быть записано в виде

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{или} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}),$$

где набор $\{x_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ определяет точку $\mathbf{x}$ из M и набор $\{y_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ определяет аналогичную точку $\mathbf{y}$ из N. Если функции $\{f_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ все класса C^k, то отображение f называется отображением класса C^k (или C^k-отображением). *Матрица Якоби* C^1-отображения — это матрица из частных производных $\partial f_i/\partial x_j$. Определитель J этой матрицы называется просто *якобианом* и часто обозначается так:

$$J = \partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.5}$$

Если якобиан в точке $\mathbf{x}$ не обращается в нуль, то *теорема об обратной функции* гарантирует взаимную однозначность отображения f на некоторой окрестности точки $\mathbf{x}$ (по поводу доказательства этой теоремы см. Шоке-Брюа и др. (1977)[1]).

Если функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $g_*(y_1, \ldots, y_n)$ связаны между собой формулой

$$g_*(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) = g(x_1, \ldots, x_n)$$

(т. е. g_* принимает такое же значение в $f(\mathbf{x})$, что и g в $\mathbf{x}$), то интеграл g по M равен интегралу g_*J по N:

$$\int_M g(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_N g_*(y_1, \ldots y_n) J \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n. \tag{1.6}$$

Поскольку g и g_* принимают одинаковые значения в соответствующих точках, часто говорят, что элемент объема $\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ заменяется на $J dy_1 \ldots dy_n$. Эта точка зрения особенно полезна, когда f рассматривается как замена координат. Хотя эта формула и общеизвестна из курса анализа, мы разберем её более подробно в § 2.25 и 4.8.

1.3. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ (ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ)

Как уже отмечалось, предполагается, что читатель знаком с теорией функций многих переменных. В этом параграфе мы лишь выделим наиболее существенные моменты.

Вещественная функция одной вещественной переменной $f(x)$ называется *аналитической* в точке $x = x_0$, если она об-

[1] Или Зоорич [5]. — *Прим. ред.*

ладает в этой точке *тэйлоровым разложением*, сходящимся к $f(x)$ в некоторой окрестности x_0:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_0} + \frac{1}{3!}(x-x_0)^3\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_{x_0}+\ldots . \tag{1.7}$$

Естественно, что функции, не являющиеся бесконечно дифференцируемыми в точке x_0 (т. е. такие, что $(d^nf/dx^n)x_0$ не существует для некоторого n), не аналитичны в x_0. Но имеются и бесконечно дифференцируемые функции, которые не аналитичны. Знаменитый пример — это функция $\exp(-1/x^2)$, значение и все производные которой равны нулю при $x=0$, но которая отлична от нуля в любой окрестности $x=0$. (Это объясняется тем, что аналитическое продолжение этой функции в комплексную плоскость имеет существенную особенность при $z=0$; на вещественной же оси она ведёт себя совершенно нормально.) Впрочем, несколько успокаивает то, что аналитические функции дают хорошие приближения для многих неаналитических функций в следующем смысле. Вещественнозначная функция $g(x_1, \ldots, x_n)$, определённая в некоторой открытой области S в R^n, называется *квадратично-интегрируемой*, если существует кратный интеграл

$$\int_S [g(x_1, \ldots, x_n)]^2\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{1.8}$$

Известна теорема функционального анализа, по которой каждую квадратично-интегрируемую функцию g можно аппроксимировать аналитической функцией g' так, что интеграл от $(g-g')^2$ по S будет сколь угодно малым. В силу этого физики обычно не колеблясь предполагают данные функции аналитическими, если только это помогает получить результат; так же будем поступать и мы. Поскольку C^∞-функции не обязаны быть аналитическими, для аналитических функций имеется специальное обозначение: C^ω. Разумеется, C^ω-функция является C^∞-функцией.

Оператор A на функциях, определённых на R^n, — это отображение, переводящее одну функцию f в другую $A(f)$. Если $A(f)$ имеет вид gf, где g — некоторая фиксированная функция, то этот оператор есть простое умножение. Другие примеры операторов на функциях на R — это обычное дифференцирование

$$D(f)=\partial f/\partial x,$$

или интегрирование с заданным ядром g

$$(G(f))(x) = \int_0^x f(y)\, g(x, y)\, dy,$$

или же более сложный оператор типа

$$E(f) = f^2 + \partial^3 f/\partial x^3.$$

Оператор может быть определён на всех функциях f, а может и не на всех. Например, D определён лишь на дифференцируемых функциях, а G не определён на функциях, для которых записанный выше интеграл не существует. Указание множества функций, на которые оператор может действовать, составляет часть определения оператора; это множество называется его *областью определения.*

Коммутатор двух операторов A и B, обозначаемый через $[A, B]$, — это новый оператор, определённый равенством

$$[A, B](f) = (AB - BA)(f) = A(B(f)) - B(A(f)). \qquad (1.9)$$

Если два оператора имеют нулевой коммутатор, то говорят, что они *коммутируют.* Здесь нужно быть осторожным с областями определения операторов: область определения оператора $[A, B]$ может быть меньше, чем область определения A или B. Например, если $A = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ и $B = x\mathrm{d}/\mathrm{d}x$, то в качестве их областей определения можно взять все C^1-функции. Но не для всех C^1-функций f определено $A(B(f))$, так как в это выражение входят вторые производные. В качестве областей определения операторов AB и BA можно взять множество всех C^2-функций, более узкое, чем множество C^1-функций. Тогда и коммутатор $[A, B]$ будет иметь своей областью определения лишь C^2-функции. В данном случае можно, однако, расширить область определения (это называется также *расширением* оператора), основываясь на следующем наблюдении. Легко проверить, что для любой C^2-функции f

$$[A, B](f) = [\mathrm{d}/\mathrm{d}x, \quad x\mathrm{d}/\mathrm{d}x]f = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x,$$

поскольку вторые производные в AB и BA взаимно сокращаются. Поэтому можно отождествить $[A, B]$ с $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ (т. е. с самим A) и тем самым расширить его область определения до всех C^1-функций. Мы видим, что коммутатор может оказаться определённым даже на таких функциях, на которых произведения в коммутаторе не определены. При работе с дифференциальными операторами часто бывает удобнее, по крайней мере поначалу, брать в качестве их области определения C^∞-функции. Позже мы именно так и будем поступать, и заботиться об областях определения не придётся.