о *сюръективном* отображении. — *Прим. ред.*

крытое множество в N, содержащее $f(x)$, содержит образ некоторого открытого множества из M, содержащего точку x. (Предполагается, конечно же, что M и N — топологические пространства. В противном случае говорить о непрерывности бессмысленно.) Далее, f *непрерывно на* M (или просто *непрерывно*), если оно непрерывно во всех точках M. Посмотрим, как это связано с обычным определением непрерывной функции из курса математического анализа.

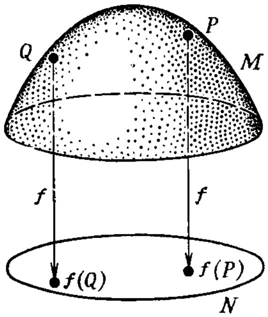

Рис. 1.8. Рассматривая круг как экваториальное сечение шара, ограниченного сферой, легко построить биективное отображение верхней полусферы на круг, используя ортогональную проекцию.

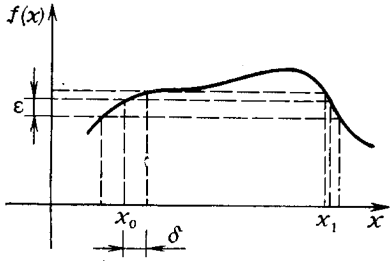

Рис. 1.9. Непрерывная функция в том смысле, как это было определено в тексте. Отметим, что f переводит окрестность точки x_0 радиуса δ в окрестность точки $f(x_0)$ радиуса ε, в то время как прообраз этой последней окрестности содержит первую, но не обязательно совпадает с ней. Он может содержать другие области оси x, например такие, как в правой части рисунка. Если f непрерывна и в этой второй окрестности, то прообраз будет открытым множеством.

Пусть f — вещественная функция одной вещественной переменной. Другими словами, f отображает R в R, переводя число x в число $f(x)$. (В наших обозначениях $f\colon R \to R$.) С точки зрения элементарного анализа f непрерывна в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ (см. рис. 1.9). Чтобы переформулировать это в терминах открытых множеств, заметим, что для R функция расстояния $d'''(\mathrm{x}, \mathrm{x}_0)$, введённая в § 1.1, сводится к $d'''(x, x_0) = |x - x_0|$. Значит, согласно этому определению, f непрерывна в точке x_0, если каждая d'''-окрестность $f(x_0)$ содержит образ некоторой d'''-окрестности точки x_0. Поскольку эти окрестности являются открытыми множествами, непрерывность в смысле определения, данного в предыдущем абзаце, влечёт за собой непрерывность в смысле элементарного математического анализа. Наоборот, непрерывность в смысле элементарного анализа влечёт за собой непрерывность в смысле нового определения, поскольку любое открытое множество в R, содержащее $f(x_0)$, содержит d'''-окрестность $f(x_0)$, которая в свою очередь содержит образ некоторого открытого множества, содержащего x_0 (а именно образ d'''-окрестности точки x_0). Итак, эти два определения эквивалентны.

Условие непрерывности отображения на всём M даже легче формулировать, чем условие непрерывности в одной точке: имеется теорема, что $f\colon M \to N$ непрерывно, если и только если прообраз каждого открытого множества из N открыт в M. Доказательство этой теоремы несложно. Если f непрерывно при всех x, то прообраз каждого открытого множества открыт, поскольку любая точка этого прообраза содержится в некотором открытом множестве, содержащемся в этом прообразе. Обратно, если прообраз каждого открытого множества из N открыт, то для каждой из своих точек он содержит некоторое открытое множество, её содержащее, так что f непрерывно в каждой точке.

Определение непрерывности на языке открытых множеств намного легче использовать и понимать, чем определение на языке «ε-δ», в особенности для функций многих переменных; оно, несомненно, является единственно пригодным для общих отображений топологических пространств.

Определив непрерывность, мы можем перейти к обычному определению дифференцируемости функций. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, определённая на некотором открытом множестве S в R^n, то мы будем называть ее *дифференцируемой класса* C^k, если все её частные производные до порядка k включительно непрерывны на S. Для краткости будем называть такую функцию C^k-функцией. Частные случаи — класс C^0 (непрерывные функции) и C^∞ (функции, у которых существуют все производные; обычно они называются бесконечно дифференцируемыми). Очевидно, что функции класса C^k являются и функциями класса C^j для всех $0 \leqslant j < k$. Можно определить и понятие производной для таких более общих непрерывных отображений. (Эти производные часто называют дифференциалами.) Интересующийся читатель может найти соответствующие определения в книгах Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette & Dillard-Bleick (1977), или Warner (1971)[1] (см. библиографию в конце главы).

Если 1-1-отображение переводит открытое подмножество M в R^n на другое открытое множество N в R^n, оно может

[1] Или у Зорича [5] (см. литературу, добавленную при переводе). — *Прим. ред.*

быть записано в виде

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{или} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}),$$

где набор $\{x_i, i = 1, \ldots, n\}$ определяет точку $\mathbf{x}$ из M и набор $\{y_i, i = 1, \ldots, n\}$ определяет аналогичную точку $\mathbf{y}$ из N. Если функции $\{f_i, i = 1, \ldots, n\}$ все класса C^k, то отображение f называется отображением класса C^k (или C^k-отображением). *Матрица Якоби* C^1-отображения — это матрица из частных производных $\partial f_i/\partial x_j$. Определитель J этой матрицы называется просто *якобианом* и часто обозначается так:

$$J = \partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.5}$$

Если якобиан в точке $\mathbf{x}$ не обращается в нуль, то *теорема об обратной функции* гарантирует взаимную однозначность отображения f на некоторой окрестности точки $\mathbf{x}$ (по поводу доказательства этой теоремы см. Шоке-Брюа и др. (1977)[1]).

Если функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $g_*(y_1, \ldots, y_n)$ связаны между собой формулой

$$g_*(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) = g(x_1, \ldots, x_n)$$

(т. е. g_* принимает такое же значение в $f(\mathbf{x})$, что и g в $\mathbf{x}$), то интеграл g по M равен интегралу g_*J по N:

$$\int_M g(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_N g_*(y_1, \ldots y_n) J \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n. \tag{1.6}$$

Поскольку g и g_* принимают одинаковые значения в соответствующих точках, часто говорят, что элемент объема $\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ заменяется на $J dy_1 \ldots dy_n$. Эта точка зрения особенно полезна, когда f рассматривается как замена координат. Хотя эта формула и общеизвестна из курса анализа, мы разберем её более подробно в § 2.25 и 4.8.

1.3. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ (ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ)

Как уже отмечалось, предполагается, что читатель знаком с теорией функций многих переменных. В этом параграфе мы лишь выделим наиболее существенные моменты.

Вещественная функция одной вещественной переменной $f(x)$ называется *аналитической* в точке $x = x_0$, если она об-

[1] Или Зоорич [5]. — *Прим. ред.*