1.4. ТЕОРИЯ ГРУПП

Совокупность элементов G вместе с бинарной операцией (обозначаемой точкой) называется *группой*, если удовлетворяются следующие аксиомы:

(Gi) Ассоциативность: для любых x, y и z из G

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z.$$

(Gii) Наличие правой единицы: G содержит элемент e, такой что для любого x из G

$$x\cdot e=x.$$

(Giii) Существование правого обратного: для любого x из G существует элемент, обозначаемый через x^{-1}, также лежащий в G, такой что

$$x\cdot x^{-1}=e.$$

Группа называется *абелевой* (*коммутативной*), если, кроме того,

(Giv) $x\cdot y=y\cdot x$ для любых x, y из G.

Стандартным примером группы с конечным числом элементов является группа перестановок n объектов; бинарная композиция двух перестановок — это перестановка, получаемая в результате их последовательного выполнения. В этой группе $n!$ элементов. Единичным элементом служит перестановка, оставляющая все объекты неподвижными.

Из (Gi)—(Giii) можно вывести ряд простых следствий: единичный элемент e единствен; e является также и левым единичным ($e\cdot x=x$); обратный элемент x^{-1} единствен для каждого x; x^{-1} является также левым обратным ($x^{-1}\cdot x=e$). Знак $\cdot$ обычно опускают, если нет риска ошибиться: вместо $x\cdot y$ пишут просто xy.

В современной физике наиболее важны группы Ли, о которых мы будем много говорить ниже. Точное определение будет дано в гл. 2, здесь же достаточно сказать, что это *непрерывные* группы: каждое открытое множество элементов группы Ли допускает 1-1-отображение на открытое множество в R^n для некоторого n. Примером группы Ли является группа трансляций (сдвигов) пространства R^n ($x\mapsto x+a$, $a=\text{const}$). Каждой точке a пространства R^n соответствует элемент этой группы, так что фактически группа трансляций взаимно-однозначно отображается на всё R^n. Групповым законом является обычное сложение: пара элементов $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ и $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ переходит в $\mathbf{c}=(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$, или, коротко, $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Этот пример показывает, что не всегда символ $\cdot$ подходит для обозначения групповой операции. Для абелевых групп, каковой является разобранная нами группа, удобнее употреблять знак «+».

Подгруппа S группы G — это совокупность элементов из G, сама образующая группу относительно той же бинарной операции. (Приставка «под» всегда будет обозначать подмножество, обладающее теми же свойствами, что и объемлющее множество. Мы столкнёмся с многими примерами «подобъектов»: векторные подпространства, подмногообразия, подалгебры Ли и подгруппы Ли.) Будучи группой, подгруппа должна содержать единичный элемент. Поскольку единичный элемент e группы единствен, любая подгруппа должна его содержать. В примере с группой подстановок легко придумать много подгрупп. Скажем, перестановки n объектов, не меняющие положения первого объекта, образуют подгруппу полной группы подстановок, так как: (i) тождественная перестановка e не двигает первый объект; (ii) если данная перестановка не двигает первый объект, то её обратная тоже такова; (iii) произведение двух таких перестановок опять же не двигает первый объект. Эта подгруппа совпадает с группой перестановок $(n-1)$ объектов. Пусть читатель попробует доказать, что множество всех *чётных* перестановок также является подгруппой в группе всех перестановок, а нечётные перестановки подгруппы *не* образуют.

Наше утверждение, что определённая подгруппа группы перестановок n объектов «совпадает» с группой перестановок $n-1$ объектов, есть пример *изоморфизма групп*. Две группы G_1 и G_2 с бинарными операциями $\cdot$ и $*$ соответственно *изоморфны* (это означает, что они неотличимы с точки зрения их групповых свойств), если имеется 1-1-отображение f группы G_1 на G_2, сохраняющее групповую операцию:

$$f(x\cdot y)=f(x)*f(y). \tag{1.10}$$

Для нашего примера изоморфизм f тривиален: элемент подгруппы, переставляющий лишь последние $n-1$ объектов из n, переходит в ту же самую перестановку в группе перестановок $n-1$ объектов. Но изоморфизмы не всегда бывают тривиальными. Пусть G_1 — группа положительных вещественных чисел с операцией умножения, а G_2 — группа всех вещественных чисел с операцией сложения. (Почему это группы?) Тогда если x — число из G_1, то $f(x)=\log x$ определяет отображение $f: G_1\to G_2$, удовлетворяющее (1.10):

$$\log(xy)=\log x+\log y.$$

Эти две группы изоморфны, и f — изоморфизм.

Другое полезное отношение между группами — это *групповой гомоморфизм*. Его определение похоже на определение изоморфизма, может лишь нарушаться взаимная однозначность. Равенство (1.10) по-прежнему должно быть справедливым. Тривиальный гомоморфизм группы в себя — это отображение, переводящее каждый элемент группы в единичный элемент e. Менее тривиальный пример — гомоморфизм группы перестановок на мультипликативную группу, состоящую из двух элементов $\{1, -1\}$. Этот гомоморфизм переводит каждую чётную перестановку в 1, а каждую нечётную — в -1. Читателю следует проверить равенство (1.10) для этого примера, т. е. проверить, что композиция двух нечётных перестановок есть чётная перестановка, нечётной и чётной — нечётная и двух чётных — чётная.

1.5. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Множество V называется *векторным пространством* (над вещественными числами), если в нём задана бинарная операция, обозначаемая знаком „$+$", относительно которой оно образует абелеву группу (см. выше), и если определено умножение ($\cdot$) его элементов (векторов) на вещественные числа, удовлетворяющее следующим аксиомам (ниже $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — векторы, а a и b — вещественные числа):

(Vi) $a \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = (a \cdot \bar{x}) + (a \cdot \bar{y})$,

(Vii) $(a + b) \cdot \bar{x} = (a \cdot \bar{x}) + (b \cdot \bar{x})$,

(Viii) $(ab) \cdot \bar{x} = a(b \cdot \bar{x})$,

(Viv) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$.

Единичный элемент в группе V обозначается через $\bar{0}$ или просто 0. Помимо стандартных примеров векторных пространств отметим ещё, что векторными пространствами являются:

(i) множество всех $n \times n$-матриц, где „$+$" обозначает покомпонентное сложение, а „$\cdot$" обозначает покомпонентное умножение на вещественное число;

(ii) множество всех вещественных непрерывных функций $f(x)$, определённых на интервале $a \leqslant x \leqslant b$.

Обычно опускают точку, обозначающую умножение на число, и скобки, фигурирующие в аксиомах. Выражение вида

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} \tag{1.11}$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$. Множество элементов $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\}$ пространства V *линейно-независимо*, если нельзя найти вещественные числа $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, не все равные нулю, такие что

$$a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \ldots + a_m\bar{x}_m = 0 \tag{1.12}$$